DEVOIR MAISON 3

EXERCICE : UN PEU DE LOGIQUE

1. Pour chacune des deux assertions suivantes, déterminer sa valeur de vérité (en le justifiant), puis écrire sa négation :

   a. $\exists x \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in \mathbf{R}_+^*, x \leqslant y$.

   b. $\exists x \in [-1,1], \forall y \in [-1,1], (x \leqslant y \Rightarrow x = y)$.

2. Prouver qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est bornée si et seulement si
$$\exists (a,b) \in \mathbf{R}^2, \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b.$$

3. Soit $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ vérifiant : 1)$\forall p \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, f(n) = p$ et 2) $\forall n \in \mathbf{N},\ f(n) \geqslant n$.
   Prouver que $f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$. *On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.*

PROBLÈME : DIFFÉRENCE SYMÉTRIQUE DE DEUX ENSEMBLES

Soit E un ensemble. Pour tous $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on note appelle **différence symétrique de** A **et** B, et on note $A\Delta B$ la partie de E définie par $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.
Notons qu'on a toujours $A\Delta B = B\Delta A$.

1. Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, déterminer les ensembles : $A\Delta E$, $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta\overline{A}$.
2. Montrer que pour $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on a $A\Delta B = \{x \in E \mid (x \in A \textbf{ et } x \notin B) \textbf{ ou } (x \notin A \textbf{ et } x \in B)\}$.
3. Montrer que pour $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
4. Soient A et B deux parties de E. Montrer que $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B}$. Que dire de $\overline{A}\Delta\overline{B}$?
5. **Associativité de Δ.** Soient A, B, C trois parties de E.

   a. Montrer que $(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B) \cup C) \cap \left(\left(\overline{A}\Delta B\right) \cup \overline{C}\right)$.

   b. En déduire que $(A\Delta B)\Delta C = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) \cup (A \cap B \cap C)$.

   c. Sans nouveaux calculs, justifier alors que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

   On dit alors que la différence symétrique est associative, et on note alors $A\Delta B\Delta C$ (sans parenthèses) l'ensemble $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
6. En effectuant le moins de calculs possibles, déterminer $A\Delta B\Delta A$, où A et B sont deux parties de E.
7. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On note alors f_A l'application $f_A : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & A\Delta B \end{array}\right.$.

   a. La proposition $\forall C \in \mathscr{P}(E), \exists B \in \mathscr{P}(E), f_A(B) = C$ est-elle vraie ? Justifier votre affirmation. *On pourra notamment utiliser le résultat de la question 6.*

   b. Montrer que f_A est injective, c'est-à-dire que $\forall (B,C) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f_A(B) = f_A(C) \Rightarrow B = C$.

   c. Résoudre l'équation $A\Delta B = A$, d'inconnue $B \in \mathscr{P}(E)$.

Les questions qui suivent sont facultatives.

8. Prouver que pour $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on a $(A\Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$.
9. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de E. Montrer que $A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_n$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à exactement un nombre impair des A_i.
10. Prouver que pour $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$, $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
11. Soit $\mathscr{F}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

    a. $\forall (A,B) \in \mathscr{F}^2, A\Delta B \in \mathscr{F}$ et $A \cap B \in \mathscr{F}$.

    b. $\forall (A,B) \in \mathscr{F}^2, A\Delta B \in \mathscr{F}$ et $A \cup B \in \mathscr{F}$.

    c. $\forall (A,B) \in \mathscr{F}^2, A \cup B \in \mathscr{F}$ et $A \setminus B \in \mathscr{F}$.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 3

EXERCICE : UN PEU DE LOGIQUE

1.a. L'assertion est fausse. En effet, sa négation est $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \exists y \in \mathbf{R}+^*, y < x$.
Cette négation est vraie car pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, $y = \dfrac{x}{2} \in \mathbf{R}_+^*$ et $y < x$.

1.b. L'assertion est vraie, puisque $x = 1$ convient.
En effet, pour tout $y \in [-1, 1]$, on a $y \leqslant 1$, et donc si $1 \leqslant y$, alors nécessairement[1], $y = 1 = x$.
Sa négation (qui est donc fausse) est $\forall x \in [-1,1], \exists y \in [-1,1], x \leqslant y$ **et** $x \neq y$.

[1] Par double inégalité.

Rappel
La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et non** Q.

