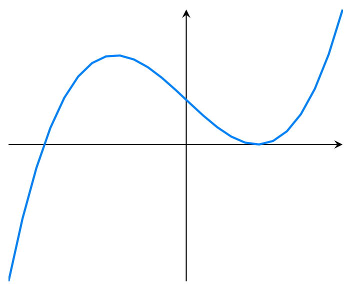
DEVOIR MAISON 5

EXERCICE : MÉTHODE DE CARDAN POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE DEGRÉ 3

Le but de cet exercice est de présenter la méthode de Cardan (JÉRÔME CARDAN : 1501–1576) pour la résolution des équations polynomiales de degré 3.
Cette méthode serait en fait due à NICCOLÒ TARTAGLIA (1499–1557), qui l'avait apprise à Cardan contre la promesse de garder cette méthode secrète, promesse qui ne fut pas tenue.
Dans tout le problème, j désigne le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. *Les valeurs exactes de* $\mathrm{Re}(j)$ *et* $\mathrm{Im}(j)$ *ne nous seront d'aucune utilité avant la question 7.*

Partie I. Nombre de racines réelles de $x^3 + px + q$

1. Soit $f : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ une fonction polynomiale, avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels.
À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que si f est de degré impair, alors l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution réelle.
2. Soient p et q deux réels, et soit $f : x \mapsto x^3 + px + q$.
   a. Montrer que si $p \geqslant 0$, alors f possède une unique racine réelle.
   b. Montrer que si $p < 0$, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes, où α est un réel positif que l'on précisera :
      i) f possède trois racines réelles distinctes.
      ii) $f(-\alpha)f(\alpha) < 0$
      iii) $4p^3 + 27q^2 < 0$.



Partie II. Méthode de Cardan dans un cas particulier.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation (E) : $z^3 + pz + q = 0$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$, et où p, q sont deux complexes fixés, avec $p \neq 0$ (ce cas ayant déjà été traité en cours : les solutions de $z^3 + q = 0$ sont les racines cubiques de $-q$).

On note alors $\Delta = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$, et on note δ une racine carrée de Δ.

3. Soient $(u, v) \in \mathbf{C}^2$. Montrer que $u+v$ est solution de (E) si et seulement si $u^3+v^3+(p+3uv)(u+v)+q = 0$.
4. Soit z_0 une solution de (E).
   a. Justifier qu'il existe $(u, v) \in \mathbf{C}^2$ tels que $\begin{cases} u + v = z_0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$.

   Dans toute la suite de la question, u et v sont fixés, et tels que $\begin{cases} u + v = z_0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$.

   b. En considérant $u^3 + v^3$ et u^3v^3, montrer que $\{u^3, v^3\}$ est l'ensemble des solutions d'une équation de degré 2 que l'on précisera. Exprimer alors les solutions de cette équation à l'aide de q et δ.
   c. Soit u_0 une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$ et v_0 une racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$.
   Quelles sont les autres racines cubiques de $\frac{-q-\delta}{2}$?
   Montrer que quitte à remplacer v_0 par une autre racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$, on peut faire l'hypothèse que $u_0v_0 = -\frac{p}{3}$.
   d. On suppose que u_0 (respectivement v_0) est une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$ (resp. de $\frac{-q-\delta}{2}$) telles que $3u_0v_0 + p = 0$. Montrer que l'ensemble

$$\left\{(a, b) \in \mathbf{C}^2 \,\middle|\, a^3 = \frac{-q+\delta}{2} \text{ et } b^3 = \frac{-q-\delta}{2} \text{ et } 3ab + p = 0\right\}$$

contient au plus trois éléments, que l'on exprimera en fonction de u_0 et v_0.

e. En déduire que $z_0 \in \{u_0 + v_0, u_0 j + v_0 j^2, u_0 j^2 + v_0 j\}$.

5. Inversement, et **sans faire de nouveaux calculs**, prouver que si u_0 est une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$ et que v_0 est une racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$ telles que $3u_0v_0 + p = 0$, alors $u_0 + v_0$, $u_0 j + v_0 j^2$ et $u_0 j^2 + v_0 j$ sont solutions de (E).

6. (★) On suppose dans cette question que p et q sont réels.
Prouver que si $\Delta < 0$, alors les racines cubiques de $\frac{-q-\delta}{2}$ sont les conjugués des racines cubiques de $\frac{-q+\delta}{2}$.
Retrouver alors le résultat de la partie I, à savoir le nombre de solutions réelles de (E) en fonction du signe de Δ.

