DEVOIR SURVEILLÉ 1 (3H)

► *Les calculatrices sont* ***interdites****.*
► *La qualité d'une copie ne tient pas uniquement aux calculs et aux résultats qui s'y trouvent. Vous apporterez donc un soin particulier à la présentation, à la lisibilité et à l'orthographe de vos copies.* ***La qualité de la rédaction, la clarté et la finesse des raisonnements*** *sont des éléments susceptibles d'influencer la note finale.*
► *Merci de numéroter entièrement les réponses (par exemple 6.c. et pas seulement c.) et* ***d'encadrer vos résultats****.*

Le sujet est vraisemblablement trop long pour être traité intégralement dans le temps imparti. Mieux vaut traiter moins de questions et les traiter correctement avec une rédaction convenable que d'essayer de traiter superficiellement beaucoup de questions.
Commencez par parcourir tout l'énoncé et démarrez par l'exercice qui vous semble le plus abordable.
Enfin, essayez d'aborder tous les exercices, les premières questions étant généralement plus faciles.
Il est ***suggéré*** *de passer 30 à 45 minutes sur le premier exercice, 1h à 1h30 sur chaque problème.*

EXERCICE : DU CALCUL

1. Résoudre l'inéquation $x^2|x| - 4x^2 - |x| < -4$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
2. Résoudre l'équation $\left\lfloor \dfrac{3x+1}{2} \right\rfloor = x + 1$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
3. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $1 + \dfrac{x^2}{2} \leqslant \operatorname{ch}(x)$.
4. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-2 \leqslant 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leqslant 1$.

PROBLÈME 1 : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On note également t la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étude de f

1. Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^x - 1 - xe^x \end{array} \right.$. Étudier les variations de g sur $\mathbf{R}$, puis en déduire son signe.
2. Déterminer les variations de f.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Montrer que $\mathscr{C}_f$ possède deux asymptotes dont on donnera une équation et préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ces asymptotes.

Étude de f au voisinage de 0

4. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. *On pourra à cet effet écrire f à l'aide d'un taux d'accroissement d'une fonction usuelle.*

Dans la suite, on note encore f le prolongement de f en une fonction continue sur $\mathbf{R}$ tout entier (*c'est-à-dire la fonction qu'on note généralement $\widetilde{f}$*).

5. Déterminer une fonction P_1, polynomiale de degré 1, telle que $t \mapsto P_1(t)e^t$ soit une primitive de $t \mapsto te^t$.
   De même, déterminer une fonction P_2, polynomiale de degré 2, telle que $t \mapsto P_2(t)e^t$ soit une primitive de $t \mapsto t^2e^t$.

6. Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé.

   a. Montrer à l'aide de la question précédente que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x e^t(x-t)^2\,dt$.
   On prendra garde au fait que x est fixé et que la variable d'intégration est t.

   b. Prouver que pour $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x (x-t)^2 e^t\,dt \leqslant x^2(e^x-1)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x (x-t)^2 e^t\,dt$.
   De la même manière, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\int_0^x (x-t)^2 e^t\,dt$.
   On a alors prouvé que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x (x-t)^2 e^t\,dt = 0$.

   c. Déduire de ce qui précède qu'il existe une fonction ε_1 définie sur $\mathbf{R}$ vérifiant $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$.

7. Prouver qu'il existe une fonction ε_2 définie sur $]-1,+\infty[$, de limite nulle en 0 et telle que pour tout $x > -1$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x\varepsilon_2(x)$.

8. En notant que $\dfrac{x}{e^x-1} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)}$, prouver qu'il existe une fonction ε, définie sur $\mathbf{R}$, de limite nulle en 0 et telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + x\varepsilon(x)$.
   En déduire que f est dérivable en 0, et donner une équation de la droite D, tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0.

9. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x) = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\right)$.

10. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) - 1 + \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}t\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

11. Déterminer le signe de la fonction t sur $\mathbf{R}$, et en déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite D.

12. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Problème 2 : une équation fonctionnelle

Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dérivables, dont la dérivée est continue en 0 et qui satisfont la relation :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}.$$

1. Déterminer toutes les fonctions constantes solutions du problème posé.

2. Soit f une solution du problème. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?

3. a. Prouver que quels que soient les réels positifs a et b, $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

   b. En déduire que si f est une solution du problème posé, alors

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |f(2x)| \leqslant 1,\ \text{puis que}\ \forall x \in \mathbf{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

4. Prouver que si f est solution du problème posé, alors il en est de même de $-f$, et que pour tout $a \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto f(ax)$ est également solution du problème posé.