2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bornée, et soit $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-M \leqslant f(x) \leqslant M$.
Alors pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $-M \leqslant f(x) \leqslant M$ et $-M \leqslant f(y) \leqslant M$, de sorte que $-M \leqslant -f(y) \leqslant M$.
Et donc en sommant ces relations, $-2M \leqslant f(x) - f(y) \leqslant 2M$, de sorte que $a = -2M$ et $b = 2M$ vérifient : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b$.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b$.
Alors pour $x \in \mathbf{R}$, il vient $a \leqslant f(x) - f(0) \leqslant b \Leftrightarrow a + f(0) \leqslant f(x) \leqslant b + f(0)$.
Donc f est minorée (par $a + f(0)$) et majorée (par $b + f(0)$) et donc bornée.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bornée si et seulement si } \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2, \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b.}$

3. Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ que $f(n) = n$.
Nous savons par le premier point[2] qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $f(p) = 0$. Notons donc $p \in \mathbf{N}$ un tel antécédent de 0.
Alors par le point 2), $0 = f(p) \geqslant p$, et puisque $p \in \mathbf{N}$, $p = 0$.
On a donc bien $f(0) = 0$: la récurrence est initialisé.

[2] Qui signifie que tout élément de $\mathbf{N}$ possède au moins un antécédent par f.

Soit $n \in \mathbf{N}$ et supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(k) = k$.
Soit alors $p \in \mathbf{N}$ un antécédent[3] de $n + 1$, c'est-à-dire tel que $f(p) = n + 1$.
Alors $p \leqslant f(p) = n + 1$.
Par ailleurs, pour $k \leqslant n$, $f(k) = k \leqslant n$, donc $p \geqslant n + 1$.
Et par double inégalité, $p = n + 1$, de sorte que $f(n + 1) = n + 1$.

[3] Encore une fois, l'existence d'un tel antécédent est garantie par l'hypothèse 1).

Par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$, et donc $\boxed{f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}.}$

EXERCICE : DIFFÉRENCE SYMÉTRIQUE DE DEUX ENSEMBLES

1. On a

$$\begin{aligned}
A\Delta E &= (A \setminus E) \cup (E \setminus A) = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A}.\\
A\Delta A &= (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.\\
A\Delta\emptyset &= (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A.\\
A\Delta\overline{A} &= (A \setminus \overline{A}) \cup (\overline{A} \setminus A) = A \cup \overline{A} = E.
\end{aligned}$$

2. Il suffit de traduire la définition de $A\Delta B$: pour $x \in E$, on a

$$x \in A\Delta B \Leftrightarrow x \in (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B) \Leftrightarrow (x \in A\cap\overline{B}) \textbf{ ou } (x \in \overline{A}\cap B) \Leftrightarrow (x \in A \textbf{ et } x \notin B) \textbf{ ou } (x \notin A \textbf{ et } x \in B).$$

Et donc $\boxed{A\Delta B = \{x \in E \mid (x \in A \textbf{ et } x \notin B) \textbf{ ou } (x \notin A \textbf{ et } x \in B)\}.}$

3. Une preuve par double inclusion est possible. Mais préférons le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\\
&= \Big((A \cap \overline{B}) \cup B\Big) \cap \Big((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}\Big) && \text{Distributivité.}\\
&= \left((A \cup B) \cap \underbrace{\left(\overline{B} \cup B\right)}_{=E}\right) \cap \left(\underbrace{\left(A \cup \overline{A}\right)}_{=E} \cap \left(\overline{B} \cup \overline{A}\right)\right) && \text{Re-distributivité.}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\\
&= (A\cup B)\cap\left(\overline{A\cap B}\right) = (A\cup B)\setminus(A\cap B).
\end{aligned}
$$

4. On a, en utilisant la question précédente,

$$
\begin{aligned}
\overline{A\Delta B} &= \overline{(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)}\\
&= \left(\overline{A\cup B}\right)\cup\overline{\overline{(A\cap B)}}\\
&= (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)\\
&= \left(\overline{A}\cup(A\cap B)\right)\cap\left(\overline{B}\cup(A\cap B)\right)\\
&= \left(\underbrace{\left(\overline{A}\cup A\right)}_{=E}\cap\left(\overline{A}\cup B\right)\right)\cap\left(\left(\overline{B}\cup A\right)\cap\underbrace{\left(\overline{B}\cup B\right)}_{=E}\right)\\
&= \left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(\overline{B}\cup A\right)\\
&= \left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(\overline{\overline{A}\cap B}\right)\\
&= \left(\overline{A}\cup B\right)\setminus(\overline{A}\cap B) = \boxed{\overline{A}\Delta B.}
\end{aligned}
$$

Loi de De Morgan.

