Devoir maison 2

Exercice 1 : étude de fonction

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie par

$$f(x) = \left(\sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)}\right)^{\frac{1}{\ln|2\cos(x)|}}.$$

Partie I. Début de l'étude de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f. Justifier alors qu'il suffit de l'étudier sur $\mathscr{D}_f \cap [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$.

Partie II. Étude de fonctions auxiliaires

4. Dresser le tableau de variations complet, avec limites et extrema de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g : t \mapsto t\ln(t)$. *On justifiera soigneusement les limites, et on pourra à cet effet utiliser la valeur rencontrée en terminale de* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.
5. Soit $h : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\ln(4-t)}{\ln t} \end{array} \right.$.
   a. Justifier que h est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer sa dérivée.
   b. À l'aide de la question 4, prouver que h est strictement décroissante sur $]0, 1[$.
   c. En déduire le sens de variation, sur $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $k : x \mapsto h(4\cos^2(x))$.

Partie III. Retour à f

6. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{1-\sin(2x)} = |\cos x - \sin x|$. *Indication : on pourra utiliser une formule bien connue pour* $\sin(a+b)$.
7. Pour $x \in \mathscr{D}_f \cap [0, \frac{\pi}{2}]$, donner une expression simple de $f(x)$. *On distinguera plusieurs cas, et on fera, lorsque c'est possible, intervenir la fonction k de la question 5.*
8. Déterminer les variations de f, et tracer a courbe représentative sur $\mathscr{D}_f \cap [-\pi, \pi]$.

*Vous traiterez **au choix** l'un des deux exercice suivants.*
L'exercice 2 est plus classique mais un peu plus calculatoire.
L'exercice 3 est plus théorique, et probablement un peu plus difficile.

Exercice 2 : fonction argument sécante hyperbolique

Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I à préciser.
   On note alors $f^{-1} : I \to [0, +\infty[$ la bijection réciproque de f.
2. Déterminer $\mathrm{ch}(f^{-1}(x))$ et $\mathrm{sh}(f^{-1}(x))$ en fonction de x.
3. Prouver que f^{-1} est dérivable sur $I \setminus \{1\}$ (I privé de 1) et pour $x \in I \setminus \{1\}$ exprimer $(f^{-1})'(x)$ en fonction de x.
4. Prouver que pour tout $x \in I$, $2f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}\right) = f^{-1}(x)$.

   On pourra à cet effet dériver la fonction $x \mapsto 2f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}\right)$ *là où c'est possible.*

5. Pour $y \in I$ fixé, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \geqslant 0$. En déduire la valeur de $f^{-1}(y)$ et retrouver le résultat de la question 3.
6. Retrouver alors la formule de la question 4.

Exercice 3 : Une fonction définie implicitement

Pour $t > 0$, on note P_t la fonction polynomiale définie sur $\mathbf{R}$ par $P_t(x) = x^5 + tx - 1$.

1. Pour $t > 0$ fixé, prouver que l'équation $P_t(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ possède une unique solution, que l'on notera $f(t)$.

On définit ainsi une fonction $f : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array} \right.$. *Le but de l'exercice est d'étudier cette fonction.*

2. Prouver que pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $f(t) \in]0,1[$.
3. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

On admet alors (c'est le théorème de la limite monotone) que les deux questions précédentes impliquent que f possède des limites finies en 0 et en $+\infty$.

4. **Étude de f au voisinage de $+\infty$**
   a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   b. Prouver alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 1$.
5. **Étude de f au voisinage de 0**
   a. Prouver que $\lim\limits_{t\to0^+} f(t) = 1$. *On note alors $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de f en 0, qui est donc une fonction définie sur* $[0,+\infty[$.
   b. Pour $n \in \mathbf{N}$, déterminer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$. Puis, en notant que $1 - f(t)^5 = 1 - (1 + (f(t) - 1))^5$, en déduire la valeur de $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{f(t) - 1}{1 - f(t)^5}$.
   c. Prouver alors que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0, avec $\widetilde{f}'(0) = -\frac{1}{5}$.
6. Montrer que f est la bijection réciproque de $g : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1-x^5}{x} \end{array} \right.$.
7. Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $t > 0$, exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$.
8. En déduire alors que $\widetilde{f}'$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 2

EXERCICE 1 : UNE ÉTUDE DE FONCTION

Partie I. Début de l'étude de f.