5. Prouver que th est solution du problème posé.

6. Dans cette question, on suppose que f est une solution non constante du problème posé, avec $f(0) = 1$.

   a. Justifier l'existence de $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) \neq 1$.

   On définit alors une suite $(u_n)_n$ *en posant pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

   b. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   c. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, donner une relation entre u_n et u_{n+1}.

   d. Prouver que si $f(x_0) < 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < 0$. Qu'en déduit-on ?

e. On suppose $f(x_0) > 0$. Étudier alors le signe et la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant f(x_0) < 1$.

f. Prouver alors que la seule solution du problème vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction constante.

7. Déterminer toutes les solutions du problème vérifiant $f(0) = -1$.

8. Dans cette question, f désigne une solution du problème posé vérifiant de plus $f(0) = 0$.

a. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| \neq 1$.

b. Prouver que la fonction th réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur un intervalle I à préciser. On note alors $\mathrm{Argth} : I \to \mathbf{R}$ sa bijection réciproque.

c. Prouver que Argth est dérivable sur I et déterminer Argth'.

d. Pour $y \in I$, résoudre l'équation $\mathrm{th}(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$, et en déduire une expression de $\mathrm{Argth}(x)$ en fonction de x.
Retrouver alors le résultat de la question précédente.

Dans la suite de la question, on pose $g = \mathrm{Argth} \circ f$.

e. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(2x) = 2g(x)$.

f. Prouver que g est dérivable sur $\mathbf{R}$, et que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g'(2x) = g'(x)$.

g. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$, et soit $(v_n)_n$ la suite définie par $v_n = g'\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.
À l'aide de la suite (v_n), prouver que g est linéaire (c'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax$, pour un certain $a \in \mathbf{R}$).

9. Déterminer finalement toutes les solutions au problème posé.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

EXERCICE

1. Notons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 = |x|^2$, de sorte que l'inéquation s'écrit encore

$$|x|^3 - 4|x|^2 - |x| + 4 < 0.$$

Posons alors $X = |x|$, de sorte qu'il s'agit de résoudre sur $\mathbf{R}_+$ l'inéquation $X^3 - 4X^2 - X + 4 < 0$.
Nous sommes alors en présence d'un polynôme de degré 3, qui possède 1 comme racine et donc après factorisation par $X - 1$,

$$X^3 - 4X^2 - X + 4 = (X-1)(X^2 - 3X - 4) = (X-1)(X+1)(X-4).$$

Puisque pour $X \geqslant 0$, $X + 1 \geqslant 0$, il suffit de résoudre $(X-1)(X-4) < 0$, qui possède[1] pour ensemble de solutions $]1, 4[$.
Et donc on a $1 < |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < -1$ **ou** $1 < x < 4$.
Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est }]-4,-1[\cup]1,4[.}$

[1] Faire un tableau de signe si besoin.

2. Notons que si x est une solution, alors $\left\lfloor \dfrac{3x+1}{2} \right\rfloor$ est un entier, de sorte que $x + 1 \in \mathbf{Z}$, et donc $x \in \mathbf{Z}$.

Autrement dit
L'ensemble des solutions est inclus dans $\mathbf{Z}$.

Nous sommes ramenés à résoudre $\left\lfloor \dfrac{3n+1}{2} \right\rfloor = n+1 \Leftrightarrow \left\lfloor \dfrac{3n+1}{2} - 1 \right\rfloor = n \Leftrightarrow \left\lfloor \dfrac{3n-1}{2} \right\rfloor = n$, d'inconnue $n \in \mathbf{Z}$.

► **Si n est pair**, de la forme $2k$, $k \in \mathbf{Z}$, on a $\left\lfloor \dfrac{3n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 3k - \dfrac{1}{2} \right\rfloor = 3k - 1$ et donc

$$\left\lfloor \frac{3n-1}{2} \right\rfloor = n \Leftrightarrow 3k - 1 = 2k \Leftrightarrow k = 1.$$

Donc 2 est la seule solution paire.