Et pour la seconde égalité, notons qu'on a toujours[4] $A\Delta B = B\Delta A$ et donc

$$A\Delta\overline{B} = \overline{B}\Delta A = \overline{B\Delta A} = \overline{A\Delta B}.$$

[4] On dit que Δ est **commutative.**

On a alors $\overline{A}\Delta\overline{B} = \overline{A\Delta\overline{B}} = A\Delta\overline{\overline{B}} = A\Delta B$.

5. Associativité de Δ.

5.a. Par la question 3, $(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B)\cup C)\setminus((A\Delta B)\cap C) = ((A\Delta B)\cup C)\cap\overline{((A\Delta B)\cap C)}$.
Mais $\overline{(A\Delta B)\cap C} = \overline{A\Delta B}\cup\overline{C} = (\overline{A}\Delta B)\cup\overline{C}$, et donc

$$(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B)\cup C)\cap\left((\overline{A}\Delta B)\cup\overline{C}\right).$$

5.b. On a donc, en se souvenant que $A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap C)$:

$$
\begin{aligned}
(A\Delta B)\Delta C &= \left[\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\cup C\right]\cap\left[\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup(A\cap B)\cup\overline{C}\right]\\
&= \underbrace{(A\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cap\overline{B})}_{=\emptyset}\cup\underbrace{\left(A\cap\overline{B}\cap B\right)}_{=\emptyset}\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\underbrace{\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap B\right)}_{=\emptyset}\cup\underbrace{\left(A\cap\overline{A}\cap B\right)}_{=\emptyset}\cup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\\
&\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\cup(A\cap B\cap C)\cup\underbrace{\left(C\cap\overline{C}\right)}_{=\emptyset}\\
&= \boxed{\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\cup(A\cap B\cap C).}
\end{aligned}
$$

5.c. Remarquons que $A\Delta(B\Delta C) = (B\Delta C)\Delta A = (C\Delta B)\Delta A$.
Et donc en reprenant le calcul précédent, et échangeant A et C, il vient

$$A\Delta(B\Delta C) = \left(C\cap\overline{B}\cap\overline{A}\right)\cup\left(\overline{C}\cap B\cap\overline{A}\right)\cup\left(\overline{C}\cap\overline{B}\cap A\right)\cup(C\cap B\cap A) = (A\Delta B)\Delta C.$$

6. On a $A\Delta B\Delta A = A\Delta(B\Delta A) = A\Delta(A\Delta B) = (A\Delta A)\Delta B = \emptyset\Delta B = B$.

7.a. La question précédente prouve que pour tout $C\in\mathscr{P}(E)$, $A\Delta(C\Delta A) = C \Leftrightarrow f_A(C\Delta A) = C$.
Donc pour $C\in\mathscr{P}(E)$ fixé, C possède bien un[5] antécédent B par f_A, à savoir $C\Delta A = A\Delta C$.

[5] Au moins.

7.b. Soient B et C soient deux parties de E telles que $f_A(B) = f_A(C) \Leftrightarrow A$, soit encore $\Delta B = A\Delta C$.
Prouvons alors que $B\subset C$. Soit $x\in B$, alors :

▸ soit $x\in A$, auquel cas $x\notin A\Delta B$ et donc $x\notin A\Delta C$.
Si x n'était pas dans C, il serait dans $A\cap\overline{C}$, et donc dans $A\Delta C$, ce qui n'est pas le cas. Donc $x\in C$.

▸ soit $x\notin A$, auquel cas $x\in A\Delta B$. Et donc $x\in A\Delta C$. Puisque $x\notin A$, c'est donc que $x\in C$.

Rappel
Les éléments de $A\Delta B$ sont ceux qui sont dans un seul des deux ensembles A et B.

On a donc prouvé que $\forall x\in B, x\in C$, et donc que $B\subset C$.
En inversant les rôles de B et C, on prouve que $C\subset B$, et donc $B = C$.

