Devoir surveillé 2

► *Les calculatrices sont* ***interdites****.*
► *Merci de numéroter entièrement les réponses (par exemple 6.c. et pas seulement c.) et* ***d'encadrer vos résultats****.*
► *Il est* ***suggéré*** *de passer environ 1h sur chaque exercice, et environ 2h sur le problème.*

Exercice 1 : calculs divers et variés

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$.
   a. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, exprimer $\cos(t)^3$ en fonction de $\cos(3t)$ et de $\cos(t)$.
   b. Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\cos^3(3^k x)}{3^k}$
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)\,dx$.
   a. Prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $I_k + I_{k+1} = \dfrac{1}{2k+1}$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$.
   c. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n \geqslant 0$.
   En déduire à l'aide de la question 2.a l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   d. Prouver enfin que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.
3. Soit $n \geqslant 2$ et soient $A_1, \dots, A_n$ des points du plan deux à deux distincts d'affixes respectives $a_1, \dots, a_n$.
   À l'aide d'un système linéaire, donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour qu'il existe un unique polygone $M_1M_2\cdots M_n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, A_i soit le milieu de $[M_iM_{i+1}]$ et le milieu de $[M_nM_1]$ soit A_n (c'est-à-dire un polygone dont les milieux des côtés sont les A_i).

Exercice 2

Soit E un ensemble, et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.
Si A est une partie de E, on notera $\overline{A} = E \setminus A$ son complémentaire dans E.
Une application $I : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ est appelée une ouverture si elle vérifie les cinq propriétés suivantes :

i) $I(E) = E$
ii) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ A \subset B \Rightarrow I(A) \subset I(B)$
iii) $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ I(I(A)) = I(A)$
iv) $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ I(A) \subset A$
v) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ I(A) \cap I(B) \subset I(A \cap B)$.

1. Soit $C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que l'application $I : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ définie par
$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ I(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } C \not\subset A \\ C & \text{si } C \subset A \textbf{ et } A \neq E \\ E & \text{si } A = E \end{cases}$$
   est une ouverture.

Dans toute la suite, on se fixe $I : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ une ouverture.

2. Prouver que :

a. $I(\emptyset) = \emptyset$

b. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$

c. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $I(A) \cup I(B) \subset I(A \cup B)$.

3. On note $\mathscr{O} = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid I(A) = A\}$. *Les éléments de $\mathscr{O}$ sont appelés des ouverts.*

   Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, si $A_1, \ldots, A_n$ sont des éléments de $\mathscr{O}$, alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ sont des ouverts.

4. On définit une application $F : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ en posant, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $F(A) = \overline{I\left(\overline{A}\right)}$. Prouver que :

   a. $F(\emptyset) = \emptyset$

   b. $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset F(A)$

   c. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $A \subset B \Rightarrow F(A) \subset F(B)$

   d. $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $F(F(A)) = F(A)$.

   e. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$

   f. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B)$.

5. On note $\mathscr{F} = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid F(A) = A\}$, et les éléments de $\mathscr{F}$ sont appelés des fermés.
   Montrer que $\mathscr{F} = \left\{\overline{A},\ A \in \mathscr{O}\right\}$.

   En déduire que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des éléments de $\mathscr{F}$, alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ sont encore dans $\mathscr{F}$.

6. Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on note $s(A) = F(A) \cap F\left(\overline{A}\right)$. Prouver alors que :

   a. $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $s(F(A)) \subset s(A)$.

   b. $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $s(I(A)) \subset s(A)$.

   c. $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $s(A \cup B) \subset s(A) \cup s(B)$.

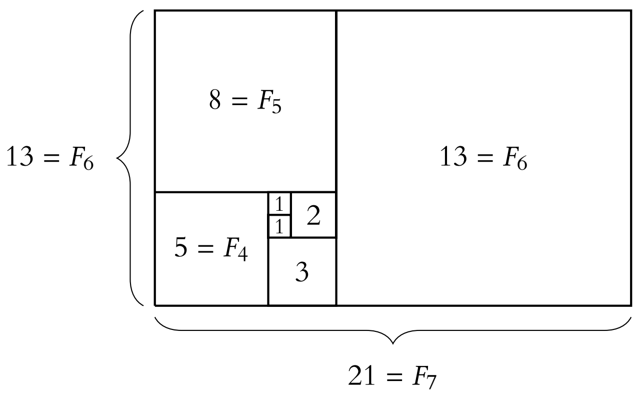
7. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $s(A) = \emptyset$. Prouver à l'aide de la question 4.e. que $F(A) = I(A)$.
   En déduire que $\mathscr{O} \cap \mathscr{F} = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid s(A) = \emptyset\}$.

