DEVOIR MAISON 1

Le but de ce devoir est de présenter quelques inégalités classiques, mais surtout de découvrir quelques une des nombreuses méthodes permettant d'établir des inégalités. Les parties V (difficile) et VI (très difficile) sont ***facultatives****.*

Notations

► On rappelle que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des réels, alors on note $\sum_{i=1}^{n} x_i$ la somme $x_1 + \cdots + x_n$ et $\prod_{i=1}^{n} x_i$ le produit $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$.
► Si $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $x \in \mathbf{R}$, on note $a^x = e^{x \ln(a)}$.
► Pour $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ la racine $n^{\text{ème}}$ de a.
Vous pourrez utiliser sans démonstration (ou le reprouver si vous en ressentez le besoin) que pour a, b strictement positifs, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ et que pour $x > 0$, $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.

Partie I. L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels.

Le but de cette partie est de prouver l'inégalité ($\blacklozenge$) : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ (*inégalité de Cauchy-Schwarz*).

Soit encore : $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$.

On définit une fonction f sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 = (a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2 + \cdots + (a_n t + b_n)^2$.

1. On suppose dans cette question que les réels $a_1, \dots, a_n$ ne sont pas tous nuls.
   a. Prouver que f est une fonction polynomiale de degré 2, c'est-à-dire qu'il existe trois réels A, B, C, que l'on déterminera, avec $A \neq 0$, tels que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = At^2 + Bt + C$.
   b. Prouver que f est de signe constant sur $\mathbf{R}$. Qu'en déduit-on quant au signe de son discriminant ?
   c. En déduire l'inégalité ($\blacklozenge$).
2. Prouver que ($\blacklozenge$) reste valable même si les a_i sont tous nuls.

Partie II. L'inégalité arithmético-géométrique (première preuve).

On suppose à présent que $a_1, \dots, a_n$ sont des réels strictement positifs.

On note $A = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ (*la moyenne arithmétique des a_i*) et $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ (*la moyenne géométrique des a_i*).

On appelle **inégalité arithmético-géométrique** l'inégalité $G \leqslant A$, soit encore $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, que l'on va chercher à prouver par différentes méthodes dans cette partie et les suivantes.

Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(t) = \dfrac{1}{n} G \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{a_i}{G}\right)^t = \dfrac{G}{n}\left(\left(\dfrac{a_1}{G}\right)^t + \cdots + \left(\dfrac{a_n}{G}\right)^t\right)$.

3. Montrer que g est dérivable sur $[0,1]$ et que sa dérivée est croissante.
4. Déterminer $g'(0)$ et en déduire que g est croissante sur $[0,1]$.
5. Calculer $g(0)$ et $g(1)$ et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Partie III. Une seconde preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

On reprend les notations de la partie précédente.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \leqslant e^{x-1}$. *Indication : on pourra par exemple étudier la fonction $x \mapsto e^{x-1} - x$.*
7. En utilisant les réels $\dfrac{a_1}{A}, \dots, \dfrac{a_n}{A}$, donner une autre preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.
8. À quelle condition l'inégalité arithmético-géométrique est-elle une égalité ?

Partie IV. Une troisième preuve de l'inégalité arithmético-géométrique

Soient $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ des nombres strictement positifs, et soient $p_1, \dots, p_n$ des réels positifs tels que $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

On note $G' = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}$ et $A' = p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n$.

9. Justifier que $a_1 \leqslant G' \leqslant a_n$. *Dans la suite, on note alors k un entier de $[\![1, n]\!]$ tel que $a_k \leqslant G' \leqslant a_{k+1}$.*
10. En distinguant les cas $i \leqslant k$ et $i > k$, justifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \displaystyle\int_{a_i}^{G'} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G'}\right) dt \geqslant 0$.
11. En sommant les inégalités de la question précédente, en déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G'}^{a_i} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G'}^{a_i} \frac{1}{G'}\, dt$.
12. Prouver enfin que $G' \leqslant A'$ et retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.