1. Puisque les fonctions $x \mapsto 1+\sin(2x)$ et $x \mapsto 1-\sin(2x)$ sont positives sur $\mathbf{R}$, le réel $f(x)$ est bien défini si et seulement si $|2\cos x| \neq 0$ et $\ln|2\cos x| \neq 1$.
La première condition est équivalente à $\cos x \neq 0$, ce qui est le cas si et seulement si x n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
La seconde est équivalente à $2|\cos x| \neq 1 \Leftrightarrow \cos x \neq \pm\frac{1}{2}$. Ce qui est le cas si et seulement si x n'est pas de la forme $\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ni de la forme $\frac{2\pi}{3}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Autrement dit, $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbf{R} \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}\right).}$

> **Remarque**
> Les racines ne sont pas un vrai problème puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1$, et donc $1 \pm \sin(2x) \geqslant 0$.

2. Commençons par noter que $\mathscr{D}_f$ est bien symétrique, donc les notions de parité/imparité ont bien un sens.
Rappelons que sin est impaire et cos est paire, de sorte que pour $x \in \mathscr{D}_f$,
$$f(-x) = \left(\sqrt{1-\sin(-2x)}+\sqrt{1+\sin(-2x)}\right)^{\frac{1}{\ln|2\cos(-x)|}} = \left(\sqrt{1+\sin(2x)}+\sqrt{1-\sin(2x)}\right)^{\frac{1}{\ln|2\cos(x)|}} = f(x).$$
Donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

Puisque sin et cos sont 2π-périodique, f l'est aussi.
Mieux : $\sin(2(x+\pi)) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x)$ et $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, de sorte que $|2\cos(x+\pi)| = |2\cos x|$.
Et donc $f(x+\pi) = f(x)$: $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique.}}$
Par π-périodicité de f, il suffit de l'étudier sur $\mathscr{D}_f \cap [-\pi, \pi]$ (puis d'effectuer des translations de vecteur $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbf{Z}$), et par parité, on peut pour cela se limiter à une étude sur $\mathscr{D}_f \cap \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (puis effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

3. Revenons à la définition d'une puissance non entière : pour $x \in \mathscr{D}_f$,
$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln|2\cos x|}\left(\sqrt{1-\sin(2x)}+\sqrt{1+\sin(2x)}\right)\right).$$
Lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, on a $\sin(2x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1$, et donc $\sqrt{1+\sin(2x)}+\sqrt{1-\sin(2x)} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} |2\cos(x)| = 0$, et donc[1] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln|2\cos(x)| = -\infty$.
Donc $\dfrac{1}{\ln|2\cos(x)|} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} e^0 = 1$.
Et donc $\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en } \frac{\pi}{2} \text{ en posant } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.}$

[1] $|2\cos(x)|$ reste positif.

Étude de fonctions auxiliaires

4. La fonction g est dérivable[2] sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,
$$g'(t) = \ln(t) + \frac{t}{t} = 1+\ln(t).$$
On a donc $g'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1+\ln(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(t) \geqslant -1 \Leftrightarrow t \geqslant e^{-1}$.

Par ailleurs, il est évident que $\lim\limits_{t\to+\infty} t\ln(t) = +\infty$.
Et pour la limite en 0^+, procédons au changement de variable $x = \frac{1}{t}$, de sorte que
$$\lim_{t\to0^+} g(t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1/x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0.$$
Donc le tableau de variations de g est

[2] Car produit de deux fonctions que l'on sait dérivables.

> **Rappel**
> $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

t	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

5.a. La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ car quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On a alors, pour tout $t \in]0,1[$,

$$h'(t) = \frac{\frac{-1}{4-t}\ln(t) - \frac{1}{t}\ln(4-t)}{(\ln t)^2} = -\frac{t\ln(t) + (4-t)\ln(4-t)}{t(4-t)\ln(t)^2} = \boxed{-\frac{g(t)+g(4-t)}{t(4-t)\ln(t)^2}}.$$