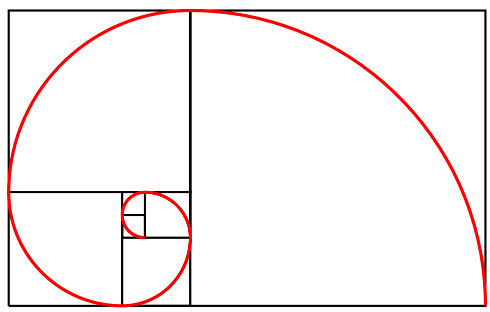
Problème : la suite de Fibonacci

On définit une suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ en posant $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
Les F_n s'appellent les nombres de Fibonacci.

Partie I. Généralités

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $F_n \geqslant n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} F_n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ et contempler la figure suivante :





5. Sortir de votre contemplation et prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sqrt{2}F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n$.
   En déduire que les côtés d'un triangle rectangle ne peuvent pas être tous des nombres de Fibonacci.

6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

   Expliquer alors comment déduire les F_n du triangle de Pascal.

Partie II. Formule de Binet et conséquences

7. Résoudre $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

Dans toute la suite du problème, on note α la plus grande des deux solutions de $x^2 - x - 1 = 0$ et β la plus petite.

8. Prouver que si $x \in \{\alpha, \beta\}$, alors pour tout $n \geqslant 2$, $x^n = xF_{n-1} + F_{n-2}$.

9. En déduire alors que $\forall n \in \mathbf{N}$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$ *(formule de Binet)*.

10. Prouver que F_n est l'entier le plus proche de $\dfrac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

11. Montrer à l'aide de la formule de Binet que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} 5^k$.

Partie III. Des limites de sommes

12. a. Déterminer la limite de $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$.

    b. Prouver que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \dfrac{F_n}{F_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_{n+1}F_{n-1}}$.

    c. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{F_{k+1}F_{k-1}}$.

13. Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\alpha}\right[$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} F_k x^k = \frac{1}{1 - x - x^2}$.

Partie IV. Le théorème de Zeckendorf

Cette partie, bien plus difficile, n'est à aborder que si vous estimez avoir très bien réussi le reste.

On souhaite dans cette partie prouver le résultat suivant, connu sous le nom de théorème de Zeckendorf, qui stipule que tout entier naturel non nul s'écrit de manière unique comme somme de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs.

Plus précisément : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique $k \in \mathbf{N}^*$ et un unique k-uplet d'entiers $(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbf{N}^*)^k$ tels que $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} F_{a_i}$ et vérifiant : pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $a_{i+1} < a_i - 1$.

Une telle écriture, lorsqu'elle existe, sera appelée une représentation de Fibonacci de n.

14. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} F_{n-2k} < F_{n+1}$.

15. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $F_N \leqslant n < F_{N+1}$ (autrement dit, F_N est le plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à n).

    Prouver que si $n = F_{a_1} + F_{a_2} + \dots + F_{a_k}$, avec $a_2 < a_1 - 1, a_2 < a_1 - 1, \dots, a_k < a_{k-1} - 1$, alors nécessairement $F_{a_1} = F_N$.

16. En déduire qu'une représentation de Fibonacci de n, si elle existe, est unique.

17. Prouver par récurrence que tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ possède une représentation de Fibonacci. Conclure.

18. Donner la décomposition de Fibonacci de 44.

19. Écrire un programme Python qui prend comme paramètre un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et retourne une liste composée des nombres de Fibonacci de son unique représentation de Fibonacci.

