Devoir maison 17

*Vous traiterez **au choix** l'un des deux problèmes suivants, le second étant **beaucoup** plus théorique et difficile que le premier.*

▸ Problème 1 : quelques matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel **de dimension** 3.
On notera avec la même notation 0 à la fois la matrice nulle, l'endomorphisme nul et le vecteur nul de $\mathbf{R}^3$, le contexte ne prêtant normalement pas à confusion.

Partie I. Endomorphismes nilpotents en dimension 3.

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et soient i, j deux entiers naturels.
   Soit alors w l'application définie sur $\operatorname{Ker} u^{i+j}$ à valeurs dans E défini par $w(x) = u^j(x)$.
   a. Montrer que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i$.
   b. En déduire que $\dim(\operatorname{Ker} u^{i+j}) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u^i) + \dim(\operatorname{Ker} u^j)$.
2. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg}(u) = 2$.
   a. Montrer à l'aide de la question 1.b que $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 2$.
   b. Prouver qu'il existe $x \in E$ tel que $(u^2(x), u(x), x)$ forme une base de E.
   c. Écrire alors dans cette base la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg}(u) = 1$.
   a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
   b. Justifier l'existence d'un vecteur c de $\operatorname{Ker} u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis prouver que $(b, u(b), c)$ est une base de E.
   c. Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie II : une matrice unipotente 3×3 est semblable à sa transposée

Dans cette partie, on considère $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit $P \in GL_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = I_3 + N = T$.

4. Justifier que A est inversible.
5. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
6. On suppose dans cette question que $N = 0$. Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
7. On suppose dans cette question que $\operatorname{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
   a. En utilisant la question 2, montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et en déduire une matrice semblable à M.
   b. Calculer M^3 et déterminer $\operatorname{rg}(M)$.
   c. Montrer que les matrices M et N sont semblables.
   d. Montrer alors que A et A^{-1} sont semblables.

8. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

9. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
On note (a, b, c) une base de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans cette base.
   a. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).
   b. Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.
   c. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

10. Est-ce qu'inversement, toute matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ semblable à son inverse est semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

▸ Problème 2 : réduction de Jordan des matrices nilpotentes

Dans tout le problème, n est un élément de $\mathbf{N}^*$, et E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E, un endomorphisme u de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathscr{B}$ est nilpotente d'indice p, ce qui revient à dire que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.
On appelle *classe de similitude* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ la classe d'équivalence de A pour la relation d'équivalence donnée par la similitude, c'est-à-dire l'ensemble des $\{P^{-1}AP,\ P \in GL_n(\mathbf{C})\}$.

On pose $J_1 = (0)$ (la matrice nulle de $\mathscr{M}_1(\mathbf{C})$ et, pour un entier $\alpha \geqslant 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_\alpha(\mathbf{C})$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B \in \mathscr{M}_m(\mathbf{C})$, on note $\mathrm{Diag}(A, B)$, la matrice (dite *diagonale par blocs*)

$$\mathrm{Diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbf{C}).$$

Plus généralement, pour $A_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbf{C})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbf{C}), \cdots, A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbf{C})$, on note

$$\mathrm{Diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{n_1,n_2} & \cdots & 0_{n_1,n_k} \\ 0_{n_2,n_1} & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0_{n_{k-1},n_k} \\ 0_{n_k,n_1} & \cdots & 0_{n_k,n_{k-1}} & A_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbf{C}).$$

Partie I. Étude d'un cas particulier

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et que $2r \leqslant n$.
2. On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E tels que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r))$ est une base de E.
3. Donner la matrice de u dans cette base.

4. On suppose $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}$ appartenant à $\mathrm{Ker}(u)$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r})$ est une base de E.
5. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Partie II. Réduction des matrices nilpotentes

On suppose $n \geqslant 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

6. Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$ est encore nilpotent, et préciser son indice de nilpotence.
7. Pour tout vecteur x non nul de E, on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $(u^k(x))_{k\in\mathbf{N}}$.
Démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geqslant 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.
8. Démontrer que $(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$.
9. Prouver par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_t$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.
Indication : on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$.
10. Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ (c'est-à-dire une base de E obtenue par concaténation de bases des $C_u(x_i)$).

Partie III. Partitions d'entiers

On appelle **partition de l'entier** n toute suite finie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in (\mathbf{N}^*)^k$ telle que

$$\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n.$$

On note Γ_n l'ensemble des partitions de l'entier n.
Ainsi, $\Gamma_1 = \{(1)\}$, $\Gamma_2 = \{(2), (1, 1)\}$, $\Gamma_3 = \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}$.
Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice p et de rang r.

11. Montrer qu'il existe une partition $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de n et une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est égale à la matrice $N_\sigma = \mathrm{Diag}(J_{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k})$.
12. Soit α un entier naturel non nul. Calculer le rang de J_α^j pour tout entier naturel j. En déduire que J_α est nilpotente et préciser son indice de nilpotence.
13. En déduire la valeur de α_1.
14. Pour $j \in \mathbf{N}$, on note $\Lambda_j = \{i \in [\![1, k]\!] \mid \alpha_i \geqslant j\}$. Démontrer que $\mathrm{rg}\left(N_\sigma^j\right) = \sum_{i\in\Lambda_j} (\alpha_i - j)$.
15. Démontrer que, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, l'entier $d_j = \mathrm{rg}\left(u^{j-1}\right) - \mathrm{rg}\left(u^j\right)$ est égal au nombre de blocs J_{α_i} dont la taille α_i est supérieure ou égale à j.
16. Donner la valeur de l'entier k, nombre de blocs J_{α_i} intervenant dans N_σ.
17. Pour tout entier j compris entre 1 et n, exprimer le nombre de blocs J_{α_i} de taille exactement égale à j.
18. On suppose qu'il existe une partition σ' de l'entier n et une base $\mathscr{B}'$ de E telles que la matrice de u dans $\mathscr{B}'$ soit égale à $N_{\sigma'}$. Montrer que $\sigma = \sigma'$.
19. Soient A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Déterminer la partition σ de l'entier 5 associée à u et donner la matrice N_σ.
20. Prouver que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est nilpotente, alors sa classe de similitude ne contient que des matrices nilpotentes, et qu'elle contient ${}^tM$.