5.b. Il est clair que le dénominateur de $h'(t)$ est positif strictement sur $]0,1[$.
Ensuite, pour $t \in]0,1[$, $3 < 4-t < 4$, et donc par croissance de g sur $[e^{-1}, +\infty[$, pour tout $t \in]0,1[$, $g(4-t) \geqslant g(3) \geqslant 3$.
Et d'autre part, $-\frac{1}{2} \leqslant e^{-1} \leqslant g(t)$, de sorte que $g(t) + g(4-t) \geqslant 3 - \frac{1}{2} > 0$.
On en déduit que pour tout $t \in]0,1[$, $h'(t) < 0$, et donc que $\boxed{h \text{ est strictement décroissante.}}$

5.c. Sur l'intervalle $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$, cos est strictement décroissante, et à valeurs dans $]0, \frac{1}{2}[$, donc $4\cos^2$ est décroissante, à valeurs dans $]0,1[$.
Et donc par composition de fonctions décroissantes, k bien définie, et $\boxed{\text{croissante sur }]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[.}$

Retour à f

6. La formule évoquée par l'énoncé n'est autre que $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.
Qui donne en particulier $\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sin(2x)} = \sqrt{1-2\cos(x)\sin(x)} &= \sqrt{\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)}\\ &= \sqrt{(\sin(x)-\cos(x))^2} = \boxed{|\sin(x)-\cos(x)|.}\end{aligned}$$

7. Sur le même principe qu'à la question précédente, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sqrt{1+\sin(2x)} = \sqrt{1+2\sin(x)\cos(x)} = \sqrt{(\sin(x)+\cos(x))^2} = |\sin(x)+\cos(x)|.$$

Notons que pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x)+\cos(x) \geqslant 0$, et donc $|\sin(x)+\cos(x)| = \sin(x)+\cos(x)$.
Par ailleurs, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(x) - \sin(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant \sin(x) \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
Donc pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $|\cos(x)-\sin(x)| = \cos(x) - \sin(x)$.
Et pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\cos(x)-\sin(x)| = \sin(x) - \cos(x)$.
Donc pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a

$$\sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)} = (\cos(x)-\sin(x)) + (\cos(x)+\sin(x)) = 2\cos(x).$$

Et ainsi, pour $x \in \mathscr{D}_f \cap \left[0, \frac{\pi}{4}\right] = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$f(x) = (2\cos(x))^{\frac{1}{\ln|2\cos(x)|}} = \exp\left(\frac{1}{\ln(2\cos(x))}\ln(2\cos(x))\right) = e^1 = e.$$

Donc f est constante égale à e sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$!

Détails

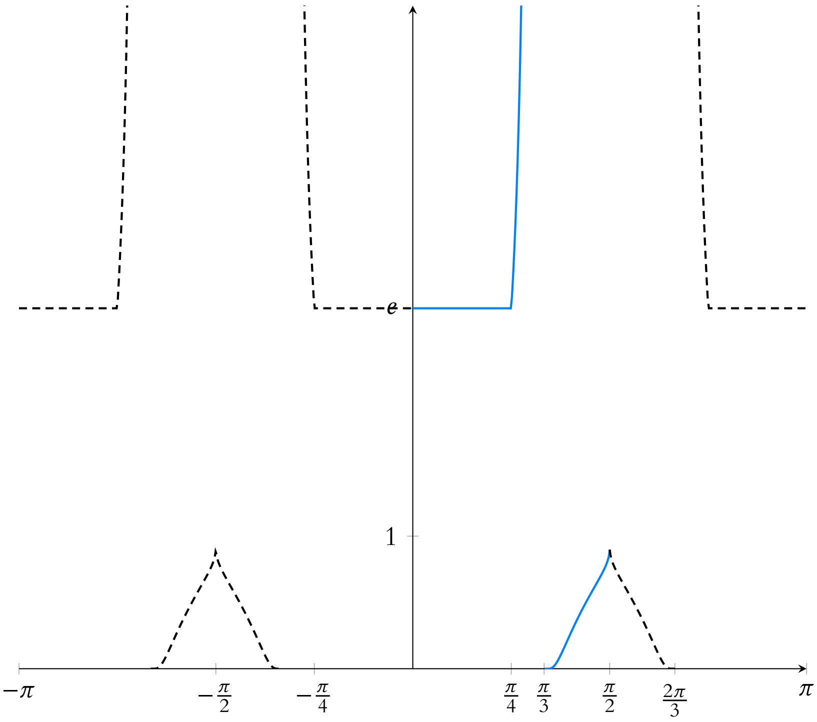
Il existe plein de manières de prouver ceci (bien que ce soit assez clair sur un cercle trigo).
Le plus simple est sans doute de constater que la fonction $\cos - \sin$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et qu'elle s'annule en $\frac{\pi}{4}$, de sorte qu'elle est positive avant $\frac{\pi}{4}$ et négative après.