Correction du Devoir surveillé 2

Exercice 1 : calculs divers et variés

1.a. Soit $t \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\cos(3t) &= \cos(2t+t) = \cos(2t)\cos(t) - \sin(2t)\sin(t)\\ &= (2\cos^2(t)-1)\cos(t) - 2\sin^2 t\cos t = 2\cos^3(t) - \cos(t) - 2\left(1-\cos^2 t\right)\cos(t)\\ &= 2\cos^3(t) - \cos(t) - 2\cos(t) + 2\cos^3(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t).\end{aligned}$$

Et donc $\boxed{\cos^3(t) = \dfrac{\cos(3t)+3\cos(t)}{4}.}$

1.b. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\cos^3\left(3^k x\right)}{3^k} &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\cos\left(3^{k+1}x\right)+3\cos\left(3^k x\right)}{3^k}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\cos\left(3^{k+1}x\right)}{3^k} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\cos\left(3^k x\right)}{3^{k-1}}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\frac{\cos\left(3^i x\right)}{3^{i-1}} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\cos\left(3^k x\right)}{3^{k-1}}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\cos\left(3^k x\right)}{3^{k-1}} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\frac{\cos\left(3^i x\right)}{3^{i-1}}\\ &\boxed{= \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{(-1)^n}{4}\frac{\cos\left(3^{n+1}x\right)}{3^n}.}\end{aligned}$$

Chgt d'indice
On a posé $i = k+1$.

2.a. Soit $k \in \mathbf{N}$. Alors $I_k + I_{k+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k}(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+2}(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2(x)\right)\tan^{2k}(x)\,dx$.
Mais nous savons que $x \mapsto 1+\tan^2(x)$ est la dérivée de tan.
Et donc une primitive de $x \mapsto (1+\tan^2(x))\tan^{2k}(x)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2k+1}\tan^{2k+1}(x)$.
Et donc

$$I_k + I_{k+1} = \left[\frac{1}{2k+1}\tan^{2k+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2k+1}(1-0) = \boxed{\frac{1}{2k+1}.}$$

Détails
On a reconnu une fonction de la forme $u'u^n$, dont une primitive est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

2.b. On en déduit que pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(I_k + I_{k+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1} I_i\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k - \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i I_i = \boxed{I_0 + (-1)^n I_{n+1}.}\end{aligned}$$

2.c. Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\tan^{2n}(x) = (\tan^n(x))^2 \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)\,dx \geqslant 0$.
Par la question 2.a, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2n+1} - \underbrace{I_{n+1}}_{\geqslant 0} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

Et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.}$

2.d. On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-I_{n+1} \leqslant (-1)^n I_{n+1} \leqslant I_{n+1}$, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n I_{n+1} = 0$.
On en déduit donc par passage à la limite dans l'égalité de la question 2.b que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{4}.}$$

Attention !
Ne pas conclure trop rapidement «pas produit de limites», la suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite en $+\infty$. Nous utilisons ici le fait qu'elle est bornée, à valeurs dans $[-1, 1]$.

3. Notons $z_1, \dots, z_n$ les affixes de n points $M_1, \dots, M_n$.
Alors pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, A_i est le milieu de M_iM_{i+1} si et seulement si $\dfrac{z_i + z_{i+1}}{2} = a_i \Leftrightarrow z_i + z_{i+1} = 2a_i$.
Donc le polygone $M_1M_2\cdots M_n$ satisfait aux conditions imposées si et seulement si $z_1, \dots, z_n$ satisfont le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 & = 2a_1 \\ z_2 + z_3 & = 2a_2 \\ & \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ z_n + z_1 & = 2a_n \end{cases}$$

Réalisons alors l'opération $L_n \leftarrow L_n - L_1 + L_2 - L_3 + \cdots + (-1)^{n-1} L_{n-1}$.
Le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} z_1 + z_2 & = 2a_1 \\ \quad z_2 + z_3 & = 2a_2 \\ & \vdots \\ z_{n-1} + z_n & = 2a_{n-1} \\ \left(1 + (-1)^{n-1}\right) z_n & = 2\left(a_n - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n\right) \end{cases}$$

Remarque
Cette opération n'est rien d'autre que la suite d'opérations que l'on réaliserait en appliquant la méthode du pivot à notre système : on commencerait par éliminer les z_1 de la dernière équation grâce à $L_n \leftarrow L_n - L_1$. Mais cela ferait apparaître un $-z_2$ que l'on éliminerait grâce à $L_n \leftarrow L_n + L_2$, faisant apparaître un z_3, etc.

Remarquons qu'il s'agit alors d'un système triangulaire.
► **Si n est impair**, alors $1 + (-1)^{n-1} = 2$. Donc non seulement le système est triangulaire, mais tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc il possède une unique solution.
► **Si n est pair**, alors $1 + (-1)^{n-1} = 0$. Et donc la dernière équation possède soit une infinité de solution (dans le cas où $a_n - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n = 0$), soit aucune.
Et donc le système est soit incompatible, soit possède une infinité de solutions. Et donc il n'existe pas un unique polygone $M_1 \cdots M_n$ vérifiant la condition demandée.