Partie V. L'inégalité de Jensen et une quatrième preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **concave** si quels que soient $x, y \in I$ et quel que soit $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \leqslant f(\lambda x + (1 - \lambda) y)$.

13. On souhaite dans cette question prouver que la fonction ln est concave sur $\mathbf{R}_+^*$. Soient donc x, y deux réels strictement positifs **fixés**, vérifiant $x < y$.
    On note h la fonction définie sur $[0, 1]$ par $h(t) = \ln(tx + (1 - t)y) - t\ln(x) - (1 - t)\ln(y)$.
    a. Montrer que la fonction h' s'annule au plus une fois sur $[0, 1]$.
    b. En notant que $h(0) = h(1)$, prouver que h' s'annule exactement une fois sur $[0, 1]$.
    c. En déduire le tableau de variations de h, puis le signe de h sur $[0, 1]$ et conclure.
14. Soit f une fonction concave sur un intervalle I. On souhaite prouver par récurrence sur $n \geqslant 2$ la proposition $\mathscr{P}(n)$: «quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, quels que soient $x_1, \dots, x_n$ éléments de I, $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \leqslant f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)$.» *Par le principe de récurrence, on a donc prouvé que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$. Cette inégalité s'appelle inégalité de Jensen.*
    a. Justifier que $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
    b. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des éléments de I et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des réels positifs tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$.
    Prouver qu'il existe $y \in I$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) y$. En déduire que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
15. En appliquant l'inégalité de Jensen à la fonction ln, avec des λ_i bien choisis, retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.

Partie VI. L'inégalité de Ky Fan et une dernière preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

16. En vous inspirant de la question 13, prouver que la fonction $g : x \mapsto \ln(x) - \ln(1 - x)$ est concave sur $[0, \frac{1}{2}]$.
17. En déduire l'inégalité de Ky Fan : quels que soient les réels $x_1, \dots, x_n$ de $[0, \frac{1}{2}]$,

$$\frac{\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}}{\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)\right)^{1/n}} \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)}.$$

18. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs.
    a. Déterminer un réel $M > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [0, M]$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda a_i \in [0, \frac{1}{2}]$.
    b. En appliquant l'inégalité de Ky Fan aux λa_i pour $\lambda \in [0, M]$, retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 1

Mise en garde *: ce corrigé a avant tout vocation à vous aider à comprendre les questions qui auraient pu poser problème, et ne se veut pas être un modèle de rédaction. Une très bonne rédaction peut être bien plus courte, l'essentiel étant de ne pas oublier les arguments importants qui justifient les différentes étapes du calcul et du raisonnement.*

Partie I. L'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1.a. En développant les carrés, il vient, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t) = \sum_{i=1}^n (a_it+b_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2t^2+2a_ib_it+b_i^2) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)t^2 + \left(2\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)t + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Ou si vous préférez travailler avec des pointillés :

$$f(t) = (a_1^2t^2+2a_1b_1t+b_1^2)+\cdots+(a_n^2t^2+2a_nb_nt+b_n^2) = (a_1^2+\cdots+a_n^2)t^2+2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)t+(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$

Puisque les a_i sont non tous nuls, l'un au moins des a_i^2 est strictement positif, et donc leur somme $\sum_{i=1}^n a_i^2$ est strictement positive.

Donc le coefficient de degré 2 de f est non nul, et donc f est bien une fonction polynomiale de degré 2, de la forme $f(t) = At^2+Bt+C$, pour $A = \sum_{i=1}^n a_i^2$, $B = 2\sum_{i=1}^n a_ib_i$ et $C = \sum_{i=1}^n b_i^2$.

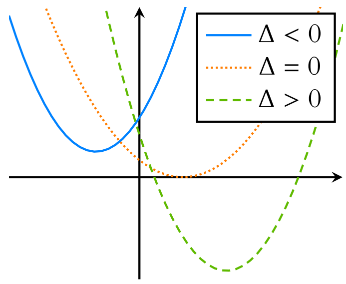


FIGURE 0.1– Un polynôme de degré 2 de signe constant est de discriminant négatif ou nul.