7. Mettre en œuvre la méthode précédente pour résoudre $z^3 - 6iz - 1 + 8i = 0$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

8. *(Facultatif)* Résoudre l'équation $z^3 - 15z - 4 = 0$.
On pourra remarquer que $(2+i)^3 = 2 + 11i$, *mais les plus motivés pourront ignorer cette indication et sortir leurs plus belles formules de trigonométrie. Dans ce cas, vous pourriez avoir besoin de l'identité* $\operatorname{Arctan} \frac{11}{2} = 3 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2}$ *(que vous prouverez) pour simplifier vos solutions.*

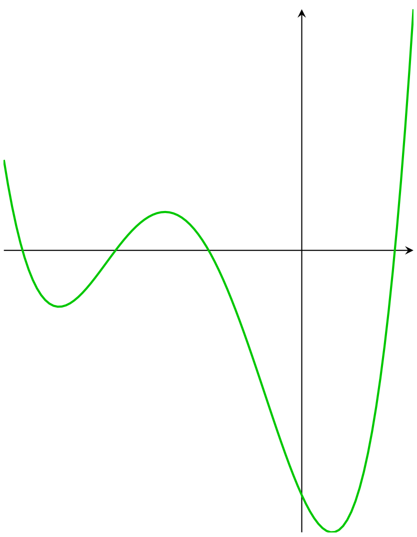
Partie III. Résolution de l'équation générale

Soit (E) : $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ une équation polynomiale de degré 3, avec a, b, c, d complexes.

9. Prouver qu'à l'aide d'un changement de variable de la forme $z = x + \lambda$, où λ est un complexe bien choisi, on peut se ramener à une équation de la forme $z^3 + pz + q = 0$.

10. Déterminer alors les solutions de $z^3 - (6+3i)z^2 + (9+6i)z + 9i - 9 = 0$.

Partie IV. La méthode de Ferrari pour les équations de degré 4.



Cette partie est facultative et expose la méthode de Ludovico Ferrari *(1522–1565 : élève de Cardan) pour résoudre les équations de degré 4 si l'on sait résoudre les équations de degré 3.*

Dans cette partie, on considère a, b, c, d quatre complexes, et on s'intéresse à l'équation :

$$(E_4) : z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \text{ d'inconnue } z \in \mathbf{C}.$$

11. En vous inspirant de la question 9, prouver qu'on peut se ramener à la résolution d'une équation de la forme $(E_4') : z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, avec $(p, q, r) \in \mathbf{C}^3$.

12. Comment résoudre (E_4') dans le cas où $q = 0$? Combien de solutions obtient-on alors au maximum ?

Dans la suite, on suppose donc $q \neq 0$.

13. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $z^4 + pz^2 + qz + r = (z^2 + \lambda)^2 - \left[(2\lambda - p)z^2 - qz + \lambda^2 - r\right]$.

14. Soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{\frac{p}{2}\}$. Prouver qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $(2\lambda - p)z^2 - qz + \lambda^2 - r = (\alpha z + \beta)^2$ si et seulement si λ est solution de l'équation (de degré 3) (E_3') : $8z^3 - 4pz^2 - 8rz + 4rp - q^2 = 0$.
Cette équation est appelée la cubique résolvante de (E_4).

15. Justifier que (E_3') possède au moins une solution. Soit λ_0 une solution de (E_3'), et soient α, β comme dans la question précédente.
En utilisant une identité remarquable, expliquer comment trouver les solutions de (E_4). *On ne demande pas de formule explicite pour ces solutions.*
On justifiera notamment qu'il existe au plus 4 solutions.

16. Résoudre l'équation : $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4 = 0$.
On pourra chercher une racine évidente de la cubique résolvante plutôt que d'appliquer la méthode de Cardan.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 5

PROBLÈME

Partie I. Nombre de racines réelles de $x^3 + px + q$.

1. Supposons donc n impair, avec $a_n \neq 0$ (c'est-à-dire f de degré exactement n, et pas seulement de degré au plus n).

Si $a_n > 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x_n \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + a_{n-2}\frac{1}{x^2} + \cdots + a_0\frac{1}{x^n}\right) = +\infty$.

Et de même, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Ainsi, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) < 0$, et il existe $b \geqslant a$ tel que $f(b) \geqslant 0$.

Puisque f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = 0$, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution.

De même, si $a_n < 0$, alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Et donc, toujours par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$.

⚠ *Notons que tout ceci est faux si f est de degré pair, car alors les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f sont égales (toutes deux égales à $-\infty$ ou à $+\infty$ suivant le signe du coefficient dominant).*

Détails
Si f ne prenait que des valeurs positives, elle ne pourrait tendre vers $-\infty$ en $-\infty$.
Et de même si elle ne prenait que des valeurs négatives sur $]a, +\infty[$, elle ne pourrait tendre vers $+\infty$ en $+\infty$.
Tout ceci est assez intuitif pour l'instant, mais nécessitera d'être reprécisé lorsque nous aurons une bonne définition de limite.

2.a. Notons que la dérivée de f est $f' : x \mapsto 3x^2 + p$.

Si $p \geqslant 0$, cette dérivée ne prend que des valeurs positives sur $\mathbf{R}$, et ne s'annule au plus qu'une seule fois (en $x = 0$ lorsque $p = 0$).