21. Prouver que les classes de similitude de matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ sont en nombre fini, et préciser leur nombre.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 17

PROBLÈME 1 : D'APRÈS MINES DE SUP 2002

Partie I. Endomorphismes nilpotents en dimension 3.

1.a. Soit $y \in \operatorname{Im} w$. Alors il existe $x \in \operatorname{Ker} u^{i+j}$ tel que $y = w(x) = u^j(x)$.
Et donc $u^i(y) = u^i(u^j(x)) = u^{i+j}(x) = 0$.
Donc $y \in \operatorname{Ker} u^i$, et donc on a bien l'inclusion annoncée : $\boxed{\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i.}$

1.b. Par le théorème du rang[1] appliqué à w

$$\dim \operatorname{Ker} u^{i+j} = \dim \operatorname{Im} w + \dim \operatorname{Ker} w.$$

Mais $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i$, de sorte que $\dim \operatorname{Im} w \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^i$.
Et par ailleurs, $\operatorname{Ker} w \subset \operatorname{Ker} u^j$, et donc $\dim \operatorname{Ker} w \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^j$.
Et donc il vient bien $\boxed{\dim \operatorname{Ker} u^{i+j} \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^i + \dim \operatorname{Ker} u^j.}$

[1] Nous sommes en dimension finie, donc son usage est légitime.

Détails
Si on le souhaite, on peut caractériser plus précisément le noyau de w, qui rappelons-le est la restriction de u^j à $\operatorname{Ker} u^{i+j}$: c'est

$$\operatorname{Ker} w = \operatorname{Ker} u^j \cap \operatorname{Ker} u^{i+j}.$$

En fait, mais c'est inutile ici, on a $\operatorname{Ker} u^j \subset \operatorname{Ker} u^{i+j}$, et donc $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Ker} u^j$.

2.a. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} u = \dim E - \operatorname{rg}(u) = 3 - 2 = 1$.
Et donc par la question 1.b appliquée avec $i = 1$ et $j = 2$, il vient

$$3 = \dim E = \dim \operatorname{Ker} u^3 \leqslant \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker} u^2.$$

Donc $\dim \operatorname{Ker} u^2 \geqslant 2$. Puisque $\operatorname{Ker} u^2 \subset E$, et que E est de dimension 3, on a donc $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 2$ ou $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 3$.
Si on avait $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 3$, il viendrait $u^2 = 0$. Et alors[2] $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
Mais $\dim \operatorname{Im} u = 2$, donc $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, ce qui vient contredire l'inclusion ci-dessus.
On en déduit donc que $\boxed{\dim \operatorname{Ker} u^2 = 2.}$

[2] Très grand classique, déjà rencontré plusieurs fois et à connaître :

$$v \circ u = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v.$$

2.b. Encore un grand classique : u^2 est non nul (car son noyau n'est pas E tout entier), donc il existe $x \in E$ tel que $u^2(x) \neq 0$.
Soient alors $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ des réels tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \lambda_2 u^2(x) = 0 \quad (\star)$.
En appliquant u^2 aux deux membres de cette égalité, il vient

$$\lambda_0 u^2(x) + \lambda_1 \underbrace{u^3(x)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{u^4(x)}_{=0} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 u^2(x) = 0.$$

Mais $u^2(x) \neq 0$, donc nécessairement, $\lambda_0 = 0$.
Donc dans la relation $(\star)$, il ne reste que $\lambda_1 u(x) + \lambda_2 u^2(x) = 0$.
Appliquons alors u, de sorte que $\lambda_1 u^2(x) = 0$. De même, on en déduit $\lambda_1 = 0$.
Il ne reste donc plus que $\lambda_2 u^2(x) = 0$, et donc $\lambda_2 = 0$.
Ainsi, la famille $(x, u(x), u^2(x))$ est libre. Et étant de cardinal $3 = \dim E$, $\boxed{\text{c'est une base de } E.}$

2.c. On a $u(u^2(x)) = 0$, $u(u(x)) = u^2(x)$ et $u(x) = u(x)$ (sic !), et donc la matrice de f dans la base $(u^2(x), u(x), x)$ est

$$\boxed{U = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(u^2(x)) & u(u(x)) & u(x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u^2(x) \\ u(x) \\ x \end{array}.}$$

On a alors $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc $V = U^2 - U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.a. Puisque $\operatorname{Im} u \neq \{0\}$, u n'est pas l'endomorphisme nul, et donc il existe $b \neq 0$ tel que $u(b) \neq 0$.

3.b. Par le théorème du rang, $\operatorname{Ker} u$ est de dimension 2.
Par ailleurs, $u(u(b)) = u^2(b) = 0$, donc $u(b) \in \operatorname{Ker} u$.
Ainsi, la famille formée du seul vecteur $u(b)$ est une famille libre[3] de $\operatorname{Ker} u$.
Par le théorème de la base incomplète, il est possible de la compléter en une base $(u(b), c)$ de $\operatorname{Ker} u$, qui est donc une famille libre.