1.b. Puisque $f(t)$ est une somme de carrés, f est positive sur $\mathbf{R}$.
Mais il est très classique qu'une fonction polynomiale de degré 2 de discriminant strictement positif possède deux racines distinctes, et change de signe en chacune de ces racines.
Donc le discriminant de f est nécessairement $\boxed{\text{négatif ou nul.}}$

1.c. Le discriminant en question est $\Delta = B^2-4AC$, et donc

$$\Delta \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(2\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

En appliquant la racine carrée[1] à chacun des membres de cette inégalité, il vient donc

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \Leftrightarrow \boxed{\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.}$$

[1] Ce qui préserve le sens des inégalités par croissance de la fonction racine.

Rappel
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

2. Si tous les a_i sont nuls, alors le raisonnement ci-dessus ne vaut plus puisqu'alors $A = 0$, et donc f n'est plus polynomiale de degré 2 (elle devient en réalité constante).
Mais si tous les a_i sont nuls, alors les deux membres de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sont nuls, donc l'inégalité est évidemment valable (et c'est même une égalité).

Partie II. L'inégalité arithmético-géométrique (première preuve).

3. Pour tout $t \in [0,1]$, et tout $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction $t \mapsto \left(\frac{a_i}{G}\right)^t = e^{t\ln(a_i/G)}$ est dérivable, et donc g est dérivable car somme de fonctions dérivables.
La dérivée de $t \mapsto e^{t\ln(a_i/G)}$ est $t \mapsto \ln\left(\frac{a_i}{G}\right)e^{t\ln(a_i/G)} = \ln\left(\frac{a_i}{G}\right)\left(\frac{a_i}{G}\right)^t$.
Et donc pour tout $t \in [0,1]$,

$$g'(t) = \frac{G}{n}\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{G}\right)\left(\frac{a_i}{G}\right)^t.$$

Dérivée
Rappelons que si a est une constante, la dérivée de $t \mapsto e^{at}$ est $t \mapsto ae^{at}$.

Pour déterminer le sens de variations de g', dérivons-la : sa dérivée est alors

$$g'' = (g')' : t \mapsto \frac{G}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\ln\left(\frac{a_i}{G}\right)^2}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\frac{a_i}{G}\right)^t}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Et donc $\boxed{g' \text{ est croissante}}$ puisque sa dérivée est positive.

4. On a

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{G}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{a_i}{G}\right) = \frac{G}{n}\ln\left(\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{G \cdot G \cdots G}\right) \\ &= \frac{G}{n}\ln\left(\frac{a_1 \cdots a_n}{G^n}\right) = \frac{G}{n}\ln\left(\frac{a_1 \cdots a_n}{a_1 \cdots a_n}\right) = \frac{G}{n}\ln(1) = 0. \end{aligned}$$

Logarithme
Souvenons nous que la somme de logarithmes est le logarithme du produit :

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Puisque g' est croissante et que $g'(0) = 0$, g' est positive[2] sur $[0, 1]$.
Et par conséquent, g est croissante sur $[0, 1]$.

[2] Dresser un tableau de variations pour s'en convaincre.

5. On a $g(0) = \dfrac{G}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{a_i}{G}\right)^0}_{=1} = \dfrac{G}{n}\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n \text{ fois}} = \dfrac{G}{n}n = G.$

D'autre part, $g(1) = \dfrac{G}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{G}\right)^1 = \dfrac{\cancel{G}}{n}\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{\cancel{G}} = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = A.$

Et donc puisque g est croissante, $g(0) \leqslant g(1) \Leftrightarrow G \leqslant A$.

On a donc bien prouvé l'inégalité arithmético-géométrique : $\boxed{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.}$

Partie III. Une seconde preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

6. Soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = e^{x-1} - x$.
Alors φ est dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) = e^{x-1} - 1$.
On a alors $\varphi'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geqslant 1 \Leftrightarrow x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$.
Et donc le tableau de variations de φ est le suivant :

Limites
Les limites ne nous étant pas ici utiles, il n'est pas utile de les faire figurer dans le tableau (mais les deux valent $+\infty$).