Pour $x \in \mathscr{D}_f \cap \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)} = (\sin(x)-\cos(x)) + (\cos(x)+\sin(x)) = 2\sin(x).$$

Et donc

$$f(x) = (2\sin(x))^{\frac{1}{\ln|2\cos(x)|}} = \exp\left(\frac{1}{\ln(2\cos(x))}\ln(2\sin x)\right).$$



8.

FIGURE 0.1 – En trait plein, le tracé initial. En pointillés, les parties de la courbe obtenues par symétries et translations.

► **Sur** $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$: on a $\cos(x) \geqslant \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, et donc $\ln(2\cos(x)) > 0$.
Mais alors, $x \mapsto 2\cos(x)$ est décroissante, donc $x \mapsto \ln(2\cos(x))$ est décroissante, et à valeurs positives, donc par composition par la fonction inverse[3], $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(2\cos(x))}$ est croissante.

Puisque $x \mapsto \ln(2\sin(x))$ est également croissante sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$, on en déduit que $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(2\cos x)}\ln(2\sin(x))$ est croissante sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$.
Et donc f l'est aussi, par composition avec la fonction exponentielle qui est croissante.

► **Sur** $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$: pour $x \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$k(x) = \frac{\ln(4-4\cos^2(x))}{\ln(4\cos^2(x))} = \frac{\ln(4\sin^2(x))}{\ln(4\cos^2(x))} = \frac{\ln\left((2\sin(x))^2\right)}{\ln\left((2\cos(x))^2\right)} = \frac{\ln(2\sin(x))}{\ln(2\cos(x))}.$$

Et donc $f(x) = \exp(k(x))$. Puisque nous avons mentionné que k est croissante, par composition par l'exponentielle, f l'est aussi sur $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

[3] Décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Remarque
Contrairement au cas précédent, $x \mapsto \ln(2\cos x)$ n'est plus à valeurs positives, même si elle reste décroissante. Mais alors, faute d'avoir des fonctions positives, on ne peut plus rien dire de la monotonie du produit.

EXERCICE 2 : FONCTION ARGUMENT SÉCANTE HYPERBOLIQUE

1. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$ car inverse de la fonction[4] ch, que nous savons croissante.
Par ailleurs elle est continue[5] et vérifie $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection (strictement décroissante) de $\mathbf{R}_+$ sur $]0,1]$.

2. Soit $x \geqslant 0$. On a $f(f^{-1})(x) = x$, et donc $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(f^{-1}(x))} = x$. Soit encore $\boxed{\operatorname{ch}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x}.}$
Mais nous savons que pour tout $x \in I$, $\operatorname{ch}^2\left(f^{-1}(x)\right) - \operatorname{sh}^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1$, soit encore $\operatorname{sh}^2\left(f^{-1}(x)\right) = \operatorname{ch}^2\left(f^{-1}(x)\right) - 1 = \dfrac{1}{x^2} - 1$.
Puisque f^{-1} est à valeurs positives, $\operatorname{sh}\left(f^{-1}(x)\right) \geqslant 0$, et donc

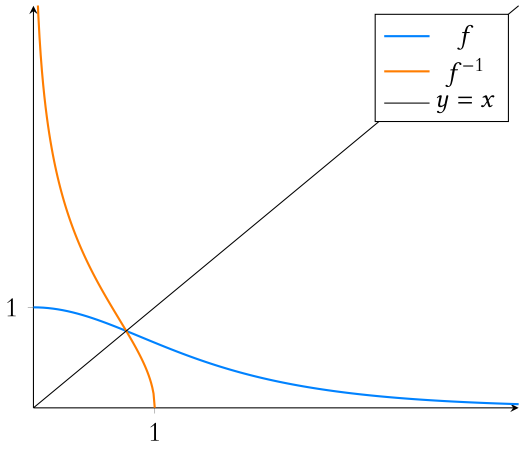
$$\operatorname{sh}\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} = \boxed{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.}$$

[4] À valeurs strictement positives.