Ainsi, il existe un unique polygone satisfaisant les conditions de l'énoncé si et seulement si n est impair.

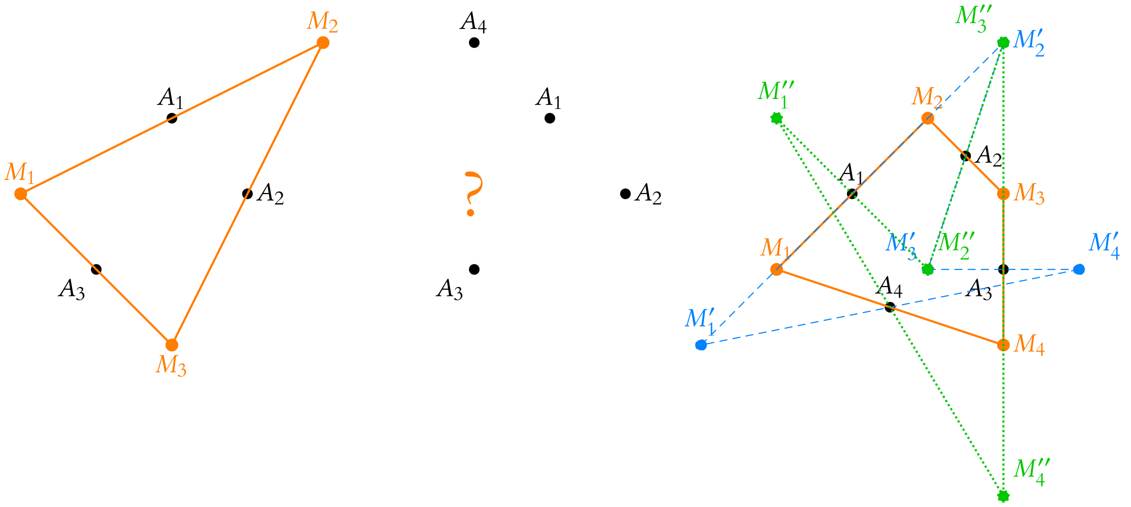


FIGURE 0.1 – Si n est impair (à gauche) il y a une unique solution. Si n est pair (au centre et à droite), il y a soit aucune soit une infinité de solutions.

EXERCICE

1. i) On a, par définition de I, $\boxed{I(E) = E.}$

ii) Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, avec $A \subset B$.
Si $A = E$, alors $B = E$, et donc $I(A) = E \subset E = I(B)$.
Si $C \subset A$ et $A \neq E$, alors $C \subset B$, et donc $I(B) = E$ (si $B = E$) ou $I(B) = C$, mais dans les deux cas, $I(A) = C \subset I(B)$.
Enfin, si $C \not\subset A$, alors $I(A) = \emptyset$ et alors[1], $I(A) \subset I(B)$.
Dans tous les cas, on a bien $\boxed{A \subset B \Rightarrow I(A) \subset I(B).}$

iii) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors $I(A) \in \{\emptyset, C, E\}$.
Mais on a $I(C) = C$, $I(\emptyset) = \emptyset$ et $I(E) = E$, donc $\boxed{I(I(A)) = I(A).}$

iv) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Si $A \not\subset C$, alors $I(A) = \emptyset \subset A$.
Si $A \neq E$ et $C \subset A$, alors $I(A) = C \subset A$.
Et si $A = E$, alors $I(A) = E \subset E$.
Dans tous les cas, $\boxed{I(A) \subset A.}$

v) Soient A, B deux parties de E. Si $C \not\subset A$, alors $I(A) = \emptyset$ et donc $I(A) \cap I(B) = \emptyset \subset I(A \cap B)$.
De même si $C \not\subset B$.
Si $A = B = E$, alors $I(A) \cap I(B) = E \cap E = E = I(A \cap B)$.
Et si $C \subset A$ et $C \subset B$ avec $A \neq E$, alors $I(A) = C$, $C \subset I(B)$ et $I(A \cap B) = C$, donc $I(A) \cap I(B) = C \subset I(A \cap B)$.
Dans tous les cas, on a bien $\boxed{I(A) \cap I(B) \subset I(A \cap B).}$

[1] Sans distinguer de cas pour B.

Terminologie
On dit que I est une application *croissante pour l'inclusion*.