► **Si n est impair**, de la forme $2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$, alors $\left\lfloor \dfrac{3n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{6k+2}{2} \right\rfloor = \lfloor 3k+1 \rfloor = 3k+1$ et donc

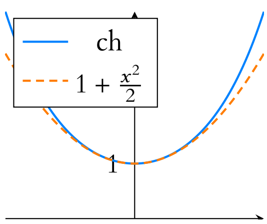
$$\left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor = n+1 \Leftrightarrow 3k+1 = 2k+1 \Leftrightarrow k = 0.$$

Et donc $1 = 2 \times 0 + 1$ est l'unique solution impaire.
Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \{1, 2\}.}$

Une autre solution : pour $n \in \mathbf{Z}$, $\left\lfloor \dfrac{3x+1}{2} \right\rfloor = n+1 \Leftrightarrow n+1 \leqslant \dfrac{3n+1}{2} < n+2$, ce qui après résolution nous donne $1 \leqslant n < 3$, qui possède 1 et 2 comme seules solutions.

3. Posons $f(x) = \text{ch}(x) - 1 - \dfrac{x^2}{2}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \text{sh}(x) - x$.
Alors f' est encore dérivable, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = \text{ch}(x) - 1 \geqslant 0$.
Donc f' est croissante, avec $f'(0) = 0$, de sorte que f' est positive sur $\mathbf{R}_+$ et négative sur $\mathbf{R}_-$. On en déduit que f est croissante sur $\mathbf{R}_+$ et décroissante sur $\mathbf{R}_-$.

Puisque $f(0) = 0$, on a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{\text{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}.}$



4. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x$ et $3x - 1 < \lfloor 3x \rfloor \leqslant 3x$.
On déduit de cette seconde inégalité que

$$-6x \leqslant -2\lfloor 3x \rfloor < -6x + 2.$$

En la sommant avec la première inégalité multipliée par 3, il vient

$$-3 < 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor < 2.$$

Ajoutons le fait que $3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor$ est un entier, et donc

$$\boxed{-2 \leqslant 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leqslant 1.}$$

EXERCICE 2 : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Partie I. Étude de f.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ car somme de fonctions dérivables. Et alors pour $x \in \mathbf{R}$,
$$g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x.$$
Donc $g'(x)$ est du signe opposé à celui de x, de sorte que g est croissante sur $\mathbf{R}_-$ et décroissante sur $\mathbf{R}_+$.
On en déduit que g possède un maximum en 0, qui vaut $g(0) = 0$, et donc que g est $\boxed{\text{négative}}$ sur $\mathbf{R}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ car quotient de fonctions qui le sont, et on a pour $x \in \mathbf{R}^*$,
$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2} \leqslant 0.$$
Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur chacun des deux intervalles }]-\infty, 0[\text{ et }]0, +\infty[.}$

3. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$, et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
Par ailleurs, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}}$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Puisque la limite de f en $+\infty$ est finie, $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$, qui est la droite d'équation $y = 0$.
Et puisque pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, $\mathscr{C}_f$ se trouve au dessus de l'asymptote.

> **Méthode**
> Pour déterminer une asymptote, on commence par chercher son éventuel coefficient directeur a en calculant la limite de $\frac{f(x)}{x}$, puis on cherche l'ordonnée à l'origine via la limite de $f(x) - ax$.

Au voisinage de $-\infty$, on a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{e^x - 1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$.
Et $f(x) - (-x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + x = \dfrac{x + xe^x - x}{e^x - 1} = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} = \dfrac{x}{1 - e^{-x}}$.
Mais pour $x \leqslant 0$, on a $0 \leqslant \dfrac{x}{1 - e^{-x}} \leqslant \dfrac{-x}{e^{-x}}$.
Par le changement de variable $X = -x$, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{e^{-x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$, et donc[2] $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$. Donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$. Et puisque nous venons de dire que $f(x) + x \geqslant 0$ pour tout $x < 0$, $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de la droite d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$.

[2] C'est le théorème des gendarmes.

> **Remarque**
> Il est facile de constater que pour tout $x > 0$, $-x \leqslant 0 \leqslant f(x)$, et donc $\mathscr{C}_f$ tout entier est au dessus de la droite $y = -x$.

Partie II. Étude de f au voisinage de 0.

4. Il s'agit donc de déterminer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{e^x - 1}$.
Mais nous savons que $\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{e^x - e^0}{x}$ est le taux d'accroissement en 0 de la fonction exponentielle, qui tend donc lorsque $x \to 0$ vers $\exp'(0) = e^0 = 1$.
Donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$.
Ainsi, f admet bien une limite finie en 0 et par conséquent est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

5. Une fonction polynomiale de degré 1 est de la forme $P_1 : t \mapsto at + b$, avec $a \neq 0$.
La dérivée de $t \mapsto P_1(t)e^t$ est alors $t \mapsto ae^t + (at + b)e^t = e^t(at + (a + b))$.
Il s'agit d'une primitive de $t \mapsto te^t$ si et seulement si[3] $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$ soit encore $a = 1, b = -1$.
Donc $\boxed{t \mapsto (t-1)e^t \text{ est une primitive de } t \mapsto te^t.}$

[3] L'équivalence n'est pas claire pour l'instant, mais au minimum vous savez que si deux polynômes ont les mêmes coefficients, alors ils sont égaux.