[3] Car formée d'un seul vecteur **non nul**.

Soient alors λ, μ, ν des réels tels que $\lambda b + \mu u(b) + \nu c = 0$.
En appliquant u, il vient $\lambda u(b) + \mu \underbrace{u^2(b)}_{=0} + \nu \underbrace{u(c)}_{=0 \text{ car } c\in\operatorname{Ker} u} = 0$.
Donc $\lambda u(b) = 0$, et puisque $u(b) \neq 0$, $\lambda = 0$.
Il reste alors $\mu u(b) + \nu c = 0$, et $(u(b), c)$ étant une famille libre, $\mu = \nu = 0$.
Donc $(b, u(b), c)$ est une famille libre de E, et étant de cardinal $3 = \dim E$, $\boxed{\text{c'est une base de } E.}$

3.c. On a alors

$$\boxed{U' = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(b) & u(u(b)) & u(c) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b \\ u(b) \\ c \end{array} \end{array}.}$$

Et donc $V' = U'^2 - U' = -U'$.

Partie II : une matrice unipotente 3×3 est semblable à sa transposée.

4. La matrice T est inversible car diagonale à coefficients diagonaux non nuls. Donc $A = PTP^{-1}$ est inversible car produit de matrices inversibles.

5. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = 0$.
Pour prouver la relation demandée, il suffit[4] de prouver que $A^{-1} = P(I_3 - N + N^2)P^{-1}$. Mais

$$\begin{aligned} AP(I_3 - N + N^2)P^{-1} &= AI_3 - APNP^{-1} + APN^2P^{-1} \\ &= A - P(I_3 + N)NP^{-1} + P(I_3 + N)N^2P^{-1} \\ &= A - PNP^{-1} - PN^2P^{-1} + PN^2P^{-1} + P\underbrace{N^3}_{=0}P^{-1} \\ &= PTP^{-1} - PNP^{-1} = P(T - N)P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3. \end{aligned}$$

Donc on a bien $A^{-1} = P(I_3 - N + N^2)P^{-1}$, et donc la relation annoncée.

[4] Après multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1}.

Détails
Puisque

$$P^{-1}AP = I_3 + N$$

par multiplication à gauche par P,

$$AP = P(I_3 + N).$$

6. Si $N = 0$, $T = I_3$, et donc la seule matrice semblable à T est I_3.
Ainsi, $A = I_3$, et donc $\boxed{A^{-1} = I_3 \text{ est semblable à } A.}$

7.a. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et soit u l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est N.
Alors $u^3 = 0$, et $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(N) = 2$. Donc par la question 2.b, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Mais alors U et N sont semblables[5], puisqu'elles représentent le même endomorphisme de E dans deux bases.
Et alors la matrice V de la question 2, qui représente $u^2 - u$ est semblable à M, qui représente aussi $u^2 - u$, mais cette fois dans la base $\mathscr{B}$.

[5] C'est une conséquence de la formule de changement de base.

7.b. Puisque N^2 et N commutent, par la formule du binôme,

$$M^3 = (N^2 - N)^3 = N^6 - 3N^5 + 3N^4 - N^3 = 0.$$

Par ailleurs V est de rang 2, et deux matrices semblables sont de même rang, donc $\boxed{\operatorname{rg}(M) = 2.}$

7.c. Par le même raisonnement qu'à la question précédente, M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc par transitivité de la relation de similitude, $\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables.}}$

7.d. Par la question 5, A^{-1} est semblable à $I^3 - N + N^2 = I_3 + M$.
Mais A est semblable à $I_3 + N$.
Considérons alors une matrice Q telle que $M = Q^{-1}NQ$. Alors

$$I_3 + M = I_3 + Q^{-1}NQ = Q^{-1}I_3Q + Q^{-1}NQ = Q^{-1}(I_3 + N)Q.$$

Donc $I_3 + M$ et $I_3 + N$ sont semblables, et par conséquent, $\boxed{A \text{ et } A^{-1} \text{ aussi.}}$

Remarque
Une telle matrice existe puisque nous venons de prouver que N et M sont semblables.

8. Sur le même principe qu'à la question 7, mais en utilisant cette fois la question 3, on prouve que N est semblable à $U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Et alors M est semblable à $V' = -U'$, qui est encore nilpotente de rang 1, et donc elle-même semblable à U'.
Et donc comme précédemment, on prouve que A, semblable à $I_3 + N$ et A^{-1} semblable à $I_3 + M$ sont semblables.

Similitude
Nous ne sommes sûrement pas en train de dire que deux matrices de même rang sont toujours semblables.
En revanche, ce qu'a prouvé la partie I, c'est que deux matrices **nilpotentes de taille** 3 de même rang sont semblables.

9. Exemple

9.a. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, qui est clairement de rang 1 car toutes ses colonnes sont proportionnelles.
Donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) = 3 - 1 = 2$.
Or, la première colonne de $A - I_3$ étant nulle, on a[6] $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I_3)$.

Et puisque les colonnes sont liées par la relation $0C_1 + 1C_2 - 1C_3 = 0$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I_3)$.

Puisque ce vecteur n'est pas colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est libre, et donc est une base de $\operatorname{Ker}(A - I_3)$.
Remarque *: si on ne pense pas à chercher des relations sur les colonnes de $A - I_3$, il «suffit» de résoudre le système $(A - I_3)X = 0$, on trouve bien évidemment le même résultat.*

[6] Le produit d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de M.