Donc f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Par conséquent, elle peut s'annuler au plus une seule fois. Par la question précédente, elle s'annule au moins une fois.

Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ possède une unique solution.}}$

2.b. Si $p < 0$, la dérivée de f s'annule en deux points, qui sont $x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$.

On a alors $f(x_2) = \left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q = -\frac{p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}} + \frac{p\sqrt{-p}}{\sqrt{3}} + q$.

Et de même, $f(x_1) = \frac{p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}} - \frac{p\sqrt{-p}}{\sqrt{3}} + q$.

Le tableau de variations de f est donc donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Notons donc $\alpha = x_2$, de sorte que $x_1 = -\alpha$.

Par stricte monotonie de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -\alpha]$, $]-\alpha, \alpha]$ et $]\alpha, +\infty[$, f ne peut posséder qu'au plus une racine sur chacun de ces intervalles.

Donc f possède trois racines réelles distinctes si et seulement si elle en possède exactement une sur chacun de ces intervalles.

Ce qui est le cas si et seulement si $f(-\alpha) > 0$ et $f(\alpha) < 0$.

Puisqu'on a toujours $f(-\alpha) > f(\alpha)$, ces deux nombres sont de signes opposés si et seulement si $f(-\alpha) > 0$ et $f(\alpha) < 0$. Donc déjà *i*) $\Leftrightarrow$ *ii*).

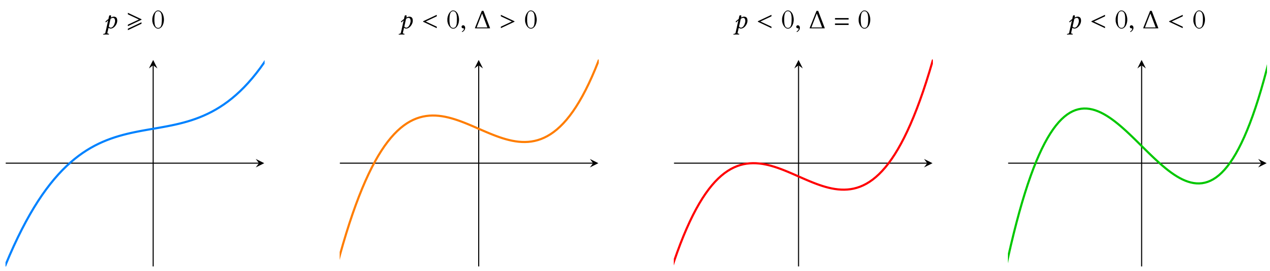
Détails
Le théorème des valeurs intermédiaires se cache ici : si $f(-\alpha) > 0$, alors il existe une racine dans $]-\infty, -\alpha]$.

Pour *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*), il suffit de développer $f(-\alpha)f(\alpha)$:

$$\begin{aligned} f(-\alpha)f(\alpha) &= \left[q + \left(\frac{p\sqrt{-p}}{\sqrt{3}} - \frac{p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}\right)\right]\left[q - \left(\frac{p\sqrt{-p}}{\sqrt{3}} - \frac{p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}\right)\right] \\ &= q^2 - \left(\frac{p\sqrt{-p}}{\sqrt{3}} - \frac{p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}\right)^2 = q^2 - \left(-\frac{p^3}{3} + \frac{2}{9}p^3 - \frac{p^3}{27}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{27q^2 + 4p^3}{27}.$$

Et donc on a bien $f(\alpha)f(-\alpha) < 0 \Leftrightarrow 27q^2 + 4p^3 < 0$.
Ce qui achève bien de prouver que *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii)*.



Partie II.

3. On a $(u+v)^3+p(u+v)+q = u^3+v^3+3u^2+3uv^2+uv+p(u+v)+q = u^3+v^3+(p+3uv)(u+v)+q$.
Et donc le membre de gauche est nul (c'est-à-dire $u+v$ est solution de (E)) si et seulement si le membre de droite est nul.

4.a. Le système $\begin{cases} u+v = z_0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = z_0 \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$ possède toujours une solution[1] qui est un couple formé des deux racines[2] de $z^2 - z_0 z - \frac{p}{3} = 0$.
Donc il existe bien (u, v) vérifiant les conditions requises.

[1] Et généralement deux.

[2] Éventuellement confondues.

4.b. Si $p + 3uv = 0$, alors $u^3v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}$.
Mais par la question 3, $u^3 + v^3 + \underbrace{(3p+uv)}_{=0}(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 = -q$.

Il est alors classique que u^3 et v^3 sont les solutions de $\boxed{z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.}$

Rappel

Deux complexes u et v satisfont $\begin{cases} u+v = s \\ uv = p \end{cases}$ si et seulement si $\{u, v\}$ est l'ensemble des solutions de $z^2 - sz + p = 0$.