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x) \geqslant \varphi(1) = 0$, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$e^{x-1} - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant e^{x-1}.$$

7. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, en appliquant la question précédente à $x_i = \frac{a_i}{A}$, on a donc $\dfrac{a_i}{A} \leqslant e^{\frac{a_i}{A} - 1}$.
En multipliant ces inégalités[3], on obtient donc

$$\frac{a_1}{A}\frac{a_2}{A}\cdots\frac{a_n}{A} \leqslant e^{\frac{a_1}{A}-1}e^{\frac{a_2}{A}-1}\cdots e^{\frac{a_n}{A}-1}.$$

[3] Ce qui est légitime car toutes sont formées de nombres positifs.

Soit encore

$$\frac{a_1 \cdots a_n}{A^n} \leqslant e^{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{A} - n} \Leftrightarrow \frac{G^n}{A^n} \leqslant \underbrace{e^{\frac{nA}{A} - n}}_{=e^0=1}.$$

Et donc $\dfrac{G^n}{A^n} \leqslant 1 \Leftrightarrow G^n \leqslant A^n$.
Par croissance de la fonction $x \mapsto x^{1/n}$, il vient donc $\boxed{G \leqslant A}$, ce qui termine donc la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

8. La fonction φ étudiée plus tôt et en réalité strictement décroissante sur $]-\infty,1[$ (car sa dérivée y est strictement négative) et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
Donc elle ne s'annule qu'en 1, de sorte que $x = e^{x-1}$ **si et seulement si** $x = 1$.

Pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, il faut donc que toutes les inégalités $\frac{a_i}{A} \leqslant e^{\frac{a_i}{A}-1}$ soient des égalités, puisque dès que l'une de ces inégalités est stricte, le produit l'est aussi.
Donc l'inégalité arithmético-géométrique est une égalité si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\frac{a_i}{A} = 1 \Leftrightarrow a_i = A$.
Il est aisé de constater que ceci est vrai $\boxed{\text{si et seulement si tous les } a_i \text{ sont égaux.}}$

Partie IV. Une troisième preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.
Notons tout de suite que le fait de supposer les a_i dans l'ordre croissant n'est destiné qu'à faciliter la rédaction de la preuve, mais que l'inégalité $a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n} \leqslant p_1a_1+\cdots+p_na_n$ reste valable sans cette hypothèse.

9. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $a_1 \leqslant a_i \leqslant a_n$ et donc[4] $a_1^{p_i} \leqslant a_i^{p_i} \leqslant a_n^{p_i}$.
Et donc par produit d'inégalités à termes positifs,

$$a_1^{p_1}a_1^{p_2}\cdots a_1^{p_n} \leqslant a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n} \leqslant a_n^{p_1}a_n^{p_2}\cdots a_n^{p_n} \Leftrightarrow a_1^{\overbrace{p_1+p_2+\cdots+p_n}^{=1}} \leqslant G' \leqslant a_n^{p_1+p_2+\cdots+p_n} \Leftrightarrow a_1 \leqslant G' \leqslant a_n.$$

[4] La fonction $t \mapsto t^{p_i}$ est croissante.

10. Si $i \leqslant k$, alors $a_i \leqslant G'$, et pour tout $t \in [a_i, G']$, $t \leqslant G'$ de sorte que $\dfrac{1}{t} \geqslant \dfrac{1}{G'} \Leftrightarrow \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{G'} \geqslant 0$.
Donc $\displaystyle\int_{a_i}^{G'}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{G'}\right)dt \geqslant 0$. Et puisque $p_i \geqslant 0$, on a bien l'inégalité annoncée.
En revanche, si $i \geqslant k+1$, alors $a_i \geqslant G'$ de sorte que les bornes de l'intégrale sont «dans le mauvais sens». On a alors $\displaystyle\int_{a_i}^{G'}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{G'}\right)dt = \int_{G'}^{a_i}\left(\frac{1}{G'}-\frac{1}{t}\right)dt$.
Cette fois, les bornes sont dans le bon sens, et pour $t \in [G', a_i]$, $t \geqslant G'$, de sorte que $\frac{1}{G'} - \dfrac{1}{t} \geqslant 0$, et on conclut alors comme dans le cas précédent.