N'oublions pas de répondre à la question posée : il est demandé une base de $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$, pas une base de $\operatorname{Ker}(A - I_3)$.
Autrement dit, il faut «retraduire» les vecteurs colonnes obtenus en vecteurs de E, en se rappelant que les vecteurs colonnes sont les coordonnées dans la base (a, b, c) de vecteurs de E. Donc $\boxed{\text{une base de } \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \text{ est } (a, b - c).}$

9.b. La matrice de la famille (e_1, e_2, c) dans la base (a, b, c) est $P = \begin{array}{cc} \begin{matrix} e_1 & e_2 & c \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \end{array}$ qui est inversible car triangulaire à diagonale non nulle.
Et donc $\boxed{(e_1, e_2, c) \text{ est une base de } E.}$
Pour obtenir la matrice de u dans cette base, une option serait de faire appel à la formule de changement de base, en notant que P est la matrice de passage de (a, b, c) à (e_1, e_2, c).
Mais comme nous savons que $e_1 \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$, alors $(u - \mathrm{id}_E)(e_1) = 0 \Leftrightarrow u(e_1) = e_1$, et de même $u(e_2) = e_2$.

Rappel
Une famille de $\dim E$ vecteurs de E est une base de E si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base est inversible.

Reste donc seulement à calculer $u(c)$. Mais $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $u(c) = -b + c = -e_2 + c$.

Et donc la matrice de u dans la base (e_1, e_2, c) est $T = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(c) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array}$

9.c. On a bien A qui est semblable à une matrice T de la forme indiquée au début de la partie II.
Ici, on a $T = I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1.
Donc le résultat de la question 8 s'applique, $\boxed{A \text{ est semblable à } A^{-1}.}$

10. La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ a pour inverse $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Ces deux matrices sont semblables car si D est la matrice de f dans une base (e_1, e_2, e_3), alors D^{-1} est la matrice du même f dans la base (e_1, e_3, e_2).
Pourtant, D n'est pas semblable à une matrice de la forme T car sa trace vaut $3 + \frac{1}{2}$, alors que la trace de toutes les matrices T de la forme précitée est égale à 3.

Problème 2 (d'après Centrale PSI 2019)

Partie I. Étude d'un cas particulier

1. Puisque $u^2 = u \circ u = 0$, on a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
On a donc $\dim \operatorname{Ker} u \geqslant \dim \operatorname{Im} u = r$. Mais par le théorème du rang, $n = r + \dim \operatorname{Ker} u$, et donc $\boxed{n \geqslant 2r.}$

> **Rappel**
> Un grand classique : $g \circ f = 0$ si et seulement si
> $$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g.$$

2. Notons dès à présent que l'hypothèse que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ implique que $n = \dim E = 2r$.
Soit $(x_1, \dots, x_r)$ une base de $\operatorname{Ker} u$. Alors pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, x_i étant dans $\operatorname{Im} u$, il existe $e_i \in E$ tel que $x_i = u(e_i)$.
Prouvons qu'alors la famille $(e_1, u(e_1), \dots, e_r, u(e_r))$ est libre.
Soient donc $(\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_r, \mu_r) \in \mathbf{C}^{2r}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \mu_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_r u(e_r) = 0_E.$$

Alors en appliquant u aux deux membres de l'égalité, il vient

$$\lambda_1 \underbrace{u(e_1)}_{=x_1} + \mu_1 \underbrace{u^2(e_1)}_{=0_E} + \cdots + \lambda_r \underbrace{u(e_r)}_{=x_r} + \mu_r \underbrace{u^2(e_r)}_{=0_E} = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r = 0_E.$$

Mais $(x_1, \dots, x_r)$ est une base de $\operatorname{Ker} u$, et donc en particulier est libre, de sorte que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.
Ne reste alors que $\mu_1 u(e_1) + \cdots + \mu_r u(e_r) = 0_E$, et pour les mêmes raisons, $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 0$.
Donc la famille $(e_1, u(e_1), \dots, e_r, u(e_r))$ est libre, et étant de cardinal $2r = n$, c'est une base de E.

3. La matrice de u dans cette base est donnée par

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} u(e_1) & u(u(e_1)) & \dots & \dots & u(e_r) & u(u(e_r)) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ u(e_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ e_r \\ u(e_r) \end{array} \end{array} = \operatorname{Diag}(\underbrace{J_2, J_2, \dots, J_2}_{r \text{ fois}}).$$

4. Cette fois, on doit se contenter d'affirmer $\dim \operatorname{Ker} u = n - r$.
Considérons $(x_1, \dots, x_r)$ une base de $\operatorname{Im} u$. Alors elle peut être complétée[7] en une base $(x_1, \dots, x_r, v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ de $\operatorname{Ker} u$.
Et alors comme à la question 2, pour $i \in [\![1, r]\!]$, notons e_i un antécédent de x_i par u.
Soient alors $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-2r}$ des complexes tels que

$$\alpha_1 e_1 + \beta_1 u(e_1) + \cdots + \alpha_r e_r + \beta_r u(e_r) + \gamma_1 v_1 + \dots \gamma_{n-2r} v_{n-2r} = 0_E.$$

En appliquant u, il vient[8] donc $\alpha_1 u(e_1) + \cdots + \alpha_r u(e_r) = 0_E$.
Donc comme précédemment, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.
Et alors $\beta_1 \underbrace{u(e_1)}_{=x_1} + \cdots + \beta_r \underbrace{u(e_r)}_{=x_r} + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_{n-2r} v_{n-2r} = 0_E$.
On conclut alors par liberté de $(x_1, \dots, x_r, v_1, \dots, v_{n-2r})$, que $(e_1, u(e_1), \dots, v_{n-2r})$ est libre, et étant de cardinal $2r + n - 2r = n$, $\boxed{\text{c'est une base de } E.}$

[7] C'est le théorème de la base incomplète.