Cette équation possède $q^2 + \frac{4p^3}{27} = \Delta$ comme discriminant, et δ étant une racine carrée de Δ, $\boxed{\text{ses solutions sont } \frac{-q-\delta}{2} \text{ et } \frac{-q+\delta}{2}.}$

4.c. Rappelons que si on dispose d'une racine $n^{\text{ème}}$ z_0 d'un complexe a, alors les autres racines $n^{\text{èmes}}$ de a sont les $z_0\omega$, $\omega \in \mathbb{U}_n$.
Or ici, $n = 3$, donc $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$.
Et donc $\boxed{\text{les autres racines cubiques de } \frac{-q-\delta}{2} \text{ sont } jv_0 \text{ et } j^2v_0.}$
De plus, par hypothèse, $u_0^3v_0^3 = -\frac{p^3}{27}$, de sorte que u_0v_0 est une racine cubique de $-\frac{p^3}{27}$.
L'une de ces racines est évidemment $-\frac{p}{3}$, et les autres sont donc $-\frac{p}{3}j$ et $-\frac{p}{3}j^2$.

Dans le cas où $u_0v_0 = -\frac{p}{3}j$, alors on a $u_0\left(v_0j^2\right) = -\frac{p}{3}j^3 = -\frac{p}{3}$. Donc il est possible de remplacer v_0 par v_0j^2.
Et si $u_0v_0 = -\frac{p}{3}j^2$, alors $u_0v_0j = -\frac{p}{3}j^3 = -\frac{p}{3}$.
Donc dans tous les cas, quitte à remplacer v_0 par une autre racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$, on peut bien faire l'hypothèse que $uv = -\frac{p}{3}$.

4.d. Si $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ est un couple de complexes tels que $a^3 = \frac{-q+\delta}{2}$ et $b^3 = \frac{-q-\delta}{2}$ et $3ab + p = 0$, alors $a \in \{u_0, u_0j, u_0j^2\}$ et $b \in \{v_0, v_0j, v_0j^2\}$.
Donc (a, b) est l'un des neuf[3] couples suivants :

$$(u_0, v_0), (u_0, v_0j), (u_0, v_0j^2), (u_0j, v_0), (u_0j, v_0j), (u_0j^2, v_0), (u_0j^2, v_0j), (u_0j^2, v_0j^2).$$

[3] Il s'agit de tous les couples formés d'une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$ et d'une racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$.

Nous savons déjà que, par hypothèse, $3u_0v_0 + p = 0$.
Donc $u_0(v_0j) = -\frac{p}{3}j \neq -\frac{p}{3}$. Et de même, $u_0(v_0j^2), (u_0j)(v_0j), (u_0j)v_0, (u_0j^2v_0)$ et $(u_0j^2)(v_0j^2)$ sont tous différents de $-\frac{p}{3}$.
En revanche, $(u_0j)(v_0j^2) = (u_0j^2)(v_0j) = u_0v_0j^3 = u_0v_0 = -\frac{p}{3}$.
Donc il y a en tout **au plus** (il y en a strictement moins si $\Delta = 0$) trois couples (a, b) satisfaisant les conditions demandées.

Plus élégant

Les couples qui conviennent sont les

$$\left(u_0j^k, v_0\overline{j}^k\right), 0 \leqslant k \leqslant 2.$$

4.e. Nous savons par ce qui précède que $\{u^3, v^3\} = \left\{\frac{-q+\delta}{2}, \frac{-q-\delta}{2}\right\}$.
Quitte à échanger[4] u et v, on peut supposer que $u^3 = \frac{-q+\delta}{2}$ et $v^3 = \frac{-q-\delta}{2}$.
Et donc (u, v) est l'un des trois couples précédemment obtenus.
Mais puisque z_0 est la somme des éléments d'un tel couple, on en déduit que nécessairement, $\boxed{z_0 \in \left\{u_0 + v_0, u_0 j + v_0 j^2, u_0 j^2 + v_0 j\right\}.}$

[4] Ce qui ne change pas la valeur de $u + v$.

5. Soit donc $k \in [\![0, 2]\!]$, prouvons que $u_0 j^k + v_0 \overline{j}^k$ est solution de (E).
On a alors $3u_0 j^k v_0 \overline{j}^k + p = 3u_0 v_0 + p = 0$.
Et $\left(uj^k\right)^3 = u_0^3 j^{3k} = u_0^3 = \frac{-q+\delta}{2}$, et de même $\left(v_0 \overline{j}^k\right)^3 = \frac{-q-\delta}{2}$.
Donc $\left(u_0 j^k\right)^3 + \left(v_0 \overline{j}^k\right)^3 = -q$, de sorte qu'en reprenant l'égalité de la question 3, $u_0 j^k + v_0 \overline{j}^k$ est bien solution de (E).