2.a. Puisque $I(\emptyset) \subset \emptyset$, on a nécessairement $I(\emptyset) = \emptyset$.

2.b. Soient A, B deux parties de E. Alors on a déjà $I(A) \cap I(B) \subset I(A \cap B)$.
Puisque par ailleurs $A \cap B \subset A$, le point ii) prouve que $I(A \cap B) \subset I(A)$. Et de même $I(A \cap B) \subset I(B)$.
Donc $I(A \cap B) \subset I(A) \cap I(B)$, et donc par double inclusion, $\boxed{I(A) \cap I(B) = I(A \cap B).}$

2.c. Soient A, B deux parties de E. Alors $A \subset A \cup B$ et donc $I(A) \subset I(A \cup B)$. De même $I(B) \subset I(A \cup B)$ et donc $\boxed{I(A) \cup I(B) \subset I(A \cup B).}$

3. Une récurrence immédiate basée sur la question 2.b prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et toutes parties $A_1, \dots, A_n$ de E, $I\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} I(A_i)$.
En particulier, si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \in \mathscr{O} \Leftrightarrow I(A_i) = A_i$, alors
$I\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} I(A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Et donc $\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{O}.}$

Pour le second point, notons que par 2.c, on a déjà, pour $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{O}^n$,
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} I(A_i) \subset I\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.
Mais par ailleurs, par le point iv) de la définition d'une ouverture, on a $I\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
Et donc par double inclusion, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = I\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$, de sorte que $\boxed{\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{O}.}$

4.a. On a $F(\emptyset) = \overline{I(\overline{\emptyset})} = \overline{I(E)} = \overline{E} = \boxed{\emptyset.}$

4.b. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors $I\left(\overline{A}\right) \subset \overline{A}$ et donc par passage au complémentaire,

$$A = \overline{\overline{A}} \subset \overline{I(\overline{A})} \Leftrightarrow \boxed{A \subset F(A).}$$

Rappel
Le passage au complémentaire renverse les inclusions :
$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

4.c. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$.
Alors $\overline{B} \subset \overline{A}$ et donc $I\left(\overline{B}\right) \subset I\left(\overline{A}\right)$.
Et donc par un nouveau passage au complémentaire, $F(A) = \overline{I\left(\overline{A}\right)} \subset \overline{I\left(\overline{B}\right)} = F(B)$.

4.d. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors

$$F(F(A)) = \overline{I\left(\overline{F(A)}\right)} = \overline{I\left(I\left(\overline{A}\right)\right)} = \overline{I\left(\overline{A}\right)} = \boxed{F(A).}$$

4.e. Soient A, B deux parties de E. Alors

$$F(A\cup B) = \overline{I\left(\overline{A\cup B}\right)} = \overline{I\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)} = \overline{I\left(\overline{A}\right)\cap I\left(\overline{B}\right)} = \overline{I\left(\overline{A}\right)}\cup\overline{I\left(\overline{B}\right)} = \boxed{F(A)\cup F(B).}$$

4.f. Soient A, B deux parties de E. Alors

$$F(A\cap B) = \overline{I\left(\overline{A\cap B}\right)} = \overline{I\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)}.$$

Mais $I\left(\overline{A}\right)\cup I\left(\overline{B}\right)\subset I\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$ et donc par passage au complémentaire[2]

$$\overline{I\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)}\subset\overline{I\left(\overline{A}\right)}\cap\overline{I\left(\overline{B}\right)} = F(A)\cap F(B).$$

Et donc on a bien $\boxed{F(A\cap B)\subset F(A)\cap F(B).}$

[2] Toujours aussi renversant !

5. Soit $A\in\mathscr{P}(E)$. Alors

$$A\in\mathscr{F}\Leftrightarrow F(A) = A\Leftrightarrow \overline{I(\overline{A})} = A\Leftrightarrow I\left(\overline{A}\right) = \overline{A}\Leftrightarrow\overline{A}\in\mathscr{O}.$$

Ainsi, une partie est fermée si et seulement si son complémentaire est ouvert, donc si et seulement si elle est de la forme $\overline{A}$, $A\in\mathscr{O}$.
Et donc on a bien[3] $\mathscr{F} = \left\{\overline{A}, A\in\mathscr{O}\right\}$.
Soient alors $A_1,\dots,A_n$ des fermés. Alors $\overline{A_1},\dots,\overline{A_n}$ sont des ouverts.
Et donc par la question 3, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^n\overline{A_i}$ et $\displaystyle\bigcup_{i=1}^n\overline{A_i}$ sont encore des ouverts.
Mais $\displaystyle\bigcap_{i=1}^n\overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$, et s'il s'agit d'un ouvert, c'est que son complémentaire, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^n A_i$ est fermé. Et de même, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^n A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^n\overline{A_i}}$ est un fermé.