[8] Rappelons que les v_i sont dans $\operatorname{Ker} u$.

5. Le principe est le même qu'à la question 3, mais les $n - 2r$ derniers vecteurs de la base sont dans $\operatorname{Ker} u$, donc la matrice de u dans cette base est $\operatorname{Diag}(\underbrace{J_2, \dots, J_2}_{r \text{ fois}}, 0_{n-2r})$.

Partie II. Réduction des matrices nilpotentes

6. C'est un fait général, qui ne nécessite pas la nilpotence : si $x \in \operatorname{Im} u$, alors $u(x) \in \operatorname{Im} u$, donc $\boxed{\operatorname{Im} u \text{ est stable par } u.}$

Il est donc légitime de parler de la restriction de u à $\operatorname{Im} u$, qui est bien un endomorphisme de $\operatorname{Im} u$.

Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, et donc $u^{p-1}(y) = u^p(x) = 0_E$, donc non seulement $u_{|\operatorname{Im} u}$ est nilpotent, mais en plus son indice de nilpotence est inférieur ou égal à $p-1$.

Par ailleurs, u étant d'indice de nilpotence p, il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Et donc $u(x)$ est un élément de $\operatorname{Im} u$, pour lequel $u^{p-2}(u(x)) = 0_E$.

Par conséquent, l'indice de nilpotence de $u_{|\operatorname{Im} u}$ est supérieur ou égal à $p-1$. Et donc $\boxed{\text{est égal à } p-1.}$

7. Notons tout de suite que u étant nilpotent d'indice p, $C_u(x) = \operatorname{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$, et donc est de dimension inférieure ou égale à p.

La stabilité est assez évidente : si $y = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x)$, alors $u(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{k+1}(x) \in C_u(x)$.

Donc $\boxed{C_u(x) \text{ est stable par } u.}$

Et puisque $\{k \in \mathbf{N}^* \mid u^k(x) = 0_E\}$ est une partie non vide[9] de $\mathbf{N}^*$, elle contient donc un plus petit élément $s(x) \in [\![1, p]\!]$.

[9] Elle contient p.

8. C'est très classique : soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{s(x)-1}$ des complexes tels que $\sum_{i=0}^{s(x)-1} \lambda_i u^i(x) = 0_E$.

Alors en appliquant $u^{s(x)-1}$, il vient

$$\sum_{i=0}^{s(x)-1} \lambda_i u^{s(x)-1+i}(x) = u^{s(x)-1}(0_E) = 0_E \Leftrightarrow \lambda_0 u^{s(x)-1}(x) = 0_E.$$

Remarque
Pour $k \geqslant s(x)$,
$u^k(x) = u^{k-s(x)}(u^{s(x)}(x)) = 0_E$.

Mais $u^{s(x)-1}(x) \neq 0_E$, donc $\lambda_0 = 0$.

Ne reste donc que $\sum_{i=1}^{s(x)-1} \lambda_i u^i(x) = 0_E$.

En appliquant $u^{s(x)-2}$, il vient $\lambda_1 u^{s(x)-1}(x) = 0_E$, donc $\lambda_1 = 0$.

De proche en proche, on prouve donc que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{s(x)-1} = 0$, et donc la famille $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est libre.

Étant évidemment[10] génératrice de $C_x(u)$, $\boxed{\text{c'est une base de } C_x(u).}$

[10] Voir la question précédente.

Dans cette base, la matrice de $u_{|C_x(u)}$ est

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} u(x) & u(u(x)) & u(u^2(x)) & \dots & u(u^{s(x)-2}(x)) & u(u^{s(x)-1}(x)) \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c} x \\ u(x) \\ u^2(x) \\ \vdots \\ u^{s(x)-2}(x) \\ u^{s(x)-1}(x) \end{array}
\end{array} = \boxed{J_{s(x)}.}$$

9. Comme indiqué, prouvons le résultat par récurrence sur $p \geqslant 2$.

L'hypothèse de récurrence étant $\mathscr{P}(p)$: «pour tout endomorphisme u un espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$, nilpotent d'indice p, il existe $t \in \mathbf{N}^*$ et $x_1, \dots, x_t$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$».

▸ **Initialisation** : la partie I prouve le résultat si $n \geqslant 3$, où $t = n - r$ et où les x_i sont $e_1, \dots, e_r$ et (le cas échéant) $v_1, \dots, v_{n-2r}$.

Bizarrement, cette partie ne disait rien du cas $n = 2$, mais dans ce cas, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ et la question 2 s'applique encore.

Et $p = 1$?
Un endomorphisme d'indice de nilpotence 1 ne peut être que l'endomorphisme nul...

$n \geqslant 2$?
Un endomorphisme d'un espace de dimension 1 est soit bijectif (et donc non nilpotent) soit nul.

▸ **Hérédité** : supposons à présent $\mathscr{P}(p-1)$ vérifiée, et soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, nilpotent d'indice p.
Par la question 6, $v = u_{|\operatorname{Im} u}$ est nilpotent d'indice $p-1$.

Donc par hypothèse de récurrence, il existe $y_1, \dots, y_t$ tels que $\operatorname{Im} u = \bigoplus_{i=1}^{t} C_v(y_i)$.