> **Astuce**
> Vérifiez vos résultats : il suffit de dériver l'expression obtenue pour voir si elle convient ou non.

De la même manière, une fonction polynomiale de degré 2 est de la forme $t \mapsto at^2 + bt + c$, avec $a \neq 0$.
La dérivée de $t \mapsto P_2(t)e^t$ est alors $t \mapsto (2at+b)e^t + (at^2+bt+c)e^t = e^t(at^2 + (2a+b)t + c + b)$.
Elle est égale à $t \mapsto t^2e^t$ si et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$.

Donc $\boxed{t \mapsto (t^2-2t+2)e^t \text{ est une primitive de } t \mapsto t^2e^t.}$

6.a. Il s'agit donc de calculer $\displaystyle\int_0^x e^t(x-t)^2\,dt$. Mais en utilisant les primitives précédemment calculées,

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t(x-t)^2\,dt &= \int_0^x e^t(t^2-2xt+x^2)\,dt\\ &= \int_0^x t^2e^t - 2x\int_0^x te^t\,dt + x^2\int_0^x e^t\,dt\\ &= \left[(t^2-2t+2)e^t\right]_0^x - 2x\left[(t-1)e^t\right]_0^x + x^2[e^t]_0^x\\ &= (x^2-2x+2)e^x - 2 - 2x(x-1)e^x - 2x + x^2(e^x-1)\\ &= 2e^x - 2 - 2x - x^2.\end{aligned}$$

Détails
x est ici une constante, donc les x peuvent «sortir» des intégrales.

Et donc $2e^x = 2+2x+x^2+\displaystyle\int_0^x e^t(x-t)^2\,dt$, ce qui après division par 2 nous donne bien

$$\boxed{e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^x e^t(x-t)^2\,dt.}$$

6.b. Pour $t\in[0,x]$, on a $(x-t)^2e^t \geqslant 0$, et donc[4] $\displaystyle\int_0^x (x-t)^2e^t\,dt \geqslant 0$.
Par ailleurs, pour $t\in[0,x]$, $0\leqslant x-t\leqslant x$, et donc $(x-t)^2\leqslant x^2$.
Ainsi, pour tout $t\in[0,x]$, $e^t(x-t)^2\leqslant e^tx^2$, de sorte que

$$\int_0^x e^t(x-t)^2\,dt \leqslant \int_0^x x^2e^t\,dt \leqslant x^2\int_0^x e^t\,dt \leqslant x^2(e^x-1).$$

[4] Les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens.

On en déduit que pour $x>0$, $0\leqslant \displaystyle\frac{1}{x^2}\int_0^x (x-t)^2e^t\,dt \leqslant e^x-1$.

Et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\int_0^x e^t(x-t)^2\,dt = 0.}$

De même, pour $x\leqslant 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^x e^t(x-t)^2\,dt = -\int_x^0 e^t(x-t)^2\,dt$.
Alors pour tout $t\in[x,0]$, $0\leqslant e^t(x-t)^2\leqslant e^tx^2\leqslant x^2$.
Et donc par croissance de l'intégrale, $0\leqslant \displaystyle\int_x^0 e^t(x-t)^2\,dt \leqslant \int_x^0 x^2\,dt \leqslant x^2\int_x^0 1\,dt \leqslant -x^3$.

Danger !
La croissance de l'intégrale nécessite des bornes dans le bon sens, d'où l'intérêt de distinguer $x\geqslant 0$ de $x<0$.

Et donc, on en déduit que $x\leqslant \displaystyle\frac{1}{x^2}\int_0^x e^t(x-t)^2\,dt \leqslant 0$.

Et alors par le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}\int_0^x e^t(x-t)^2\,dt = 0.}$

6.c. Il suffit de poser, pour $x\neq 0$, $\varepsilon_1(x) = \displaystyle\frac{1}{x^2}\int_0^x e^t(t-x)^2\,dt$, dont nous venons de prouver que ceci tend vers 0.
Si on pose de plus $\varepsilon_1(0)=0$, on a bien, pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$\boxed{e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+x\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0.}$$

7. On a, pour $x>-1$, $\displaystyle\frac{1}{1+x}-1+x = \frac{1-(x-1)(x+1)}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} = x\times\left(-\frac{x}{1+x}\right)$.
Donc la fonction $\varepsilon_2 : x\mapsto -\displaystyle\frac{x}{1+x}$ satisfait la relation demandée, et on vérifie aisément qu'elle est de limite nulle en 0.