[3] Le «si et seulement si» de la ligne ci-dessus garantit qu'il s'agit bien d'une égalité et pas seulement d'une inclusion.

6.a. Soit $A\in\mathscr{P}(E)$. Alorss$(F(A)) = F(F(A))\cap F\left(\overline{F(A)}\right) = F(A)\cap F\left(\overline{F(A)}\right)$.
Mais $F\left(\overline{F(A)}\right) = F\left(I\left(\overline{A}\right)\right)$.
Or, $I\left(\overline{A}\right)\subset\overline{A}$, et donc $F\left(I\left(\overline{A}\right)\right)\subset F\left(\overline{A}\right)$.
Ainsi, $s(F(A))\subset F(A)\cap F\left(\overline{A}\right) = \boxed{s(A).}$

6.b. Soit $A\in\mathscr{P}(E)$. Alors $s(I(A)) = F(I(A))\cap F\left(\overline{I(A)}\right)$.
Mais $\overline{I(A)} = F\left(\overline{A}\right)$, et donc $F\left(\overline{I(A)}\right) = F\left(F\left(\overline{A}\right)\right) = F\left(\overline{A}\right)$.
Et $I(A)\subset A$, donc $F(I(A))\subset F(A)$.
On en déduit donc que $s(I(A))\subset F(A)\cap F\left(\overline{A}\right) = \boxed{s(A).}$

6.c. Soit $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$. Alors $s(A\cup B) = F(A\cup B)\cap F\left(\overline{A\cup B}\right) = (F(A)\cup F(B))\cap F\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$.
Par la question 4.f, on a $F\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\subset F\left(\overline{A}\right)\cap F\left(\overline{B}\right)$. Et donc

$$\begin{aligned}
s(A\cup B) &\subset (F(A)\cup F(B))\cap\left(F\left(\overline{A}\right)\cap F\left(\overline{B}\right)\right)\\
&\subset\left(F(A)\cap F(B)\cap F\left(\overline{A}\right)\right)\cup\left(F(A)\cap F(B)\cap F\left(\overline{B}\right)\right)\\
&\subset\left(F(A)\cap F\left(\overline{A}\right)\right)\cup\left(F(B)\cap F\left(\overline{B}\right)\right)\subset\boxed{s(A)\cup s(B).}
\end{aligned}$$

Distributivité.

7. Supposons donc que $s(A) = \emptyset$, de sorte que $F(A)\cap F\left(\overline{A}\right) = \emptyset$.
Donc $F(A)\subset\overline{F\left(\overline{A}\right)}$.
Mais par 4.e, $F(A)\cup F(\overline{A}) = F\left(A\cup\overline{A}\right) = F(E) = E$.
On en déduit que $F(A) = \overline{F\left(\overline{A}\right)}$.
Donc $F(A) = \overline{F\left(\overline{A}\right)} = I\left(\overline{\overline{A}}\right) = I(A)$.
Mais nous savons par ailleurs que $I(A)\subset A\subset F(A)$, et donc nécessairement, $A = F(A) = I(A)$.
Puisque $I(A)\in\mathscr{O}$ et $F(A)\in\mathscr{F}$, $A\in\mathscr{O}\cap\mathscr{F}$.
Nous avons donc prouvé que $\{A\in\mathscr{P}(E)\mid s(A) = \emptyset\}\subset\mathscr{O}\cap\mathscr{F}$.

Disjoints
Deux ensembles A et B sont disjoints si et seulement si l'un est inclus dans le complémentaire de l'autre.

Détails
Si l'inclusion donnée ci-dessus était stricte, un élément x dans $\overline{F\left(\overline{A}\right)}\setminus F(A)$ ne serait ni dans $F(A)$ ni dans $F\left(\overline{A}\right)$, et donc pas dans leur union, qui est pourtant égale à E tout entier.