Rappel
Nous reviendrons dessus en temps voulu, mais il s'agit là d'un résultat vu en terminale sous une forme ou une autre : si $a \leqslant b$, et si f est une fonction positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$. C'est évident si on interprète cette intégrale comme une aire.

11. Sommons comme indiqué les inégalités précédemment obtenues :

$$p_1\int_{a_1}^{G'}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{G'}\right)dt + p_2\int_{a_2}^{G'}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{G'}\right)dt + \cdots + p_n\int_{a_n}^{G'}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{G'}\right)dt \geqslant 0.$$

Mais pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\int_{a_i}^{G'}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{G'}\right)dt = \int_{a_i}^{G'}\frac{dt}{t} - \int_{a_i}^{G'}\frac{dt}{G'}$.
Donc la somme devient

$$\sum_{i=1}^n p_i\int_{a_i}^{G'}\frac{dt}{t} - \sum_{i=1}^n p_i\int_{a_i}^{G'}\frac{dt}{G'} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n p_i\int_{a_i}^{G'}\frac{dt}{t} \geqslant \sum_{i=1}^n p_i\int_{a_i}^{G'}\frac{dt}{G'}.$$

En multipliant par -1 cette inégalité, on obtient l'inégalité demandée :

$$\boxed{\sum_{i=1}^n p_i\int_{G'}^{a_i}\frac{dt}{t} \leqslant \sum_{i=1}^n p_i\int_{G'}^{a_i}\frac{dt}{G'}.}$$

Rappel
Multiplier une intégrale par -1 a pour effet de renverser les bornes.

12. Pour tout i, on a $\displaystyle\int_{G'}^{a_i}\frac{dt}{t} = [\ln(t)]_{G'}^{a_i} = \ln\left(\frac{G'}{a_i}\right)$.
Et d'autre part,

$$\int_{G'}^{a_i}\frac{1}{G'}\,dt = \frac{1}{G'}\int_{G'}^{a_i}1\,dt = \frac{1}{G'}[t]_{G'}^{a_i} = \frac{a_i-G'}{G'} = \frac{a_i}{G'} - 1.$$

Détails
Le $\frac{1}{G'}$ peut «sortir» de l'intégrale puisqu'il s'agit d'une constante.

Et alors à l'aide de l'inégalité de la question précédente,

$$\sum_{i=1}^n p_i(\ln(a_i)-\ln(G')) \leqslant \sum_{i=1}^n p_i\left(\frac{a_i}{G'}-1\right) \Leftrightarrow \ln(a_1^{p_1}\cdots a_n^{p_n}) - \underbrace{(p_1+\cdots+p_n)}_{=1}\ln(G') \leqslant \frac{A'}{G'} - \underbrace{(p_1+\cdots+p_n)}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{A'}{G'} \Leftrightarrow G' \leqslant A'.$$

L'inégalité arithmético-géométrique n'est autre que le cas particulier où $p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$, qui sont bien des réels positifs dont la somme vaut 1.

Partie IV. L'inégalité de Jensen et une troisième preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

13.a. **Soyons attentifs au fait que la dérivation s'effectue ici par rapport à t, et non par rapport à x ou y, qui sont tous deux fixés.**
Notons que $\ln(tx+(1-t)y) = \ln(t(x-y)+y)$. Et donc la dérivée de $t \mapsto \ln(tx+(1-t)y)$ est $t \mapsto (x-y)\dfrac{1}{t(x-y)+y}$.

Et donc on a, pour tout $t \in [0,1]$, $h'(t) = (x-y)\dfrac{1}{t(x-y)+y} - \ln(x) + \ln(y)$.