6. Notons que si p et q sont réels, alors il en est de même de Δ.
Si $\Delta \geqslant 0$, alors on peut prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$. Et alors $u_0 = \sqrt[3]{\frac{-q+\delta}{2}}$ et $v_0 = \sqrt[3]{\frac{-q-\delta}{2}}$ vérifient bien

$$u_0 v_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(-q+\delta)(-q-\delta)} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(q^2 - \delta^2)} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}.$$

Et donc les solutions de l'équation sont $u_0 + v_0, u_0 j + v_0 j^2, u_0 j^2 + v_0 j$.
La première est évidemment réelle.
Les deux autres sont conjuguées car $j^2 = \overline{j}$.
Elles ne seront réelles que si elles sont égales. Or en considérant sa partie imaginaire, il est facile de constater que $u_0 j + v_0 j^2 \in \mathbf{R}$ si et seulement si $u_0 = v_0$ (car les parties imaginaires de j et de j^2 sont opposées). Ceci ne se produit que lorsque $\delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$.
Donc pour $\Delta > 0$, il n'y a qu'une seule racine réelle et deux racines complexes conjuguées.
Et pour $\Delta = 0$, il y a au plus deux racines réelles.

Au plus

Nous avons dit que les trois racines trouvées précédemment sont réelles, que les deux dernières sont égales (car conjuguées), mais il se peut encore que les trois racines soient égales. En pratique, ceci ne se produit que pour $p = q = 0$.

En revanche, si $\Delta < 0$, alors $\frac{-q+\delta}{2}$ et $\frac{-q-\delta}{2}$ ne sont pas réelles, mais sont conjuguées.
Dans ce cas, pour $z \in \mathbf{C}$, on a $z^3 = \frac{-q+\delta}{2} \Leftrightarrow \overline{z}^3 = \overline{\frac{-q+\delta}{2}} = \frac{-q-\delta}{2}$.
Donc les racines cubiques de $\frac{-q+\delta}{2}$ sont bien les conjugués des racines cubiques de $\frac{-q-\delta}{2}$.
En particulier, si u_0 est une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$, alors $v_0 = \overline{u_0}$ est une racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$, et $u_0 v_0 = |u_0|^2 \in \mathbf{R}$.
Or nous avons vu dans la question 4.d que les seules valeurs possibles pour le produit d'une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$ par une racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$ sont $-\frac{p}{3}, -\frac{p}{3}j$ et $-\frac{p}{3}j^2$.
Seule la première est réelle, donc $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$.
On en déduit que les solutions de l'équation sont

$$u_0 + \overline{u_0} = 2\,\mathrm{Re}(u_0),\ u_0 j + \overline{u_0} \underbrace{j^2}_{=\overline{j}} = u_0 j + \overline{u_0 j} = 2\,\mathrm{Re}(u_0 j) \text{ et } u_0 j^2 + \overline{u_0} j = 2\,\mathrm{Re}(u_0 j^2).$$

Donc déjà, ces trois solutions sont réelles, reste à voir qu'elles sont distinctes. Autrement dit, que les trois nombres $\mathrm{Re}(u_0), \mathrm{Re}(u_0 j)$ et $\mathrm{Re}(u_0 j^2)$ sont deux à deux distincts.
Prouvons que $\mathrm{Re}(u_0) \neq \mathrm{Re}(u_0 j)$, le raisonnement se transpose sans difficultés pour prouver que toutes ces racines sont deux à deux distinctes.
Notons θ l'argument de u_0. Alors $\theta + \frac{2\pi}{3}$ est un argument de $u_0 j$.
Puisque $|u_0| = |u_0 j|$, $\mathrm{Re}(u_0) = \mathrm{Re}(u_0 j)$ si et seulement si $\cos\theta = \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$.
Soit si et seulement si

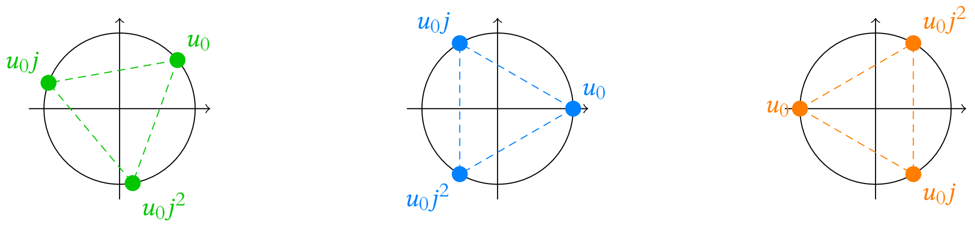
$$\theta + \frac{2\pi}{3} \equiv -\theta \quad [2\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [\pi].$$

Argument

Rappelons que l'argument d'un produit est la somme des arguments.