Inversement, si $A \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$. Alors $F(A) = A$ car $A \in \mathcal{F}$. Mais par ailleurs, comme $A \in \mathcal{O}$, d'après la question 5, $\overline{A} \in \mathcal{F}$, et donc $F\left(\overline{A}\right) = \overline{A}$.
Et donc $s(A) = F(A) \cap F\left(\overline{A}\right) = A \cap \overline{A} = \emptyset$.
On en déduit l'inclusion qui nous manquait, et donc il y a bien égalité : $\boxed{\mathcal{O} \cap \mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid s(A) = \emptyset\}.}$

Quelques commentaires *: soyons honnêtes, cet exercice n'était pas très passionnant, et ne laisse pas beaucoup de place à l'intuition.*
Toutefois, il ne s'agit pas seulement de concepts inventés pour torturer les sups, et vous rencontrerez de nouveau les ouverts et les fermés dès l'an prochain. Ils permettent de définir ce qu'on appelle la topologie, qui permet par exemple de généraliser les notions de limite ou de continuité à des fonctions définies ailleurs que sur **R**. *Il s'agit là d'une très jolie branche des maths, très géométrique et sur laquelle il est relativement facile*[4] *de se forger une intuition.*

[4] En tous cas bien plus que dans cet exercice.

PROBLÈME : SUITE DE FIBONACCI

Partie I. Généralités

1. Procédons par récurrence **double** sur $n \in \mathbf{N}$.
On évidemment $F_0 = 1 \in \mathbf{N}$ et $F_1 = 1 \in \mathbf{N}$.
Supposons que F_n et F_{n+1} soient des entiers naturels. Alors $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \in \mathbf{N}$.
Et donc par le principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ F_n \in \mathbf{N}.}$

2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geqslant 0$, donc $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
Puisque son premier terme est $F_1 = 1 > 0$, elle ne prend donc que des valeurs strictement positives, et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n > 0$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} > 0$, et donc que $\boxed{(F_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante.}}$

3. Ce résultat n'est en fait pas spécifique à la suite de Fibonacci, et toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ strictement croissante d'entiers naturels non nuls vérifie $u_n \geqslant n$.
Prouvons le par récurrence **simple** sur $n \geqslant 1$.
On a $F_1 \geqslant 1$. Et si $F_n \geqslant n$, alors F_{n+1} est un entier strictement supérieur à F_n, et donc strictement supérieur à n.
Il est donc au moins égal à $n+1$: $F_{n+1} \geqslant n+1$.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ F_n \geqslant n.}$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty.}$

Méthode
Comment décider s'il s'agit d'une récurrence simple ou d'une récurrence double ? Il suffit tout simplement de regarder comment se prouve l'hérédité : a-t-on besoin de supposer l'hypothèse de récurrence vraie à un seul rang, ou aux deux rangs précédents.
Ici, on constate qu'on arrive à passer directement de $\mathcal{P}(n)$ à $\mathcal{P}(n+1)$, il s'agit donc d'une récurrence simple.

4. Prouvons le résultat par récurrence **simple** sur **N**.
Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} F_k^2 = 1 = F_0F_1$.
Supposons donc que $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 = F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}\left(F_n + F_{n+1}\right) = F_{n+1}F_{n+2}.$$

Donc la propriété est héréditaire, et on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}.}$

Alternative : donnons une autre solution, qui ne nécessite pas de récurrence.
Il s'agit de noter que pour $k \geqslant 1$, $F_k^2 = F_k(F_{k+1} - F_{k-1})$ et donc pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(F_kF_{k+1} - F_kF_{k-1}\right) = F_0^2 + \sum_{k=1}^{n} F_kF_{k+1} - \sum_{i=0}^{n-1} F_{i+1}F_i = F_0^2 + F_nF_{n+1} - F_0F_1 = \boxed{F_nF_{n+1}.}$$

5. Prouvons le résultat par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}^*$.
On a $\sqrt{2}F_1 < \underbrace{F_2}_{=2} \leqslant 2F_1$.
De même, $\sqrt{2}F_2 = \sqrt{2} < 3 \leqslant \underbrace{2F_2}_{=4}$.

Sans valeur approchée
Pas besoin d'une calculatrice pour justifier que $\sqrt{2} < 3$: il suffit de dire que $3^2 = 9 > 2$.