Notons alors que $C_v(y_i) = C_u(y_i)$, puisque u et v coïncident[11] sur $\operatorname{Im} u$.
Puisque $y_i \in \operatorname{Im} u$, il possède au moins un antécédent x_i, et on a clairement $s(x_i) = s(y_i)+1$ car $u^{s(y_i)}(x_i) = u^{s(y_i)-1}(y_i) \neq 0_E$ et $u^{s(y_i)+1}(x_i) = u^{s(y_i)}(y_i) = 0_E$.
Donc $C_u(x_i)$ a pour base $(x_i, u(x_i), \dots, u^{s(y_i)})(x_i)$.

[11] Par définition.

Remarquons que $r = \operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \sum_{i=1}^{t} \dim C_u(y_i) = \sum_{i=1}^{t} s(y_i)$.
Par ailleurs, les $u^{s(x_i)-1}(x_i)$ sont tous dans $\operatorname{Ker} u$, et forment une famille libre puisque les $C_u(y_i)$ sont en somme directe.
Par le théorème de la base incomplète, il est alors possible de compléter cette famille à l'aide de vecteurs $z_1, \dots, z_{n-r-t}$ de $\operatorname{Ker} u$ afin d'obtenir une base de $\operatorname{Ker} u$.
Il est alors évident que $C_u(z_j) = \operatorname{Vect}(z_j)$, et ce pour tout $j \in [\![1, n-r-t]\!]$.

Autrement dit
$s(z_j) = 1$.

Prouvons alors que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-r-t} C_u(z_j)$.
Il suffit de prouver que la famille $(x_1, u(x_1), \dots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, x_t, \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t), z_1, z_2, \dots, z_{n-r-t})$, obtenue par concaténation de bases, est une base de E.
Déjà, elle est de cardinal

$$\sum_{i=1}^{t} s(x_i) + n - r - t = \sum_{i=1}^{t} (s(y_i)+1) + n - r - t = \sum_{i=1}^{t} s(y_i) + n - r = n = \dim E.$$

Soient donc des complexes $\lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{1,s(x_1)-1}, \dots, \lambda_{t,0}, \dots, \lambda_{t,s(x_t)-1}, \mu_1, \dots, \mu_{n-r-t}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{k=0}^{s(x_i)-1} \lambda_{i,k} u^k(x_i) + \sum_{j=1}^{n-r-t} \mu_j z_j = 0_E. \qquad (\star)$$

En appliquant u à cette relation, il reste[12]

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{k=0}^{s(x_i)-1} \lambda_{i,k} u^{k+1}(x_i) = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=0}^{s(y_i)-1} \lambda_{i,k+1} u^k(y_i) = 0_E.$$

[12] Rappelons que les z_j sont dans $\operatorname{Ker} u$.

Détails
Par définition de x_i,
$$u^{k+1}(x_i) = u^k(y_i).$$

Mais la famille $(y_1, \dots, u^{s(y_1)-1}(y_1), \dots, y_t, \dots, u^{s(y_t)-1}(y_t))$, est obtenue par concaténation de bases des $C_u(y_i)$, donc est une base de $\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(y_i) = \operatorname{Im} u$, et en particulier est libre.
Donc les $\lambda_{i,k}$, $1 \leqslant k \leqslant s(x_i)-1$ sont tous nuls.
Dans la relation $(\star)$ ne reste plus que

$$\lambda_{1,0} x_1 + \dots + \lambda_{t,0} x_t + \mu_1 z_1 + \dots + \mu_{n-r-t} z_{n-r-t} = 0_E.$$

Et alors, la famille $(x_1, \dots, x_t, z_1, \dots, z_{n-r-t})$ étant une base de $\operatorname{Ker} u$, elle est libre, et donc $\lambda_{1,0} = \dots = \lambda_{t,0} = \mu_1 = \dots = \mu_{n-r-t} = 0$.
Ceci achève donc de prouver que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-r-t} C_u(z_j)$.
Et donc $\mathscr{P}(p)$ est vraie, donc par principe de récurrence, pour tout endomorphisme nilpotent u d'un espace E de dimension finie, il existe $x_1, \dots, x_t \in E$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

10. La question est ambiguë[13] et laisse entendre que la matrice serait la même dans toute base adaptée, ce qui n'est pas vrai.
En revanche, à la question 8 nous avons décrit des bases privilégiées des $C_u(x_i)$, et c'est par concaténation de ces bases que nous allons obtenir une base adaptée à la somme directe dans laquelle la matrice de u sera facile à décrire.

[13] Et elle était ainsi formulée dans le sujet de Centrale.

Pour cela, établissons un fait général sur la matrice d'une application linéaire dans une base adaptée à une somme directe de sous-espaces **stables.**
Pour simplifier les notations, supposons que $E = F_1 \oplus F_2$, où F_1 et F_2 sont deux sous-espaces stables par u.
Notons alors $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F_1 et $(f_1, \dots, f_m)$ une base de F_2, de sorte que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_m)$ est une base de E adaptée à la somme directe $E = F_1 \oplus F_2$.
Puisque F_1 est stable par u, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $u(e_j) \in F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
Et de même, pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, $u(f_j) \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_m)$.
Pour le dire autrement, il existe des scalaires $a_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant p$ tels que

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i + 0 \cdot f_1 + \cdots + 0 \cdot f_m.$$

Et de même, il existe des scalaires $b_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant m$ tels que

$$\forall j \in [\![1,m]\!],\ u(f_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{i,j} f_i = 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_p + \sum_{i=1}^{m} b_{i,j} f_i.$$

Donc la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(e_1) & \dots & u(e_p) & u(f_1) & \dots & u(f_m) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{m,1} & \dots & b_{m,m} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{array} = \begin{pmatrix} (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p} & 0_{p,m} \\ 0_{m,p} & (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m} \end{pmatrix}.$$