Mais si $\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [\pi]$, alors $3\theta \equiv -\pi\ [3\pi]$, et en particulier, $3\theta \equiv 0\ [\pi]$, de sorte que $u_0^3 = |u_0|^3 e^{3i\theta}$ est un réel.
Or nous avons dit précédemment que $u_0^3 = \frac{-q+\delta}{2}$ n'est pas réel.
Donc on a bien $\mathrm{Re}(u_0) \neq \mathrm{Re}(u_0 j)$.
Ce que nous venons (laborieusement) de prouver sur les parties réelles est en fait assez facile à comprendre graphiquement.

Il s'agit de prouver que si $z \notin \mathbf{R}$, alors les trois racines cubiques de z ont des parties réelles deux à deux distinctes.
Mais ces trois racines cubiques partagent en trois parties égales un cercle de rayon $\sqrt[3]{|z|}$.



$\theta \not\equiv 0 \ [\pi]$ $\qquad$ $\theta \equiv 0 \ [2\pi]$ $\qquad$ $\theta \equiv \pi \ [2\pi]$

Il est assez facile de se convaincre que deux de ces trois points ont même abscisse si et seulement si $\theta \equiv 0 \ [\pi]$, ce qui est le cas si et seulement z possède une racine cubique réelle, donc si et seulement si $z \in \mathbf{R}$.

Bref, nous venons de prouver que pour $\Delta < 0$, les trois solutions de (E) sont réelles et deux à deux distinctes.

7. On a donc $\Delta = (-1+8i)^2 + 32i = 1 - 16i - 64 + 32i = -63 + 16i$.
On a alors $|\Delta| = \sqrt{16^2 + 63^2} = 65$.
Cherchons alors une racine carrée de Δ sous la forme $\delta = a + ib$.
Le système usuel s'écrit : $\begin{cases} a^2 - b^2 = -63 \\ 2ab = 16 \\ a^2 + b^2 = 65 \end{cases}$ qui nous conduit à $\delta = \pm(1+8i)$.
Prenons dans la suite $\delta = 1 + 8i$.
Alors, avec les notations des questions précédentes, $\frac{-q+\delta}{2} = \frac{1-8i+1+8i}{2} = 1$ et $\frac{-q-\delta}{2} = \frac{1-8i-1-8i}{2} = -8i$.
Une racine cubique de 1 est 1, et une racine cubique de $-8i$ est $2i$.
Et on a alors $1 \times 2i = -\frac{-6i}{3} = -\frac{p}{3}$.
Donc on peut prendre $u_0 = 1$ et $v_0 = 2i$, de sorte que les solutions de l'équation $z^3 - 6iz - 1 + 8i$ sont $\boxed{1+2i}$ et

$$j + 2ij^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} + \sqrt{3} + i\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$j^2 + 2ij = \boxed{-\frac{1}{2} - \sqrt{3} + i\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).}$$

8. La méthode est la même : $\Delta = 16 - 500 = -484 = -22^2$.
Donc $\frac{-q+\delta}{2} = 2 + 11i$ et $\frac{-q-\delta}{2} = 2 - 11i$.

> **Racines cubiques**
> Rappelons que nous ne disposons pas de méthode pour trouver les racines cubiques sous forme algébrique, et que si on ne les donnait pas ici, il serait difficile de les trouver seuls.

► **<u>Première méthode :</u>** utilisons l'indication de l'énoncé : une racine cubique de $2 + 11i$ est $2 + i$, et donc une racine cubique de $2 - 11i$ est $2 - i$.
Comme à la question 6 (nous sommes bien dans le cas d'une équation à coefficients réels), on peut prendre $u_0 = 2 + i$ et $v_0 = 2 - i$, de sorte que les solutions de l'équation sont

$$\boxed{4, (2+i)j + (2-i)j^2 = -2 - \sqrt{3} \text{ et } (2+i)j^2 + (2-i)j = \sqrt{3} - 2.}$$

Notons aussi qu'une fois trouvée la racine 4, les autres sont faciles à obtenir à l'aide en factorisant $z^3 - 15z - 4$ par $z - 4$, ce qui nous ramène à la résolution d'une équation de degré 2 (qui est $z^2 + 4z + 1 = 0$).

► **<u>Seconde méthode :</u>** ignorons l'indication pour trouver une racine cubique de $2 + 11i$.
On a alors $|2 + 11i| = \sqrt{125}$, et $\arg(2 + 11i) = \operatorname{Arctan} \frac{11}{2}$.
Donc une racine cubique de $2 + 11i$ est $\sqrt[3]{\sqrt{125}}e^{i\frac{\theta}{3}}$.
Mais alors $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$.

Et donc on peut, comme précédemment[5] prendre $u_0 = \sqrt{5}e^{i\frac{\theta}{3}}$ et $v_0 = \overline{u_0} = \sqrt{5}e^{-i\frac{\theta}{3}}$.
Donc les solutions de l'équation sont

$$u_0 + v_0 = 2\sqrt{5}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right),\ u_0 j + v_0 j^2 = \sqrt{5}\left(e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}} + e^{-i\frac{\theta+2\pi}{3}}\right) = 2\sqrt{5}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$u_0 j^2 + v_0 j = 2\sqrt{5}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right).$$

[5] On est toujours dans le cas d'une équation à coefficients réels.