[5] Car ch l'est.

⚠ Attention !
Sans précaution sur le signe, on ne peut qu'affirmer

$$\left|\operatorname{sh}(f^{-1}(x))\right| = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}.$$



3. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, avec pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$.

En particulier, on a $f'(f^{-1})(x) \neq 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \underbrace{f(0)}_{=1}$.

Détails
Puisque $f(0) = 1$, on a donc $f^{-1}(1) = 0$.

Donc f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$, et pour $x \in]0,1[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{\operatorname{ch}^2(f^{-1}(x))}{\operatorname{sh}(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{x^2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}}.$$

4. Soit $\varphi : \begin{array}{|rcl}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}\right) \end{array}$.

Notons qu'elle est bien définie puisque pour tout $x \in]0,1]$, $\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}} = \sqrt{\dfrac{2}{1+\frac{1}{x}}}$.

Mais $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$ et donc $1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$, de sorte que $0 < \sqrt{\dfrac{2}{1+\frac{1}{x}}} \leqslant 1$.

En changeant les inégalités larges en inégalités strictes, on prouve que pour $x \in]0,1[$, $\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}} \in]0,1[$.

Or, $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x}$ est dérivable sur $]0,1[$, à valeurs dans $]0,1[$, et donc par composition avec la fonction racine carrée, dérivable sur $]0,1[$, $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}$ est dérivable sur $]0,1[$, à valeurs encore dans $]0,1[$.
Et donc par composition avec f^{-1}, dérivable sur $]0,1[$, φ est dérivable sur $]0,1[$.
Et alors pour tout $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2\frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}f'\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right) = -\frac{2}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{2x}}\frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\sqrt{1-\frac{2x}{1+x}}} \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \\ &= (f^{-1})'(x).\end{aligned}$$

Donc f et φ ont même dérivée, de sorte que $f^{-1} - \varphi$ est de dérivée nulle, donc constante sur $]0,1[$.
Il existe donc $C \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in]0,1[$, $f^{-1}(x) = \varphi(x) + C$.
Pour déterminer C, le plus simple est probablement d'évaluer les deux termes en un point.
Évaluer en 1 semble le plus indiqué, mais pour l'instant notre relation ne vaut que pour $x \in]0,1[$. Nous savons[6] que f^{-1} est continue sur $]0,1]$, et donc en particulier en 1.
Donc par composition de fonctions continues, φ est également continue en 1.

Plus rapide
Si on ne veut pas introduire $f^{-1} - \varphi$, on peut dire que ces deux fonctions sont deux primitives de f^{-1}, et donc diffèrent d'une constante.

[6] C'est inclus dans l'énoncé du théorème de la bijection.

Et donc
$$f^{-1}(1) = \lim_{x\to 1^-} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 1^-} \varphi(x) + C = \varphi(1) + C.$$
Mais $f^{-1}(1) = 0$ et $\varphi(1) = 2f^{-1}(1) = 0$. On en déduit que $C = 0$, et donc que
$$\boxed{\forall x \in]0,1],\ f^{-1}(x) = 2f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right).}$$

5. Soit $y \in]0,1]$ fixé. Alors pour $x \geqslant 0$, on a
$$y = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = y \Leftrightarrow \mathrm{ch}(x) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = \frac{2}{y} \Leftrightarrow e^{2x} - \frac{2}{y}e^x + 1 = 0.$$
En procédant au changement de variable $X = e^x$, on obtient alors $X^2 - \frac{2}{y}X + 1 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = \frac{4}{y^2} - 4 = \frac{4-4y^2}{y^2} > 0$.

Les deux racines sont alors $X_1 = \frac{\frac{2}{y} + \frac{2}{y}\sqrt{1-y^2}}{2} = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ et $X_2 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$.
Il est clair que $X_1 > 1$ et nous pourrions prouver que $X_2 < 1$. Mais notons plus simplement que puisque nous savons déjà f bijective, nous savons que l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution positive, et donc qu'une seule des deux racines ci-dessus peut être plus grande que 1.
Et donc X_1 et X_2 ne peuvent être toutes deux supérieures ou égales à 1, faute de quoi $y = f(x)$ posséderait deux solutions distinctes dans $\mathbf{R}_+$ qui sont $\ln(X_1)$ et $\ln(X_2)$.