Il vient donc

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-y}{t(x-y)+y} = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow t(x-y)+y-\frac{x-y}{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} = 0.$$

Or, la fonction $t \mapsto t(x-y)+y-\dfrac{x-y}{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}$ est une fonction affine strictement décroissante[5], et donc elle ne peut s'annuler qu'au plus une fois sur $[0,1]$.

Par conséquent, $\boxed{h' \text{ s'annule au plus une fois sur } [0,1].}$

13.b. On a $h(0) = \ln(y) - \ln(y) = 0$, et de même $h(1) = \ln(x) - \ln(x) = 0$.
Supposons par l'absurde que h' ne s'annule pas sur $[0,1]$. Alors elle y est de signe constant, soit strictement positive, soit strictement négative.
Mais alors h est strictement monotone, contredisant le fait que $h(0) = h(1)$.
On en déduit que h' s'annule au moins une fois sur $[0,1]$, et donc par la question précédente, s'y annule exactement une fois.

13.c. Notons α l'unique réel de $[0,1]$ tel que $h'(\alpha) = 0$.
Sur le même principe qu'en 13.a, on prouve que

$$h'(t) > 0 \Leftrightarrow t(x-y)+y-\frac{x-y}{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} < 0 \Leftrightarrow t > \alpha$$

la dernière équivalence provenant de la décroissance de la fonction affine évoquée plus tôt.
Donc le tableau de variations de h est le suivant :

x	0		α		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$h(\alpha)$	$\searrow$	0

On en déduit que h est positive, et donc que pour tout $t \in [0,1]$,

$$h(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t\ln(x) + (1-t)\ln(y) \leqslant \ln(tx+(1-t)y).$$

Cette inégalité[6] reste évidemment valable (et c'est même une égalité) si $x = y$.

14. Notons que l'hypothèse de récurrence n'est pas complètement évidente : on suppose que la propriété est vraie **quels que soient** les n nombres $x_1, \dots, x_n$ et quels que soient les n nombres positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dont la somme vaut 1.

14.a. Soient x_1 et x_2 deux éléments de I, et soient λ_1, λ_2 deux réels positifs tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.
Alors $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$.
Et donc $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2)$ de sorte que par concavité de f,

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \leqslant f\left(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2\right) \leqslant f\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\right).$$

Ainsi, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

Rappel
Si f est une fonction dérivable, alors la dérivée de $t \mapsto f(at+b)$ est $t \mapsto af'(at+b)$.
Ici, on a $f = \ln$ (de sorte que $f'(t) = \frac{1}{t}$, $a = x-y$ et $b = y$.

[5] Car son coefficient directeur $x - y$ est strictement négatif.

Remarque
Cette fonction s'annule exactement une fois sur $\mathbf{R}$, mais peut-être pas sur $[0,1]$.

Signe constant
Il s'agit là du théorème des valeurs intermédiaires, abordé en terminale, et qui s'applique car h est continue (car dérivable) : si h prenait deux valeurs de signe opposé, entre les deux elle «passerait» par 0.

[6] Que pour l'instant nous n'avons établie que dans le cas $x < y$.

Remarque
Puisque λ_1 et λ_2 sont tous deux positifs et que leur somme vaut 1, ils sont tous les deux dans $[0,1]$.

14.b. Soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des éléments de I, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des réels positifs de somme 1.
► **Si $\lambda_{n+1} = 1$**, alors n'importe quel élément y de I vérifie

$$\underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}_{=0} + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) y.$$

► **Si $\lambda_{n+1} \neq 1$**, posons alors $y = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{1 - \lambda_{n+1}}$.
On a alors facilement $\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$, il reste à prouver que y est bien un élément de I.
Soit a le plus petit des n nombres $x_1, \dots, x_n$ et soit b le plus grand, de sorte que $a \in I$ et $b \in I$ et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a \leqslant x_i \leqslant b$.
Alors $\lambda_1 a + \dots + \lambda_n a \leqslant \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \leqslant \lambda_1 b + \dots + \lambda_n b$, et donc après division par $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $a \leqslant y \leqslant b$.
Mais a et b sont dans I, qui est un intervalle, de sorte que $\boxed{y \in I.}$

Rappel
C'est la **définition** même d'intervalle : tout nombre compris entre deux éléments de I est encore dans I.