Et puisque $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i$, la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbf{C})$ n'est rien d'autre que la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_p)$ de la restriction de u à F_1.
Et de même, $(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ est la matrice dans la base $(f_1, \dots, f_m)$ de la restriction de u à F_2.
Sur le même principe[14], on prouve que si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ est somme directe de sous-espaces **stables par** u, alors la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation de bases $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ des F_i est diagonale par blocs :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u_{|F_1}), \dots, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p}(u_{|F_p})\right).$$

Enfin, dans le cas qui nous intéresse, nous savons que dans **une bonne base**, à savoir $(x_i, u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i))$, la matrice de $u_{|C_u(x_i)}$ est $J_{s(x_i)}$.
Et donc dans la base $(x_1, u(x_1), \dots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, x_t, u(x_t), \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t))$, la matrice de u est la $\boxed{\text{matrice diagonale par blocs } \mathrm{Diag}\left(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_t)}\right).}$

[14] Mais c'est en fait assez désagréable à écrire proprement, et pas plus convaincant que si l'on a compris le cas où $p = 2$.

Remarque
Ce résultat figure (plus ou moins explicitement) au programme de seconde année, et donc la réponse attendue dans le sujet d'origine était bien plus concise.

Partie III. Partitions d'entiers

11. Il s'agit de reprendre la décomposition obtenue précédemment $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.
Quitte à renuméroter les x_i, on peut supposer $\dim C_u(x_i) \geqslant \dim C_u(x_{i+1})$ (autrement dit, que $s(x_i) \geqslant s(x_{i+1})$).
Posons alors $k = t$, $\alpha_i = s(x_i) = \dim C_u(x_i)$ et $\mathscr{B}$ la base $(x_1, u(x_1), \dots, u^{\alpha_1 - 1}(x_1), \dots, x_k, \dots, u^{\alpha_k - 1}(x_k))$.
Alors $\sigma = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ est bien une partition de n car

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \sum_{i=1}^{k} \dim C_u(x_i) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} C_u(x_i)\right) = \dim E = n,$$

et par la question 10, la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est $\mathrm{Diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k})$.

12. On peut répondre de plusieurs manières à cette question. La première est purement matricielle, et consiste à calculer les premières puissances de J_α, pour constater que la

«sous-diagonale» de 1 descend à chaque fois d'un «cran» sous la diagonale. Elle est alors toujours échelonnée, avec à chaque fois un 1 de moins, donc on prouve ainsi que J_α^j est de rang $\alpha - j$.
Si tout ceci est correct, ce n'est pas facile à écrire proprement et pas forcément complètement convaincant[15].

[15] Même si personnellement ça me convainc.

Une autre méthode consiste à passer par des endomorphismes : notons $(e_1, \dots, e_\alpha)$ la base canonique de $\mathbf{C}^\alpha$, et soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^\alpha)$ dont la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_\alpha)$ est J_α.
On a alors $f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant \alpha - 1 \\ 0 & \text{si } i = \alpha \end{cases}$.
On prouve alors facilement, par récurrence sur j, que pour tout $j \leqslant \alpha - 1$,

$$f^j(e_i) = \begin{cases} e_{i+j} & \text{si } i + j \leqslant \alpha \Leftrightarrow i \leqslant \alpha - j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En particulier, on a $f^\alpha = 0$, et donc pour $j \geqslant \alpha$, $J_\alpha^j = 0$, et donc $\operatorname{rg}(J_\alpha^j) = 0$.
Pour $1 \leqslant j \leqslant \alpha - 1$ on a

$$\operatorname{rg} J_\alpha^j = \operatorname{rg} f^j = \dim \operatorname{Im} f^j = \dim \operatorname{Vect}\left(f^j(e_1), \dots, f^j(e_\alpha)\right) = \dim \operatorname{Vect}(e_{j+1}, \dots, e_\alpha, 0_E, \dots, 0_E) = \alpha - j.$$

En particulier, $\boxed{J_\alpha \text{ est nilpotente d'indice de nilpotence } \alpha}$ puisque $J_\alpha^{\alpha-1}$ est non nulle[16] et $J_\alpha^\alpha = 0$.

[16] Car de rang 1.

13. Notons que N_σ représentant u dans une certaine base, elle est nilpotente, de même indice de nilpotence que u, à savoir p.
Or, pour tout $j \in \mathbf{N}$, par produit par blocs, $N_\sigma^j = \operatorname{Diag}\left(J_{\alpha_1}^j, \dots, J_{\alpha_k}^j\right)$.
Ainsi, $N_\sigma^{p-1} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Diag}\left(J_{\alpha_1}^{p-1}, \dots, J_{\alpha_k}^{p-1}\right) \neq 0$.
On ne peut pas avoir $p - 1 \geqslant \alpha_1$, faute de quoi $p - 1$ serait supérieur à tous les α_i, et donc, par la question précédente, tous les $J_{\alpha_i}^{p-1}$ seraient nuls. Donc $p - 1 < \alpha_1 \Leftrightarrow p \leqslant \alpha_1$.
Par ailleurs, $N_\sigma^p = 0$ et donc $J_{\alpha_1}^p = 0$, de sorte que $p \geqslant \alpha_1$.
Et donc $\boxed{\alpha_1 = p, \text{ l'indice de nilpotence de } u.}$

14. La formule proposée n'aura vraiment d'intérêt que pour $j \in [\![0, \alpha_1]\!]$, puisque pour $j > \alpha_1$, $N_\sigma^j = 0$ et $\Gamma_j = \emptyset$. On a donc

$$\operatorname{rg}\left(N_\sigma^j\right) = \operatorname{rg} \operatorname{Diag}\left(J_{\alpha_1}^j, \dots, J_{\alpha_k}^j\right) = \sum_{i=1}^k \operatorname{rg} J_{\alpha_i}^j = \sum_{i \in \Lambda_j} \operatorname{rg} J_{\alpha_i}^j = \boxed{\sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j).}$$

Rang
On a en fait ici utilisé un résultat non prouvé : le rang d'une matrice diagonale par blocs est la somme des rangs des blocs.
Essayez de vous en convaincre (et venez me voir si vous n'y arrivez pas) !

15. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} d_j &= \operatorname{rg}\left(N_\sigma^{j-1}\right) - \operatorname{rg}\left(N_\sigma^j\right) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_{j-1}} (\alpha_i - (j-1)) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - (j-1)) + \sum_{i \mid \alpha_i = j-1} \underbrace{(\alpha_i - (j-1))}_{=0} - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j) \\ &= \sum_{i \in \Lambda_j} 1 = \operatorname{Card}(\Lambda_j). \end{aligned}$$

Détails
On a scindé la somme en deux : dans Λ_{j-1} il y a les éléments de Λ_j et ceux tels que $\alpha_i = j - 1$.

Et par définition, $\operatorname{Card}(\Lambda_j)$ est bien le nombre de blocs J_{α_i} dont la taille est supérieure ou égale à j.

16. Le nombre k de blocs est donc

$$d_1 = \operatorname{rg}(u^0) - \operatorname{rg}(u^1) = \operatorname{rg}(\operatorname{id}_E) - \operatorname{rg}(u) = \dim E - \operatorname{rg}(u) = \boxed{\dim \operatorname{Ker} u.}$$

Intuition
Ce résultat n'est en fait pas surprenant si l'on se dit que chaque bloc contribue pour 1 à la dimension du noyau, au sens où le noyau de chaque J_α est une droite.

17. Le nombre de blocs de taille exactement j est donc

$$d_j - d_{j+1} = \boxed{\operatorname{rg}(u^{j-1}) + \operatorname{rg}(u^{j+1}) - 2\operatorname{rg}(u^j).}$$

18. Notons $\sigma' = (\beta_1, \dots, \beta_\ell)$.
Alors par la question la question 16, $\ell = \dim \operatorname{Ker} u = k$.
Par ailleurs, par la question 13, $\alpha_1 = p = \beta_1$.
Et plus généralement, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, le nombre de termes égaux à j dans σ' est d_j, qui est donc égal au nombre de termes égaux à j dans σ, donc $\boxed{\sigma = \sigma'.}$

19. Puisque les colonnes 3 et 4 de A sont proportionnelles, que la première est nulle et que la seconde n'est pas combinaison linéaire des colonnes 3 et 5, $\operatorname{rg} A = 3$.
Donc σ comporte $5 - 3 = 2$ éléments, et est donc soit égale à $(3, 2)$, soit à $(4, 1)$.

Par ailleurs, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Donc l'indice de nilpotence p de A vaut 3, et donc $\alpha_1 = 3$.
Donc $\sigma = (3, 2)$, de sorte que

$$\boxed{N_\sigma = \operatorname{Diag}(J_3, J_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

20. Soit M nilpotente, et soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ semblable à M.
Alors il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $N = P^{-1}MP$.
En notant p l'indice de nilpotence de M, on a donc

$$N^p = (P^{-1}MP)^p = \underbrace{P^{-1}MPP^{-1}MP \cdots P^{-1}MP}_{p \text{ fois}} = P^{-1}MI_nMI_n \cdots I_nMP = P^{-1}M^pP = 0.$$

Donc $\boxed{N \text{ est nilpotente.}}$

> **Remarque**
> Sur le même principe, on prouverait que $N^{p-1} \neq 0$ et donc que N est nilpotente d'indice p.
> Ce n'est pas une surprise : si N et M représentent le même endomorphisme nilpotent u dans deux bases, leur indice de nilpotence est celui de u.

Notons u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à M et soit v l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à ${}^tM$.
Notons alors σ_u et σ_v les partitions de n associées.
Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\operatorname{rg}(u^j) = \operatorname{rg}\left(M^j\right) = \operatorname{rg}\left({}^tM^j\right) = \operatorname{rg}\left(\left({}^tM\right)^j\right) = \operatorname{rg}(v^j).$$

> **Rang**
> Rappelons qu'une matrice a même rang que sa transposée.

Et donc le même raisonnement qu'à la question 18 prouve que $\sigma_u = \sigma_v$.
Mais M est semblable à N_{σ_u} et ${}^tM$ est semblable à $N_{\sigma_v} = N_{\sigma_u}$.
Et donc M et ${}^tM$ sont semblables, ce qui signifie bien que la classe de similitude de M contient ${}^tM$.

21. Toute matrice nilpotente est semblable à une matrice N_σ, avec $\sigma \in \Gamma_n$. Puisque Γ_n est évidemment fini, les classes de similitude de matrices nilpotentes sont en nombre fini, et leur nombre est borné par $\operatorname{Card}(\Gamma_n)$.
De plus, la question 18 prouve que pour deux éléments σ, σ' de Γ_n, N_σ et $N_{\sigma'}$ sont dans la même classe de similitude si et seulement si $\sigma = \sigma'$.
Donc il y a au moins autant de classes de similitude de matrices nilpotentes qu'il y a de partitions de n.
Et donc le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes vaut exactement $\operatorname{Card}(\Gamma_n)$.