8. Comme indiqué, on a, pour $x\neq 0$, $\displaystyle\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)}$.

Notons que $\displaystyle\frac{e^x-1}{x}$ est toujours strictement positif[5], et donc $\displaystyle\frac{e^x-1}{x}-1>-1$.

[5] Car e^x-1 est du signe de x.

Donc par la question précédente, $f(x) = 1 - \left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right) + \left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right)\varepsilon_2\left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right)$.

Mais en utilisant la question 6, $\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon_1(x)$.

Et donc

$$f(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{2} + x\varepsilon_1(x) - 1\right) + \left(\frac{x}{2} + x\varepsilon_1(x)\right)\varepsilon_2\left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right).$$

Soit encore $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + x\left(-\varepsilon_1(x) + \frac{1}{2}\varepsilon_2\left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2\left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right)\right)$.

Donc il s'agit de poser $\varepsilon(x) = -\varepsilon_1(x) + \frac{1}{2}\varepsilon_2\left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2\left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right)$ pour avoir l'identité demandée, en ajoutant $\varepsilon(0) = 0$.

Reste tout de même à prouver que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Nous savons que $\frac{e^x-1}{x} - 1 = \frac{x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)}{x} - 1 = \frac{x}{2} + x\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Et puisque $\lim_{t\to 0}\varepsilon_2(t) = 0$, par composition de limites, $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2\left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right) = 0$, de sorte qu'on a bien $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

On en déduit que pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)-1}{x} = \frac{-\frac{x}{2} + x\varepsilon(x)}{x} = -\frac{1}{2} + \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = -\frac{x}{2} + 1.}$

> **Rappel**
> La tangente à $\mathscr{C}_f$ en a possède pour équation
> $$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

9. Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on a $\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{\cancel{e^{\frac{x}{2}}}\, e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{\cancel{e^{\frac{x}{2}}}\, e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et donc

$$\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{e^x+1}{e^x-1} - 1 = \frac{e^x+1-e^x+1}{e^x-1} = \frac{2}{e^x-1}.$$

Et donc on a bien $\boxed{f(x) = \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\right).}$

10. Pour $x = 0$, on a $f(x) - 1 = 0 = 0t(0)$.
Et pour $x \neq 0$, il vient

$$f(x) - 1 + \frac{x}{2} = \frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = \frac{x - e^x + 1 + \frac{x}{2}e^x - \frac{x}{2}}{e^x-1} = \frac{x - 2e^x + xe^x + 2}{2(e^x-1)}.$$

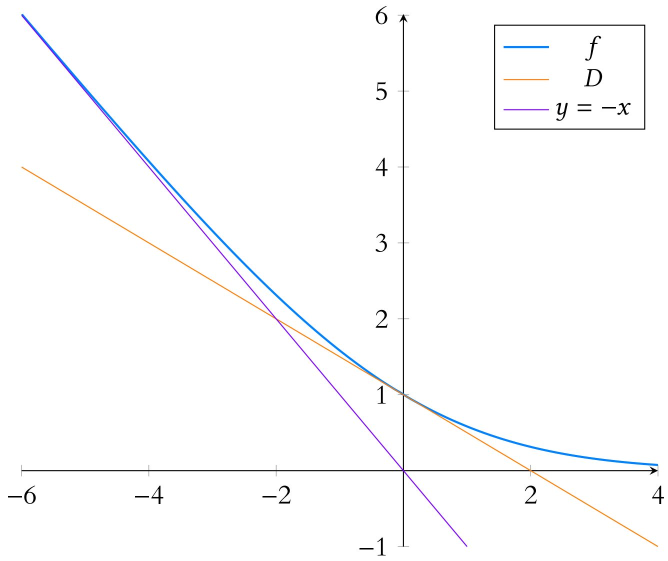
Par ailleurs,

$$\frac{x}{2}t\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{2}{x}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1} - \frac{2}{x}\right) = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x+1} - 1 = \frac{xe^x + x - 2e^x + 2}{2(e^x-1)}.$$

Et donc on a bien $\boxed{f(x) - 1 + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right).}$