Par concavité de f, on a donc

$$\lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) f(y) \leqslant f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) y) \leqslant f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}).$$

Mais $f(y) = f\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} x_1 + \dots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} x_n\right)$.
Souvenons-nous que nous avons supposé $\mathscr{P}(n)$ vraie. Or, $x_1, \dots, x_n$ sont dans I, $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}, \dots, \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ sont des réels positifs dont la somme vaut $\dfrac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = 1$, et donc il vient

$$f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} x_n\right) \geqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} f(x_n).$$

Et donc au final, on a bien (en se souvenant que $1 - \lambda_{n+1} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$).

$$\begin{aligned}\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) &= (1 - \lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_n)\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leqslant f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) y) = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}),\end{aligned}$$

ce qui achève de prouver que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

15. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Appliquons l'inégalité de Jensen à la fonction concave ln avec $x_i = a_i$ et $\lambda_i = \frac{1}{n}$, de sorte que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Alors il vient

$$\frac{1}{n} \ln(a_1) + \dots + \frac{1}{n} \ln(a_n) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n} a_1 + \dots + \frac{1}{n} a_n\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \ln(a_1 \cdots a_n) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)\right).$$

En appliquant la fonction exponentielle[7], ceci est équivalent à

$$e^{\frac{1}{n} \ln(a_1 \cdots a_n)} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \Leftrightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

[7] Qui préserve les inégalités car elle est strictement croissante.

L'étude systématique des fonctions concaves (et des fonctions qui vérifient l'inégalité inverse, appelées fonctions convexes) sera réalisée en seconde année.
Vous y expliquerez notamment que l'inégalité $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \leqslant f(\lambda x + (1 - \lambda) y)$ signifie que le graphe de f sur le segment $[x, y]$ est situé au-dessus de la droite reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ (droite qu'on appelle une corde de f).
Vous prouverez également que les fonctions dérivables concaves sont celles dont le graphe est situé sous les tangentes, ou encore dont la dérivée est décroissante.

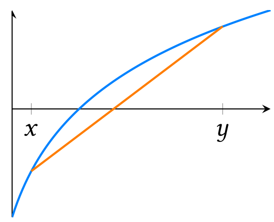


FIGURE 0.2– Une fonction concave et une de ses cordes.

Partie V. L'inégalité de Ky Fan et une dernière preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

16. Soient $x < y$ deux éléments de $[0, \frac{1}{2}]$, et soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$h(t) = g(tx + (1-t)y) - tg(x) - (1-t)g(y) = \ln(tx + (1-t)y) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y) - \ln(1 - tx - (1-t)y) + t\ln(1-x) + (1-t)\ln(1-y).$$

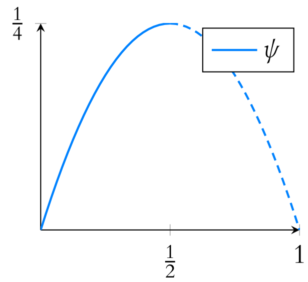
Alors h est dérivable, et sa dérivée est

$$h' : t \mapsto \frac{x-y}{tx+(1-t)y} - \ln(x) + \ln(y) + \frac{x-y}{1-tx-(1-t)y} + \ln(1-x) - \ln(1-y)$$
$$= \frac{x-y}{[tx+(1-t)y]\,[1-(tx+(1-t)y)]} - \ln\left(\frac{x(1-y)}{(1-x)y}\right).$$

On a alors

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow [tx+(1-t)y]\,[1-(tx+(1-t)y)] = \frac{x-y}{\ln\left(\frac{x(1-y)}{(1-x)y}\right)}.$$

Considérons alors la fonction $\psi : t \mapsto t(1-t) = -t^2+t$, de sorte que $[tx+(1-t)y][1-(tx+(1-t)y)] = \psi(tx+(1-t)y)$, avec $tx+(1-t)y \in [0, \frac{1}{2}]$.
Puisque la fonction ψ est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, elle y prend au plus une fois la valeur $\dfrac{x-y}{\ln\left(\frac{x(1-y)}{(1-x)y}\right)}$.