> **Détails**
> On s'intéresse à la valeur 1 puisque $X = e^x$ doit être supérieur ou égal à 1.

Donc l'unique solution positive à $y = f(x)$ est $\ln(X_1) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right)$.

On en déduit donc que la bijection réciproque de f est donnée par
$$f^{-1} : \left|\begin{array}{rcl}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \end{array}\right. .$$

> **Vérification ?**
> Vous pouvez essayer de calculer $f(f^{-1})(x)$ afin de constater que l'expression que nous venons de trouver est la bonne.

Puisque la fonction racine n'est pas dérivable en 0, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]0,1[$, mais pas sur $]0,1]$ (ou plutôt : on ne sait rien de la dérivabilité en 1).
Et alors par quotient et composition de fonctions dérivables, f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$.

La dérivée de $x \mapsto \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ est $x \mapsto \frac{\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - 1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = -\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ et donc pour tout $x \in]0,1[$,
$$(f^{-1})'(x) = \frac{\frac{-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} = \frac{-x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}.}$$

6. Soit $x \in]0,1[$. Alors on a
$$\begin{aligned} 2f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right) &= 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{2x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}\right) = 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{1+2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1-x}{1+x}}{\frac{2x}{1+x}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{2x}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right). \end{aligned}$$

EXERCICE 3 : UNE FONCTION DÉFINIE IMPLICITEMENT

1. Soit $t > 0$ fixé. La fonction P_t est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée $P_t' : x \mapsto 5x^4 + t$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P_t'(x) \geqslant 0$, de sorte que P_t est strictement croissante. Par ailleurs,
$\lim_{x\to-\infty} P_t(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^5}_{\xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{t}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} = -\infty$ et de même, $\lim_{x\to+\infty} P_t(x) = +\infty$.
Donc par le théorème de la bijection[7], P_t réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$, et donc il existe bien un unique $f(t) \in \mathbf{R}$ tel que $P_t(f(t)) = 0$.

[7] Qui s'applique puisque P_t est continue, car dérivable.

2. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Alors $P_t(0) = -1$ et $P_t(1) = t > 0$.
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires[8], l'équation $P_t(x) = 0$ possède une solution dans $]0,1[$. Et cette solution est nécessairement $f(t)$, puisqu'il s'agit de la seule solution dans $\mathbf{R}$ de l'équation $P_t(x) = 0$.
On en déduit donc que $\boxed{f(t) \in]0,1[}$.

[8] Qui s'applique car P_t est toujours continue.

3. Soient t_1 et t_2 deux réels strictement positifs, avec $t_1 < t_2$.
On a alors $P_{t_2}(f(t_1)) = f(t_1)^5 + t_2 f(t_1) - 1 > f(t_1)^5 + t_1 f(t_1) - 1 = P_{t_1}(f(t_1)) = 0$.
Ainsi, $P_{t_2}(f(t_1)) > 0$. Par stricte croissance de P_{t_2} sur $[f(t_1), +\infty[$, la fonction P_{t_2} ne s'annule pas sur cet intervalle.
Donc l'unique solution de $P_{t_2}(x) = 0$, à savoir $f(t_2)$, ne se trouve pas dans cet intervalle. Et donc $f(t_2) < f(t_1)$.
Ceci étant vrai quels que soient t_1 et t_2 (avec $t_1 < t_2$), on en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Méthode
En l'absence d'information sur la dérivabilité de f, le seul moyen de prouver la stricte monotonie de f est de comparer $f(t_1)$ et $f(t_2)$ pour $t_1 < t_2$.