11. Nous savons que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $\operatorname{th}(x)$ est du signe de x.
Par ailleurs, posons $h(x) = \operatorname{th}(x) - x$. Alors h est dérivable sur $\mathbf{R}$, avec $h' : x \mapsto 1 - \operatorname{th}^2(x) - 1 = -\operatorname{th}^2(x) \leqslant 0$.
Donc h est décroissante sur $\mathbf{R}$, avec $h(0) = 0$, de sorte que pour $x \geqslant 0$, $h(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{th}(x) \leqslant x$,
et pour $x \leqslant 0$, $h(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{th}(x) \geqslant x$.
Donc pour $x > 0$, $\frac{1}{\operatorname{th}(x)} \geqslant \frac{1}{x}$, et pour $x < 0$, $\frac{1}{\operatorname{th}(x)} \leqslant \frac{1}{x}$.
Donc $\boxed{t(x) \text{ est du signe de } x.}$
Et par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{x}{2}t\left(\frac{x}{2}\right)$ est du signe de x^2, et donc positif.
On en déduit que $f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) \geqslant 0$, et donc que $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de la droite } D.}$

12. Il s'agit ici de faire apparaître les éléments des questions précédentes, et en particulier les deux asymptotes et la tangente D (au dessus de laquelle reste $\mathscr{C}_f$).



PROBLÈME

1. Soit $a \in \mathbf{R}$, et soit f la fonction constante égale à a.
Si f est solution du problème posé, alors, en prenant par exemple $x = 1$ dans la relation de l'énoncé, on obtient
$$f(2) = \frac{2f(1)}{1+f(1)^2} \Leftrightarrow a = \frac{2a}{1+a^2}.$$
Il est évident que $a = 0$ est solution, et si $a \neq 0$, alors
$$a = \frac{2a}{1+a^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{1+a^2} \Leftrightarrow 1+a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \textbf{ ou } a = -1.$$
Inversement, les fonctions constantes égales à 0, 1 ou -1 sont bien solutions du problème posé (elles sont évidemment continues, dérivables et de dérivée nulle donc continue en 0), donc il s'agit là des seules solutions constantes.

Attention !
Bien que la vérification soit triviale, elle est indispensable : nous avons dit précédemment que si la fonction constante égale a est solution, alors $a \in \{-1, 0, 1\}$, mais il ne s'agissait que d'une implication et pas d'une équivalence !

2. En prenant $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$.
Il s'agit de la même équation que précédemment, et donc $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$.

3.a. Soient a et b deux réels positifs. Alors $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$.
Soit encore $a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leqslant a + b \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}.}$

3.b. Notons que pour $x \in \mathbf{R}$, $|f(2x)| = \dfrac{2|f(x)|}{1+|f(x)|^2}$.
Mais $|f(x)| = \sqrt{1 \times |f(x)|^2} \leqslant \dfrac{1+|f(x)|^2}{2}$.
Et donc $\dfrac{2|f(x)|}{1+|f(x)|^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \boxed{|f(2x)| \leqslant 1.}$
En particulier, pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f\left(2\frac{x}{2}\right)$ et donc $|f(x)| \leqslant 1$, soit encore $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Détails
C'est la question 3.b appliquée avec $a = 1$ et $b = |f(x)|^2$.

4. Soit f une solution du problème posé.
Alors $-f$ est encore dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée $-f'$ qui est continue en 0 (car f' l'est) et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-f(x) = \dfrac{-2f(x)}{1+(-f(x))^2}$, de sorte que $-f$ est bien solution du problème posé.

Soit à présent $a \in \mathbf{R}$, et soit $f_a : x \mapsto f(ax)$. Alors f est encore dérivable, de dérivée égale à $f_a' : x \mapsto af'(ax)$. Puisque f' est continue en 0, $f'(ax) \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0)$, et donc $f_a'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} af'(0) = f_a'(0)$, de sorte que f_a' est continue en 0.
On a alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f_a(2x) = f(2ax) = \frac{2f(ax)}{1+f(ax)^2} = \frac{2f_a(x)}{1+f_a(x)^2}$$

de sorte que $\boxed{f_a \text{ est bien solution du problème posé.}}$

Remarque
Notons qu'en particulier, $-f = f_{-1}$ est encore solution.