Si elle ne la prend pas, h' ne s'annule pas, et sinon notons α l'unique réel de $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $\psi(\alpha) = \dfrac{x-y}{\ln\left(\frac{x(1-y)}{(1-x)y}\right)}$.
Alors $h'(t) = 0 \Leftrightarrow tx+(1-t)y = \alpha$. Et alors comme précédemment, cette équation possède au plus une solution dans $[0, \frac{1}{2}]$.
Donc h' s'annule au plus une fois. Puisque $h(0) = h(1) = 0$, on prouve comme en 13.b que h s'annule exactement une fois. Puis comme en 13.c que h est positive, et donc que g est concave.

17. Soient $x_1, \dots, x_n$ dans $[0, \frac{1}{2}]$, et considérons comme précédemment $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$.
Alors par l'inégalité de Jensen appliquée à g, il vient

$$\frac{1}{n}\left(\ln(x_1) - \ln(1-x_1)\right) + \dots + \frac{1}{n}\left(\ln(x_n) - \ln(1-x_n)\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \dots + \frac{1}{n}x_n\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}x_1 - \dots - \frac{1}{n}x_n\right).$$

Soit encore $\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{x_1\cdots x_n}{(1-x_1)\cdots(1-x_n)}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{\frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)}{\frac{1}{n}((1-x_1)+\dots+(1-x_n))}\right)$.
Et donc en appliquant l'exponentielle, il vient

$$\left(\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)}\right)^{1/n} \leqslant \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (1-x_i)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}}{\left(\prod_{i=1}^n (1-x_i)\right)^{1/n}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n (1-x_i)}}.$$

18.a. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda > 0$, on a $\lambda a_i \leqslant \frac{1}{2}$ si et seulement si $\lambda \leqslant \frac{1}{2a_i}$.
Donc si M désigne le plus petit des réels $\frac{1}{2a_1}, \dots, \frac{1}{2a_n}$, alors pour $\lambda \in [0, M]$, on a bien $\lambda a_i \in [0, \frac{1}{2}]$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

18.b. Par l'inégalité de Ky Fan appliquée aux λa_i, il vient

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^n \lambda a_i\right)^{1/n}}{\left(\prod_{i=1}^n (1-\lambda a_i)\right)^{1/n}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n \lambda a_i}{\sum_{i=1}^n (1-\lambda a_i)}.$$

Notons tout de suite que $\left(\prod_{i=1}^n \lambda a_i\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\lambda^n \prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} = \lambda \prod_{i=1}^n a_i$.

Pas convaincu ?
Écrivez le produit avec des pointillés pour bien comprendre l'origine du λ^n (ou attendez quelques semaines qu'on en parle en cours).

Et de même, $\sum_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i$.

On a donc $\lambda \dfrac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}{\sqrt[n]{(1-\lambda a_1)\cdots(1-\lambda a_n)}} \leqslant \lambda \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda a_i)}$.

Et donc pour $\lambda \in]0, M]$, $\dfrac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}{\sqrt[n]{(1-\lambda a_1)\cdots(1-\lambda a_n)}} \leqslant \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda a_i)}$.

⚠ Attention !
Pour diviser les deux membres de l'inégalité par λ, on a bien supposé $\lambda \neq 0$.

En faisant tendre λ vers 0, les λa_i tendent vers 0, et donc $\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda a_i) \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} \prod_{i=1}^{n} 1 = 1$.

De même, $\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda a_i) \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

Et donc il reste $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, ce qui est bien l'inégalité arithmético-géométrique.

Il existe plus d'une cinquantaine de preuves de l'inégalité arithmético-géométrique, la preuve la plus «standard» étant celle utilisant l'inégalité de Jensen, qui est elle aussi très classique.