7.c. Nous savons que $B = \emptyset$ est une solution puisque $f_A(\emptyset) = A\Delta\emptyset = A$.
Mais la question 7.b nous dit qu'une solution, si elle est existe est unique.
En effet, si B est une solution, alors $f_A(B) = A = f_A(\emptyset)$, et donc $B = \emptyset$.
Et donc $\boxed{\text{l'unique solution de } A\Delta B = A \text{ est } B = \emptyset.}$

8. Supposons que A et B soient deux parties de E telles que $A\Delta B = A \cap B$.
Par la question 3, on a toujours $(A\Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.
Mais si ces deux ensembles sont égaux, leur intersection est $A\Delta B$, de sorte que $A\Delta B = \emptyset$. Et donc $A \cap B$ est également vide.
Mais alors, $A \cup B = (A\Delta B) \cup (A \cap B) = \emptyset$.
Et donc $A \subset A \cup B = \emptyset$, de sorte que $\boxed{A = \emptyset, \text{ et de même, } B = \emptyset.}$

Une solution plus «pédestre» est possible : supposons par l'absurde que $A \neq \emptyset$. Alors il existe $x \in A$.
▶ Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$, et donc $x \in A\Delta B$. Mais ceci est absurde puisque $x \in A$ **et** $x \in B$.
▶ Si $x \notin B$, alors $x \notin A \cap B$. Mais $x \in A$ **et** $x \notin B$, de sorte que $x \in A\Delta B = A \cap B$. Là encore, c'est absurde, et on en déduit donc que A est vide.
Et le même raisonnement prouverait que B est également vide.

Remarque
La question 7.b prouve que tout élément de $\mathscr{P}(E)$ possède au plus un antécédent par f_A, quand la question 7.a prouve que tout élément possède au moins un antécédent par f_A.
Et donc tout élément de $\mathscr{P}(E)$ possède un unique antécédent par f_A, on dira plus tard que f_A est bijective.
Mieux, la preuve de la question 7.a nous donne l'unique antécédent de B par f_A : c'est $A\Delta B$.

9. Prouvons par récurrence[6] sur n que quels que soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de E, $A_1\Delta \cdots \Delta A_n$ est formé des éléments de E qui sont dans un nombre impair des A_i.

[6] Simple !

Pour $n = 2$, pour tout $(A_1, A_2) \in \mathscr{P}(E)^2$, $A_1\Delta A_2$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à un et un seul des deux ensembles A_1 et A_2. Or un élément de E ne peut appartenir qu'à 0, 1 ou 2 des A_i, donc il est dans $A_1\Delta A_2$ si et seulement il est dans un nombre impair des A_i, c'est-à-dire si et seulement si l'ensemble $\{i \in [\![1, n]\!] \mid x \in A_i\}$ contient un nombre impair d'éléments.

$n = 3$?
La récurrence a même été initialisée pour $n = 3$, puisque la formule de la question 5.b prouve que les éléments de $A\Delta B\Delta C$ sont ceux qui sont dans un seul ou dans les trois A_i.

Supposons la propriété vraie pour n parties de E, et soient $A_1, \dots, A_{n+1}$ $n+1$ parties de E.
Pour $x \in E$, on a $x \in A_1\Delta A_2\Delta \cdots \Delta A_{n+1} = (A_1\Delta A_2\Delta \cdots \Delta A_n)\Delta A_{n+1}$ si et seulement si ($x \in A_1\Delta \cdots \Delta A_n$ **et** $x \notin A_{n+1}$) **ou** ($x \in A_{n+1}$ **et** $x \notin A_1\Delta \cdots \Delta A_n$).
▶ Si $x \in A_1\Delta \cdots \Delta A_n$ et $x \notin A_{n+1}$, alors x est dans un nombre impair des $A_1, \dots, A_n$, et donc dans un nombre impair des $A_1, \dots, A_{n+1}$.
▶ Si $x \notin A_1\Delta \cdots \Delta A_n$ et $x \in A_{n+1}$, alors x est dans un nombre pair des $A_1, \dots, A_n$, et étant également dans A_{n+1}, il est dans un nombre impair des $A_1, \dots, A_{n+1}$.
Donc tout élément de $A_1\Delta A_2\Delta \cdots \Delta A_{n+1}$ est dans un nombre impair des A_i, reste à prouver que la réciproque est vraie.

Inversement, si x est dans un nombre impair des $A_1, \dots, A_{n+1}$.
Soit il n'est pas dans A_{n+1}, et donc il est dans un nombre impair des $A_1, \dots, A_n$. Et donc par hypothèse de récurrence, est dans $A_1\Delta \cdots \Delta A_n$, et n'étant pas dans A_{n+1}, il est dans $(A_1\Delta \cdots \Delta A_n)\Delta A_{n+1}$.
Si en revanche $x \in A_{n+1}$, alors il est dans un nombre pair des $A_1, \dots, A_n$, et donc $x \notin A_1\Delta \cdots \Delta A_n$.
On en déduit que $x \in (A_1\Delta \dots \Delta A_n)\Delta A_{n+1}$.