Seulement, il n'existe pas de méthode permettant en général de simplifier
$\cos\dfrac{\theta}{3} = \cos\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{11}{2}\right)\right)$.
Prouvons donc la formule donnée dans l'énoncé, à savoir $\operatorname{Arctan}\frac{11}{2} = 3\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}$.
Pour cela, notons qu'à l'aide de la formule d'addition des tangentes,

$$\tan(3x) = \tan(2x+x) = \frac{\tan(2x)+\tan(x)}{1-\tan(x)\tan(2x)} = \frac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^2 x}.$$

Et donc en particulier, $\tan\left(3\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}$.
Puisque $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $0 < \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$, et donc $3\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, de sorte que $3\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} = \operatorname{Arctan}\frac{11}{2}$.
Et donc $\cos\frac{\theta}{3} = \cos\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
Ouf ! On retrouve donc $u_0 + v_0 = 4$ (et oui, tout ça pour ça...), puis les deux mêmes racines que précédemment.

Un peu d'histoire
Exprimer «facilement» $\cos\frac{\theta}{3}$ en fonction de $\cos\theta$ est un problème qui intriguait déjà les grecs antiques, connu sous le nom de trissection de l'angle.
On sait depuis les travaux de WANTZEL au milieu du XIX$^{\text{ème}}$ qu'il n'existe pas de formule générale.

Détails
La formule

$$\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

a été prouvée dans le dernier DM.

Ce que montre cet exemple c'est que si la méthode de Cardan donne des formules pour les racines, ces formules peuvent être désagréables, et écrire un nombre aussi simple que 4 sous une forme compliquée où on ne le reconnait pas facilement.
Cet exemple a une importance historique, puisqu'il semblerait que c'est sur cette équation que Bombelli, élève de Cardan, osa pour la première fois introduire un nombre imaginaire[6] qui serait une racine carrée de -1.

[6] Qui est ce que nous notons aujourd'hui i.

Partie III. Résolution de l'équation générale.

9. Posons $z = x + \lambda$, où $\lambda \in \mathbf{C}$ est un complexe fixé.
Alors z est solution de (E) si et seulement si

$$(x+\lambda)^3+a(x+\lambda)^2+b(x+\lambda)+c = 0 \Leftrightarrow x^3+3\lambda x^2+3\lambda^2x+\lambda^3+ax^2+2ax\lambda+a\lambda^2+bx+b\lambda+c = 0.$$

Soit si et seulement si

$$x^3 + (3\lambda+a)x^2 + (3\lambda^2+2a\lambda+b)x + (\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c) = 0.$$

Si on choisit $\boxed{\lambda = -\dfrac{a}{3}}$, alors cette équation ne possède pas de terme de degré 2, et donc est bien de la forme de la partie II.

10. On applique ce qui précède, avec $\lambda = -\dfrac{-6-3i}{3} = 2+i$, alors z est solution de (E) si et seulement si $z-(2+i)$ est solution de

$$z^3 + \left[3(2+i)^2 - 2(6+3i) + 9 + 6i\right]z + (2+i)^3 - (6+3i)(2+i) + (9+6i)(2+i) + 9i - 9 = 0.$$

Soit après calculs, $z^3 - 6iz - 1 + 8i = 0$.
Nous retrouvons donc l'équation de la question 7, dont les racines ont déjà été déterminées.
Donc les solutions de $z^3 - (6+3i)z^2 + (9+6i)z + 9i - 9 = 0$ sont

$$\boxed{1+2i+(2+i) = 3+3i,\ \frac{3}{2}+\sqrt{3}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{3}{2}-\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Partie IV. La méthode de Ferrari pour l'équation de degré 4.

11. C'est le même principe qu'à la question 9, on pose $z = x+\lambda$, et en développant $(x+\lambda)^4$, on fait apparaître un $4\lambda x^3$, qui viendra s'annuler avec le terme ax^3 (qui provient lui du développement de $a(x+\lambda)^3$) si et seulement si $\lambda = -\frac{a}{4}$.

12. Si $q = 0$, on se ramène à $z^4 + pz^2 + r = 0 \Leftrightarrow (z^2)^2 + pz^2 + q = 0$.
Un changement de variable $Z = z^2$ nous ramène à une équation du second degré dont on sait trouver les solutions (éventuellement confondues) Z_1 et Z_2.
Ne reste alors qu'à chercher les deux racines carrées de chacune de ces solutions, ce que l'on sait faire, et qui fournit donc au plus 4 solutions de (E_4').