5. Rappelons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
Il s'agit d'après le cours d'une fonction dérivable (et donc continue), de dérivée $1 - \operatorname{th}^2$ qui est également continue sur $\mathbf{R}$, et donc en 0.
On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

Mais d'autre part,

$$\frac{2\operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}(x)^2} = \frac{2\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2} = 2\frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{\frac{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}} = 2\frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2e^{2x} + 2e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \operatorname{th}(2x).$$

Donc $\boxed{\operatorname{th} \text{ est bien une solution du problème posé.}}$

6.a. Puisque f est non constante, elle ne prend pas toujours la valeur 1, et donc il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) \neq 1$.

6.b. Puisque $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\frac{x_0}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et f étant continue en 0, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = f(0) = 1$.

6.c. Notons que $\dfrac{x_0}{2^n} = 2\dfrac{x_0}{2^{n+1}}$. Donc en vertu de la relation satisfaite par f,

$$u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f\left(2\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \frac{f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1 + \left(f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2} = \boxed{\frac{u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2}}.$$

6.d. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n < 0$.
Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse sur $f(x_0) = u_0$.
Supposons $u_n < 0$. Alors $u_n = \dfrac{2u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2} \underbrace{u_n}_{<0} \underbrace{\left(1 + u_{n+1}^2\right)}_{>0} < 0$.
Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_n < 0.}$

On en déduit, par passage à la limite, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant 0$.
Mais ceci contredit le fait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc on en déduit que $f(x_0) \geqslant 0$.

6.e. Le raisonnement de la question précédente prouve que $(u_n)_n$ est de signe constant, et donc par une récurrence similaire, on prouve que si $f(x_0) > 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{2}{1 + u_{n+1}^2}$.
Mais par la question 3.b, $u_{n+1} = f\left(\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right) \leqslant 1$, et donc $0 < u_{n+1} \leqslant 1$.
On en déduit que $1 + u_{n+1}^2 \leqslant 2$, et donc $\dfrac{2}{1 + u_{n+1}^2} \geqslant 1$.
Par conséquent, $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant 1 \Leftrightarrow u_n \geqslant u_{n+1}$.
On en déduit donc que $\boxed{(u_n)_n \text{ est décroissante.}}$
Et par conséquent, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_0 \leqslant f(x_0)$.
Or, nous savons que $f(x_0) > 0$, $|f(x_0)| \leqslant 1$ et $f(x_0) \neq 1$, donc $f(x_0) < 1$.
On a donc bien, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant f(x_0) < 1.}$

Signe
Notons que pour la dernière étape, il était indispensable de savoir $u_{n+1} > 0$.
Plus généralement, étudier si $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ est ou non plus grand que 1 permet de déterminer la monotonie seulement dans le cas d'une suite **à valeurs positives.**

Détails
Une suite décroissante est toujours inférieure à son premier terme.

6.f. Nous avons déjà dit que $f(x_0)$ ne peut être strictement négatif, et s'il est strictement positif, alors par passage à la limite dans l'inégalité obtenue ci-dessus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant f(x_0)$.
Soit encore $1 \leqslant f(x_0) < 1$, ce qui est absurde.
Donc il n'y a pas de solution non constante au problème posé vérifiant $f(0) = 1$.
Et par conséquent, la seule solution vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction constante égale à 1.

⚠ Attention !
Le passage à la limite a pour effet de changer les inégalités strictes en inégalités larges.

7. Si f est une solution vérifiant $f(0)=-1$, alors , $g=-f$ est aussi[6] une solution.
Or, elle vérifie $g(0)=1$, donc est constante égale à 1. Et donc f est la fonction constante égale à -1, dont nous avons dit question 1 qu'il s'agit bien d'une solution.
Ainsi, $\boxed{\text{la seule solution vérifiant } f(0)=-1 \text{ est la fonction constante égale à } -1.}$

8.a. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $|f(x_0)|=1$.
Alors $|f(x_0)| = \left|f\left(2\frac{x_0}{2}\right)\right| = \left|\frac{2f\left(\frac{x_0}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}\right|$.
Et donc $2\left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| = 1+\left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right|^2$.
Autrement dit, $\left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right|$ est solution de $2X=1+X^2 \Leftrightarrow (X-1)^2=0$.
Donc $\left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right|=1$.
Une récurrence facile[7] prouve alors que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\left|f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right|=1$.
Et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right|=1$.
Or, la fonction $x\mapsto |f(x)|$ étant continue en 0, on doit avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right| = |f(0)| = 0$.
Donc $1=0$, ce qui est absurde, et par conséquent, $\boxed{\forall x\in\mathbf{R}, |f(x)|\neq 1.}$

[6] D'après la question 4.

