DEVOIR MAISON 4

EXERCICE 1 : SOMMES D'ARCTANGENTES

Le but de l'exercice est d'obtenir une formule pour $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$, où x, y sont deux réels.

0. **Question préliminaire** : montrer que $\text{Arctan}(\sqrt{3}) + \text{Arctan}(1)$ et $\text{Arctan}\left(-2-\sqrt{3}\right)$ ont la même tangente. Pourquoi sont-ils différents ?

I. Première méthode : une preuve trigonométrique

1. Pour $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donner une expression de $\cos^2(a)$ en fonction de $\tan(a)$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(\text{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Prouver alors que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(\text{Arctan}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) = \dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.
5. En déduire que pour tous réels x, y tels que $xy \neq 1$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in]-\pi, \pi[\backslash \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
6. Simplifier alors, pour $xy \neq 1$, $\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))$.
7. **Premier cas** : on suppose que $xy < 1$. En utilisant la question 4, montrer que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   En déduire alors que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.
8. **Second cas** : on suppose à présent que $xy > 1$ et $x \geqslant 0$.
   Montrer que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et en déduire que
   $$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \pi.$$
9. **Troisième cas** : en vous inspirant de la question précédente, donner une formule reliant $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$ à $\text{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ dans le cas où $xy < 1$ et $x < 0$.
10. Si x et y sont deux réels tels que $xy = 1$, simplifier $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$ à l'aide d'un résultat du cours.

II. Seconde méthode : avec du calcul différentiel

Cette partie est facultative.

On considère à présent $y \in \mathbf{R}^*$ **fixé**, et on note φ_y la fonction $\varphi_y : x \mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.

11. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_y$ de φ_y.
12. Montrer que φ_y est dérivable sur $\mathcal{D}_y$, et montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_y$, $\varphi_y'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
13. Retrouver alors les résultats des questions 7,8 et 9.

III. Bonus : la formule de Machin

14. Pour $x \in [0, 1[$, exprimer $2\,\text{Arctan}(x)$ sous forme d'une arctangente.
15. En déduire que $4\,\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right) = \text{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right)$.

16. Prouver alors la formule de John Machin (1680–1751) : $\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$.
Cette formule d'apparence anecdotique a en fait une importance historique, puisque couplée à une formule qui permet le calcul efficace de valeurs approchées des arctangentes, elle a permis dès 1706 le calcul de 100 décimales de π. Jusqu'au début du XX^ème^ siècle cette formule et ses variantes formaient la meilleure solution pour le calcul des décimales de π.

Exercice : autour de la série harmonique

Partie I. Un calcul de somme

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right](-1)^{k-1}$.
2. Pour $(n,k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, exprimer $\frac{1}{k}\binom{n}{k-1}$ en fonction de $\binom{n+1}{k}$.
3. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$.
4. En déduire, *sans récurrence*, que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = H_n$.

Partie II. Un équivalent de H_n

Cette partie est facultative.

5. Justifier que $(H_n)_{n\geqslant 1}$ possède une limite finie ou égale à $+\infty$.
6. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} H_n$.
7. a. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   Sans calculer les intégrales en jeu, montrer que $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.
   b. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $\int_1^n \frac{dt}{t} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant H_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$.
   c. Prouver alors que $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 4

PROBLÈME : SOMMES D'ARCTANGENTES

0. On a

$$\begin{aligned}\tan\left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3})+\operatorname{Arctan}(1)\right) &= \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}))+\tan(\operatorname{Arctan}(1))}{1-\tan(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}))\tan(\operatorname{Arctan}(1))}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{-2} = -2-\sqrt{3} = \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(-2-\sqrt{3}\right)\right).\end{aligned}$$

Pour autant, puisque $\operatorname{Arctan}(-2-\sqrt{3}) \leqslant 0$ et $\operatorname{Arctan}(\sqrt{3})+\operatorname{Arctan}(1) > 0$, donc ces deux nombres ne sauraient être égaux.

1. C'est un grand classique : on sait[1] que $1+\tan^2(a) = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$, et donc

$$\boxed{\cos^2(a) = \frac{1}{1+\tan^2(a)}.}$$

[1] Ce sont les deux formes de la dérivée de $t \mapsto \tan t$.

2. Puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, son cosinus est positif. Et donc

$$\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \sqrt{\cos^2(\operatorname{Arctan}(x))} = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}(x))}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

3. On a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1-\cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1-\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.
Cette fois, le sinus n'est pas toujours positif.
Toutefois, notons que si $x \geqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) \geqslant 0$, de sorte que

$$\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \sqrt{\sin^2(\operatorname{Arctan}(x))} = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

En revanche, si $x \leqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et donc $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) \leqslant 0$.
Et donc

$$\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = -\sqrt{\sin^2(\operatorname{Arctan}(x))} = -\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. Il s'agit cette fois d'utiliser la formule d'addition pour le cosinus : pour x, y réels,

$$\begin{aligned}\cos(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)) &= \cos(\operatorname{Arctan}(x))\cos(\operatorname{Arctan}(y)) - \sin(\operatorname{Arctan}(x))\sin(\operatorname{Arctan}(y))\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\\ &= \boxed{\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}.}\end{aligned}$$

5. Puisque chacun des deux nombres $\operatorname{Arctan}(x)$ et $\operatorname{Arctan}(y)$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, leur somme est dans $]-\pi, \pi[$.
Et comme $xy \neq 1$, $\cos(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)) \neq 0$, de sorte que $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)$ ne peut être égal à $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

6. Utilisons la formule pour $\tan(a+b)$, qui s'applique bien ici puisque les trois nombres $\operatorname{Arctan}(x)$, $\operatorname{Arctan}(y)$ et $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Il vient alors

$$\tan(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y)) = \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(x))+\tan(\operatorname{Arctan}(y))}{1-\tan(\operatorname{Arctan}(x))\tan(\operatorname{Arctan}(y))} = \boxed{\frac{x+y}{1-xy}.}$$

Rappel

La formule pour $\tan(a+b)$ ne s'applique que si les trois nombres $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ sont bien définis.
C'est-à-dire lorsque a, b et $a+b$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

7. **Premier cas.**
Il s'agit de remarquer que $1-xy>0$, et donc $\cos(\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y))\geqslant 0$.
Mais un réel de $]-\pi,\pi[$ ne possède un cosinus strictement positif que s'il est dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, de sorte que
$$\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$
Nous avons donc prouvé que $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)$ est un réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\dfrac{x+y}{1-xy}$.
Or, il existe un seul tel réel, c'est $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$. Et donc $\boxed{\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right).}$

8. **Second cas** : cette fois, $\cos\left(\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)\right)<0$, de sorte que $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.
Mais puisque $x>0$, $\mathrm{Arctan}(x)\geqslant 0$, de sorte que $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)\geqslant\mathrm{Arctan}(y)>-\frac{\pi}{2}$.
Donc nécessairement, $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.
Mais alors $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)-\pi\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[\subset\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Et de plus, par π-périodicité de la fonction tangente,
$$\tan\left(\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)+\pi\right)=\tan\left(\mathrm{Arctan}(x)+\arctan(y)\right)=\frac{x+y}{1-xy}.$$
On en déduit, comme à la question précédente, que
$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)-\pi=\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\Leftrightarrow\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)=\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+\pi.}$$

9. **Troisième cas.** On a toujours, pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.
Mais $\mathrm{Arctan}(x)<0$, donc $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)<\mathrm{Arctan}(y)<\frac{\pi}{2}$ et donc $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)+\pi\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, et donc
$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)=\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)-\pi.}$$

Remarque
Ce cas est celui où on ne peut pas appliquer, à la question 6, la formule pour la tangente d'une somme.
En effet, bien que $\tan(\mathrm{Arctan}(x))$ et $\tan(\mathrm{Arctan}(y))$ soient définies, la tangente de leur somme ne l'est pas.
Mais si on ne voit pas ceci, on sent bien que la présence du $1-xy$ au dénominateur nous interdit implicitement $xy=1$.