4. **Étude de f au voisinage de $+\infty$.**

4.a. Pour $t > 0$, $P_t\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^5} > 0$, de sorte que par stricte croissance de P_t,
$$P_t\left(\frac{1}{t}\right) > \underbrace{P_t(f(t))}_{=0} \Leftrightarrow f(t) < \frac{1}{t}.$$
Puisque par ailleurs $f(t) > 0$, par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.}$

4.b. Pour $x > 0$, on a $P_x(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x)^5 + xf(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow xf(x) = 1 - f(x)^5 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

5. **Étude de f au voisinage de 0.**

5.a. Notons $\ell = \lim_{x\to0^+} f(t) \in]0,1]$, dont on a admis l'existence.
Puisque pour tout $t > 0$, $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$, en passant à la limite, il vient
$$\ell^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow \ell^5 = 1 \Leftrightarrow \ell = 1.$$

5.b. Nous reconnaissons la limite du taux d'accroissement de $u : x \mapsto (1+x)^n$ en 0, qui tend donc vers $u'(0) = n$.
Donc $\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$.
On a alors, pour $t > 0$,
$$\frac{f(t)-1}{1-f(t)^5} = \frac{f(t)-1}{1-(1+(f(t)-1)^5)}.$$
Mais $f(t) - 1 \xrightarrow[t\to0]{} 0$, et donc par composition de limites[9]
$$\lim_{t\to0} \frac{(1+(f(t)-1))^5 - 1}{f(t)-1} = 5.$$
Et donc par passage à l'inverse, $\lim_{t\to0} \frac{f(t)-1}{(1+(f(t)-1))^5 - 1} = \frac{1}{5}$, et donc la limite cherchée vaut $-\frac{1}{5}$.

[9] Si vous préférez : par le changement de variable $X = f(t) - 1$.

5.c. Il s'agit de revenir au taux d'accroissement : pour $t > 0$,
$$\frac{\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(0)}{t} = \frac{f(t)-1}{t} = \frac{f(t)-1}{1-f(t)^5}\,\frac{1-f(t)^5}{t}.$$

Or, $1 - f(t)^5 = tf(t)$, de sorte que $\dfrac{1 - f(t)^5}{t} = f(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$.

Et donc par produit de limites, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - 1}{t} = -\dfrac{1}{5}$.

Ceci prouve donc que $\boxed{\widetilde{f} \text{ est dérivable en } 0, \text{ avec } \widetilde{f}'(0) = -\dfrac{1}{5}.}$

6. *Notons tout de suite qu'il est hors de question d'appliquer le théorème de la bijection à f, dont nous ne savons rien au sujet de la continuité.*
La fonction g est dérivable (et donc continue) sur $]0, 1[$ comme quotient de fonctions dérivables, et strictement décroissante car produit des deux fonctions $x \mapsto 1 - x^5$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, toutes deux positives et strictement décroissantes.
Puisque par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 0$, g réalise bien une bijection de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$.
On a alors, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$g(g^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow \frac{1 - (g^{-1}(x))^5}{g^{-1}(x)} = x \Leftrightarrow \left(g^{-1}(x)\right)^5 + xg^{-1}(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow P_x(g^{-1}(x)) = 0.$$

Donc $g^{-1}(x)$ est l'unique racine positive de P_x : c'est $f(x)$.

Et notons qu'à présent, nous pouvons affirmer que f est continue, puisque c'est le théorème de la bijection qui nous le garantit, en tant que bijection réciproque de g.

7. La dérivée de g est $g' : x \mapsto \dfrac{-5x^5 - (1 - x^5)}{x^2} = -\dfrac{1 + 4x^5}{x^2}$, qui ne s'annule pas sur $]0, 1[$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $g'(g^{-1}(x)) \neq 0$, de sorte que $g^{-1} = f$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, avec

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{-f(x)^2}{1 + 4f(x)^5} = \frac{-f(x)^2}{1 + 4(1 - xf(x))}. = \frac{-f(x)^2}{5 - xf(x)}.$$

8. Puisque sur $]0, +\infty[$, f et $\widetilde{f}$ coïncident, elles ont la même dérivée.
Donc pour $x > 0$, $(\widetilde{f})'(x) = \dfrac{-f(x)^2}{5 - xf(x)}$. Mais sur $\mathbf{R}_+^*$, la fonction $f = g^{-1}$ est continue par le théorème de la bijection.
Donc $x \mapsto f(x)^2$ et $x \mapsto 5 - xf(x)$ sont continues car produits de fonctions continues. On en déduit donc que $(\widetilde{f})'$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions continues.
Ne reste alors qu'à prouver la continuité de $\widetilde{f}'$ en 0.
Puisque $x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$, $xf(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, et donc $\widetilde{f}'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{5} = \widetilde{f}'(0)$, donc $\widetilde{f}'$ est continue en 0, et donc sur $\mathbf{R}_+$ tout entier.