[7] Avec le même argument que celui que nous venons d'utiliser.

8.b. La fonction th est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, continue[8] et vérifie $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th}(x)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th}(x)=1$.
Par le théorème de la bijection, $\boxed{\text{elle réalise donc une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur }]-1,1[=I.}$

[8] Car dérivable.

8.c. Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $\operatorname{th}'(x)=1-\operatorname{th}^2(x)\neq 0$, car $-1<\operatorname{th}(x)<1$.
Donc pour tout $x\in I$, $\operatorname{th}'(\operatorname{Argth}(x))\neq 0$, de sorte que Argth est bien dérivable en x, avec

$$\operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{Argth}(x))} = \frac{1}{1-\operatorname{th}(\operatorname{Argth}(x))^2} = \boxed{\frac{1}{1-x^2}.}$$

Rappel
Si f est dérivable et bijective, alors f^{-1} est dérivable en les points x où $f'(f^{-1}(x))\neq 0$.

8.d. Soit $y\in I$ fixé, et soit $x\in\mathbf{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}\operatorname{th}(x)=y &\Leftrightarrow \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=y\\ &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=y\\ &\Leftrightarrow e^{2x}-1=y(e^{2x}+1)\\ &\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x=\frac12\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).\end{aligned}$$

On a multiplié numérateur et dénominateur par e^x.

Signe
Notons que pour $y\in I$, $1+y$ et $1-y$ sont strictement positifs, de sorte que $\frac{1+y}{1-y}$ aussi.

Donc l'unique solution de l'équation est $x=\frac12\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$, de sorte que pour tout $y\in\mathbf{R}$,
$\boxed{\operatorname{Argth}(y)=\frac12\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$
En dérivant cette relation, on obtient alors, pour tout $y\in\mathbf{R}$,

$$\operatorname{Argth}'(y) = \frac12\frac{1-y+(1+y)}{(1-y)^2}\frac{1-y}{1+y} = \frac12\frac{2(1+y)}{1-y} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \boxed{\frac{1}{1-y^2}.}$$

8.e. Soit $x\in\mathbf{R}$. On a $g(2x)=\operatorname{Argth}(f(2x))=\operatorname{Argth}\left(\frac{2f(x)}{1+f(x)^2}\right)$.
En réutilisant alors la formule de la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}g(2x) &= \frac12\ln\left(\frac{1+\frac{2f(x)}{1+f(x)^2}}{1-\frac{2f(x)}{1+f(x)^2}}\right)\\ &= \frac12\ln\left(\frac{1+2f(x)+f(x)^2}{1-2f(x)+f(x)^2}\right)\\ &= \frac12\ln\left(\frac{(1+f(x))^2}{(1-f(x))^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right) = 2\operatorname{Argth}(f(x)) = \boxed{2g(x).}\end{aligned}$$

Signe
Comme à la question précédente, $\frac{1+f(x)}{1-f(x)}>0$.

8.f. Par hypothèse, f est dérivable, à valeurs dans $]-1,1[$, et nous savons que Argth est dérivable sur $]-1,1[$. Donc par composition, g est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Par dérivation de la relation de la question précédente, on a donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$2g'(2x) = 2g'(x) \Leftrightarrow \boxed{g'(2x) = g'(x).}$$

8.g. Prouvons que la suite $(v_n)_n$ est constante : pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$v_n = g'\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = g'\left(2\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = g'\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = v_{n+1}.$$

Donc $(v_n)_n$ est constante, égale à $v_0 = g'(x_0)$.

Par ailleurs, $\frac{x_0}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc par continuité de g' en 0, $g\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g'(0)$.
Ceci prouve donc que pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$, $g'(x_0) = g'(0)$, donc g' est constante.
Et donc g est affine, de la forme $x \mapsto ax + b$.
Puisque par ailleurs, $g(0) = \text{Argth}(0) = 0$, on a donc $b = 0$, de sorte que $\boxed{g \text{ est bien linéaire.}}$

Remarque
On a en réalité $a = g'(x_0)$.

9. Si f est une solution non constante au problème, alors il existe $a \in \mathbf{R}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{Argth}(f(x)) = ax$. Et donc $f(x) = \text{th}(ax)$.

Inversement, une telle fonction est nécessairement solution par les questions 4 et 5.

Donc les solutions au problème posé sont les fonctions constantes égales à ± 1, ainsi que toutes les $x \mapsto \text{th}(ax)$, $a \in \mathbf{R}$ (notons que pour $a = 0$, on retrouve la fonction nulle).