10. Si $xy=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$, alors nous savons que
$$\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}(y)=\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } x>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0\end{cases}.$$

Seconde méthode : avec du calcul différentiel

11. Le seul problème et celui où le dénominateur est nul, c'est-à-dire si $x=\frac{1}{y}$.
Donc $\boxed{\mathscr{D}_y=\left]-\infty,\frac{1}{y}\right[\cup\left]\frac{1}{y},+\infty\right[.}$

12. La fonction $a_y : x\mapsto\dfrac{x+y}{1-xy}$ est dérivable sur $\mathscr{D}_y$, et la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier, donc par composition de fonctions dérivables, φ_y est dérivable sur $\mathscr{D}_y$.
On a alors, pour tout $x\in\mathscr{D}_y$,
$$\begin{aligned}\varphi_y'(x)&=a_y'(x)\frac{1}{1+a_y(x)^2}=\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\\&=\frac{y^2+1}{(1-xy)^2}\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}=\frac{y^2+1}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}=\frac{y^2+1}{(1+x^2)(1+y^2)}\\&=\boxed{\frac{1}{1+x^2}.}\end{aligned}$$

13. On en déduit que sur chacun des intervalles $\left]-\infty, \frac{1}{y}\right[$ et $\left]\frac{1}{y}, +\infty\right[$, φ_y est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
Ceci signifie qu'il existe une constante A telle que pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{y}\right[$, $f_y(x) = \operatorname{Arctan}(x) + A$.
Or, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+y}{1-xy} = -\frac{1}{y}$, de sorte que

$$A = \lim_{x\to-\infty} (\varphi_y(x) - \operatorname{Arctan}(x)) = \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{y}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{y}\right).$$

Si $y > 0$, nous reconnaissons là $\operatorname{Arctan}(y)$.
Et donc pour $y > 0$ et $x < \frac{1}{y} \Leftrightarrow xy < 1$, on a donc $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.
Si $y < 0$, on a donc pour $x < \frac{1}{y} \Leftrightarrow xy > 1$,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{y}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{y}\right) = \pi + \operatorname{Arctan}(y).$$

Et donc $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) + \pi$.

De même, il existe une constante B telle que pour $x > \frac{1}{y}$, $\varphi_y(x) = \operatorname{Arctan}(x) + B$.
Un passage à la limite[2] nous donne alors toujours $B = -\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{y}\right) - \dfrac{\pi}{2}$.
Pour $y > 0$, et pour $x > \frac{1}{y} \Leftrightarrow xy > 1$, on obtient donc

$$\varphi_y(x) = -\operatorname{Arctan}(y) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \text{ donc } \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \pi.$$

Enfin, on conclut sur le même principe dans le dernier cas.

Danger ! Ne pas conclure trop vite, il s'agit bien de se restreindre à des intervalles, ce que n'est pas $\mathscr{D}_y$.

[2] Cette fois en $+\infty$.

Bonus : la formule de Machin

14. Si $x \in [0, 1[$, alors $x^2 < 1$, et donc

$$2\operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+x}{1-x^2}\right).$$

15. En appliquant une première fois la formule, on obtient

$$2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right).$$

Et alors une seconde application de cette même formule nous conduit à

$$4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right).$$

16. Et donc il vient enfin,

$$4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right) + \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{239}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\times 239}}\right).$$

Mais[3] :

$$\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\times239}} = \frac{120\times239-119}{119\times239+120} = \frac{120\times239-120+1}{119\times239+119+1} = \frac{120\times238+1}{119\times240+1} = \frac{120\times119\times2+1}{119\times2\times120+1} = 1.$$

Et puisque $\operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$, on a bien prouvé la formule de Machin.

[3] Sans calculatrice !

EXERCICE

Partie I. Un calcul de somme.

1. Il s'agit de remarquer que pour $k = n+1$, $\binom{n}{k} = 0$, et donc $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}$. Et donc

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k}(-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right](-1)^{k-1}.$$

2. C'est la formule[4] donnée en cours sous la forme $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

En utilisant $n+1$ plutôt que n, on a $k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}$, soit encore

$$\boxed{\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.}$$

Si vous ne pensez pas à la formule en question, tout ceci se retrouve aisément à l'aide de factorielles.

[4] La «formule du capitaine».