Ainsi, nous venons de prouver notre propriété au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, quels que soient les ensembles $A_1, \dots, A_n$, alors $A_1\Delta A_2\Delta A_n$ est l'ensembles des éléments de E qui apparaissent dans un nombre impair des A_i.

10. Soient A, B, C trois parties de E. Alors

$$A \cap (B\Delta C) = A \cap \left((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})\right) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C).$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
(A \cap B)\Delta(A \cap C) &= \left((A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}\right) \cup \left((A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)}\right)\\
&= \left((A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})\right) \cup \left((A \cap C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})\right)\\
&= \left(\underbrace{(A \cap B \cap \overline{A})}_{=\emptyset} \cup (A \cap B \cap \overline{C})\right) \cup \left(\underbrace{(A \cap C \cap \overline{A})}_{=\emptyset} \cup (A \cap C \cap \overline{B})\right)
\end{aligned}$$

$$= (A\cap B\cap \overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)$$
$$= \boxed{A\cap(B\Delta C).}$$

11. Nous allons prouver que $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$, ce qui prouvera l'équivalence des trois propriétés.

► $\underline{a) \Rightarrow b)}$. Supposons que pour tout $(A,B)\in\mathscr{F}^2$, $A\Delta B\in\mathscr{F}$ et $A\cap B\in\mathscr{F}$.
Alors pour $(A,B)\in\mathscr{F}^2$, $A\cap B\in\mathscr{F}$, $A\Delta B\in\mathscr{F}$, et donc $(A\Delta B)\Delta(A\cap B)\in\mathscr{F}$.
Or, $(A\Delta B)\Delta(A\cap B) = ((A\Delta B)\cup(A\cap B))\setminus((A\Delta B)\cap(A\cap B))$.
Puisque $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$, on a $(A\Delta B)\cap(A\cap B)=\emptyset$.
Et il est facile de se convaincre que $(A\Delta B)\cup(A\cap B) = A\cup B$ (puisque $A\Delta B$ est l'ensemble des éléments qui ne sont que dans l'un des deux ensembles A ou B, et $A\cap B$ est l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B).
Et donc $(A\Delta B)\Delta(A\cap B) = A\cup B$, de sorte que $A\cup B\in\mathscr{F}$.
Donc $\mathscr{F}$ vérifie b), à savoir la stabilité par Δ et $\cup$.
► $\underline{b) \Rightarrow c)}$ Supposons à présent que pour tout $(A,B)\in\mathscr{F}^2$, $A\Delta B\in\mathscr{F}$ et $A\cup B\in\mathscr{F}$.
Soient alors A et B éléments de $\mathscr{F}$. Alors $B\Delta(A\cup B)\in\mathscr{F}$. Mais

$$\begin{aligned}
B\Delta(A\cup B) &= \left(B\cap\left(\overline{A\cup B}\right)\right)\cup\left(\overline{B}\cap(A\cup B)\right)\\
&= \underbrace{\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{B}\right)}_{=\emptyset \text{ car } B\cap\overline{B}=\emptyset}\cup\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\underbrace{\left(B\cap\overline{B}\right)}_{=\emptyset}\right)\\
&= A\cap\overline{B} = A\setminus B.
\end{aligned}$$

Et donc $\mathscr{F}$ vérifie c).

► $\underline{c) \Rightarrow a)}$ Supposons que pour tout $(A,B)\in\mathscr{F}^2$, $A\cup B\in\mathscr{F}$ et $A\setminus B\in\mathscr{F}$.
Alors pour $(A,B)\in\mathscr{F}^2$, $A\setminus B\in\mathscr{F}$, $B\setminus A\in\mathscr{F}$ et donc $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\in\mathscr{F}$, soit encore $A\Delta B\in\mathscr{F}$.
On a donc $A\setminus(A\setminus B)\in\mathscr{F}$. Mais

$$A\setminus(A\setminus B) = A\cap\overline{A\setminus B} = A\cap\overline{A\cap\overline{B}} = A\cap\left(\overline{A}\cup B\right) = \underbrace{\left(A\cap\overline{A}\right)}_{=\emptyset}\cup(A\cap B) = A\cap B.$$

Et donc $A\cap B\in\mathscr{F}$, de sorte que $\mathscr{F}$ vérifie a).