13. C'est un simple calcul : pour $z \in \mathbb{C}$,

$$(z^2+\lambda)^2 - \left[(2\lambda - p)z^2 - qz + \cancel{\lambda^2} - r\right] = z^4 + \cancel{2\lambda z^2} + \lambda^2 - \cancel{2\lambda z^2} + pz^2 + qz - \cancel{\lambda^2} + r.$$

14. C'est assez classique : un polynôme de degré 2 est le carré d'un polynôme de degré 1 si et seulement si il est de discriminant nul.
En effet, si az^2+bz+c est de discriminant nul, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2+bz+c = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$, et si $\mu \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de a, alors $az^2+bz+c = \left(\mu z + \mu\frac{b}{2a}\right)^2$.
Et inversement, si il existe α, β tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2+bz+c = (\alpha z+\beta)^2$, alors $az^2+bz+c = 0$ possède $z = -\frac{\beta}{\alpha}$ comme unique solution, et donc est de discriminant nul.
Donc ici, une telle écriture existera si et seulement si

$$(-q)^2 - 4(2\lambda - p)(\lambda^2 - r) = 0 \Leftrightarrow -8\lambda^3 + 4\lambda^2 p + 8r\lambda - 4pr + q^2 = 0.$$

Donc $\boxed{\text{si et seulement si } \lambda \text{ est solution de } 8z^3 - 4pz^2 - 8rz + 4pr - q^2 = 0.}$

15. Remarquons que la condition $\lambda \neq \frac{p}{2}$ de la question précédente n'est pas une vraie restriction : $\frac{p}{2}$ est solution de (E_3') si et seulement si

$$8\frac{p^3}{8} - 4p\frac{p^2}{4} - 8r\frac{p}{2} + 4rp - q^2 = 0 \Leftrightarrow q^2 = 0 \Leftrightarrow q = 0.$$

Or nous avons supposé $q \neq 0$ (et la preuve de la question 12 prouve que si $q = 0$, alors (E_4') possède au plus quatre solutions.

Avec les notations précédentes, la partie II prouve que (E_3') possède toujours au moins une solution[7] λ_0. On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z^4 + pz^2 + qz + r &= \left(z^2+\lambda_0\right)^2 - (\alpha z+\beta)^2 \\ &= \left(z^2+\lambda_0+\alpha z+\beta\right)\left(z^2+\lambda_0-\alpha z-\beta\right). \end{aligned}$$

[7] Et même une solution réelle dans le cas d'une équation à coefficients réels.

Et donc z est solution de (E_4') si et seulement si z est solution d'une des deux équations du second degré

$$z^2+\alpha z+\lambda_0+\beta = 0 \textbf{ ou } z^2 - \alpha z + \lambda_0 - \beta = 0.$$

Or nous savons résoudre ces équations, qui possèdent chacune au plus deux solutions, et donc (E_4') possède au plus 4 solutions (ce qui se produira si les deux équations ci-dessus possèdent chacune deux solutions, et que ces solutions sont toutes distinctes).

16. Commençons par appliquer la transformation de la question 11, en posant $z = x+1$. Alors z est solution de (E_4) si et seulement si

$$(x+1)^4-4(x+1)^3+6(x+1)^2-4 = 0 \Leftrightarrow x^4+4x^3+6x^2+4x+1-4x^3-12x^2-12x-4+6x^2+12x+6-4 = 0$$

Soit si et seulement si $x^4 + 4x - 1 = 0$.
Nous nous trouvons donc dans le cas où $p = 0, q = 4, r = -1$.
La cubique résolvante est donc $8z^3 + 8z - 16 = 0 \Leftrightarrow z^3 + z - 2 = 0$.
Puisque 1 est solution évidente, prenons $\lambda_0 = 1$.
On a alors $(2\lambda_0 - p)z^2 - qz + \lambda_0^2 - r = 2z^2 - 4z + 2 = 2(z-1)^2 = \left(\sqrt{2}z - \sqrt{2}\right)^2$.
Et donc la factorisation obtenue à la question 15 est

$$z^4 + 4z - 1 = \left(z^2+\sqrt{2}z-\sqrt{2}+1\right)\left(z^2-\sqrt{2}z+\sqrt{2}+1\right).$$

L'équation $z^2+\sqrt{2}z-\sqrt{2}+1 = 0$ a pour discriminant $\Delta_1 = -2+4\sqrt{2}$, et donc pour solutions

$$z_1 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$$

L'équation $z^2 - \sqrt{2}z + \sqrt{2} + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta_2 = -2 - 4\sqrt{2}$ et a donc pour solutions

$$z_3 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2} \text{ et } z_4 = \overline{z_3} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E_4') est :

$$\left\{\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}, \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}, \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}, \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}\right\}.$$

Rappel

N'oublions pas que nous avons effectué le changement de variable $z = x + 1$, et donc qu'il faut ajouter 1 aux solutions de (E_4') pour obtenir celles de (E_4).

Et donc l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$\boxed{\left\{\frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}, \frac{2 - \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2} + i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2} - i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}\right\}.}$$