3. On a, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$, d'après l'identité de Pascal, $\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$.

Et donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}(-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1} - (-1)^0\right) = \frac{1}{n+1}\left((1-1)^{n+1} + 1\right) = \boxed{\frac{1}{n+1}}. \end{aligned}$$

Astuce

Il s'agit d'une somme télescopique.
Lorsqu'on connaît $v_n = u_{n+1} - u_n$, il est facile de faire apparaître u_n à l'aide d'une somme de v_k.

4. On a alors, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n-1}(S_{k+1} - S_k) = S_n - S_1$.

Mais $S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}\binom{1}{k}(-1)^{k-1} = 1$.

Et donc $S_n - S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$, soit encore $S_n = S_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = H_n$.

Partie II. Un équivalent de H_n.

5. La suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante puisque pour tout $n \geqslant 1$,

$$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geqslant 0.$$

Donc par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite, finie ou égale à $+\infty$.

6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} \geqslant n\frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Détails

Tous les $\frac{1}{k}$, pour $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$ sont inférieurs à $\frac{1}{2n}$.

Supposons par l'absurde que (H_n) possède une limite finie ℓ. Alors $\lim_{n\to+\infty} H_{2n} = \ell$, et donc $\lim_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = \ell - \ell = 0$.

Mais alors par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente, $\frac{1}{2} \leqslant 0$, ce qui est absurde.

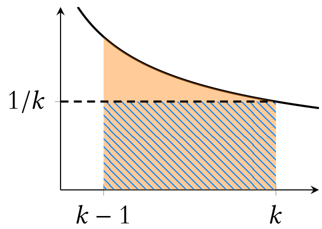
On en déduit donc que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.}$

Remarque

Bien entendu, si $H_n \to +\infty$, on ne peut pas calculer $\lim_{n\to+\infty} H_{2n} - H_n$, puisqu'il s'agit d'une forme indéterminée.

7.a. Il s'agit de remarquer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k-1, k]$, et donc que pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t}$.

Et donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.



L"aire de la partie colorée est $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k}$.
L'aire de la partie hachurée (qui est un rectangle de longueur 1 et de hauteur $1/k$) est $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k}$.

Ne perdons pas de vue que $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{dt}{k}$ est l'intégrale d'une constante : elle vaut donc $\displaystyle\frac{1}{k}\int_{k}^{k+1} 1\,dt = \frac{1}{k}$. Sur le même principe, en notant que pour $t \in [k, k+1]$, $\displaystyle\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$, on prouve l'autre inégalité.

7.b. Soit $n \geqslant 2$.
Sommons les inégalités précédemment obtenues pour k allant de 2 à n.

Il vient alors $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

Mais par la relation de Chasles[5], le membre de gauche n'est rien d'autre que

$$\int_{2}^{3} \frac{dt}{t} + \int_{3}^{4} \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t} = \int_{2}^{n+1} \frac{dt}{t}.$$

De même pour le membre de droite, qui vaut $\displaystyle\int_{1}^{n} \frac{dt}{t}$.

Mais, comme à la question précédente, on a $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dt}{t} \leqslant 1$.

Et donc

$$\int_{1}^{2} \frac{dt}{t} + \int_{2}^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \Leftrightarrow \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} + \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant H_n.$$

Ne reste alors qu'à constater que

$$\int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t} = [\ln t]_{n}^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Et pour l'autre inégalité, il suffit d'ajouter 1 aux deux membres de l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_{2}^{n} \frac{dt}{t}$ pour obtenir l'inégalité souhaitée.

7.c. Cette fois nous pouvons calculer les intégrales de la question précédente : $\displaystyle\int_{1}^{n} \frac{dt}{t} = \ln(n)$.
Et donc pour $n \geqslant 2$, on obtient

$$1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \leqslant \frac{H_n}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} + 1.$$

Par le théorème des gendarmes, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, il vient $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1.}$

Commentaire *: ceci signifie que la suite (H_n) tend bien vers $+\infty$, mais très lentement, «à la même vitesse» que $\ln(n)$, puisque le quotient des deux finit par être très proche de 1.*

[5] Pour les intégrales.