Donc notre récurrence est initialisée.
Supposons donc $\sqrt{2}F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n$ et $\sqrt{2}F_{n+1} < F_{n+2} \leqslant 2F_{n+1}$.
Alors en ajoutant ces deux inégalités, il vient

$$\sqrt{2}(F_n + F_{n+1}) < F_{n+1} + F_{n+2} \leqslant 2(F_n + F_{n+1}) \Leftrightarrow \sqrt{2}\, F_{n+2} < F_{n+3} \leqslant 2F_{n+2}.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+2$, et par le principe de récurrence double, elle l'est pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Soit $p \leqslant q \leqslant r$ trois entiers, et supposons qu'il existe un triangle rectangle dont les côtés soient F_p, F_q et F_r.
Puisque F_r est le plus grand des trois, c'est nécessairement la longueur de l'hypoténuse, de sorte que par Pythagore $F_r^2 = F_p^2 + F_q^2$.
On ne peut évidemment pas avoir $q = r$, puisque $F_p^2 \geqslant 1$.
Donc $q < r$, et donc $F_q \leqslant F_{r-1}$ et donc $F_p \leqslant F_q \leqslant F_{r-1}$.
On en déduit que $F_r^2 = F_p^2 + F_q^2 \leqslant 2F_{r-1}^2$ et donc $F_r \leqslant \sqrt{2}F_{r-1}$, contredisant le résultat de la question précédente.

6. Notons tout de suite, que pour $k > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $\binom{n-k}{k} = 0$, puisqu'alors $n-k < k$.
En effet, on a $k \leqslant n-k \Leftrightarrow 2k \leqslant n \Leftrightarrow k \leqslant \frac{n}{2}$, et puisque k est entier, ceci équivaut à $k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
Et donc les deux sommes de l'énoncé sont bien égales. Nous allons plutôt prouver que $F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$, puisque cette somme à l'avantage de ne pas comporter de partie entière.
Comme indiqué, prouvons la formule par récurrence **double** sur $n \in \mathbf{N}$.
Pour $n = 0$, on a $F_0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0-k}{k} = \binom{0}{0} = 1$.
Pour $n = 1$, on a $F_1 = 1$ et $\sum_{k=0}^{1} \binom{1-k}{k} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = \binom{1}{0} = 1$.
Donc la récurrence est initialisée.
Supposons que $F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$ et $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k}$. Alors

$$\begin{aligned}
F_{n+2} = F_n + F_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \binom{n+1}{0} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i+1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k+1} \right) \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1-k}{k+1} \\
&= \binom{n+2}{0} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+2-j}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+2-j}{j}.
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
Dans la seconde somme, après avoir isolé le terme $k = 0$, on a posé $i = k-1$.

Identité de Pascal.

Chgt d'indice
Cette fois on a posé $j = k+1$.

Ne reste alors qu'à remarquer que puisque $n+2 \geqslant 2$, $\binom{n+2-(n+2)}{n+2} = 0$, et donc on peut ajouter un terme $k = n+2$ à la somme, de sorte que $F_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k}$.

Par le principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}}$.

Pour interpréter cette formule sur le triangle de Pascal, notons que $\binom{n}{0}$ est le premier coefficient de la ligne numéro n du triangle, et que pour tout k, $\binom{n-(k+1)}{k+1}$ est le coefficient situé sur la ligne au dessus et dans la colonne à droite de $\binom{n-k}{k}$.
Autrement dit, F_n est la somme des coefficients du triangle de Pascal en partant du premier coefficient de la ligne numéro n (en gardant en tête que les lignes sont numérotées depuis 0) et en suivant une diagonale ascendante.

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & \nearrow F_3 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & \nearrow F_6 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \nearrow F_8 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
\end{array}$$

Partie II. Formule de Binet et conséquences

7. Il n'y a aucune difficulté : le discriminant vaut 5, et les deux solutions sont donc

$$\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ et } \boxed{\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.}$$

8. Une fois n'est pas coutume, prouvons le résultat par récurrence simple sur $n \in \mathbf{N}$.
Pour $n = 2$, on a $xF_1 + F_0 = x + 1 = x^2$.
Supposons que $x^n = xF_{n-1} + F_{n-2}$.
Alors $x^{n+1} = x^n x = x^2 F_{n-1} + xF_{n-2} = (x+1)F_{n-1} + xF_{n-2} = xF_n + F_{n-1}$.
Donc la formule est héréditaire, et on en déduit par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $\boxed{x^n = xF_{n-1} + F_{n-2}.}$

Détails
Puisque $x^2 - x - 1 = 0$, $x^2 = x + 1$.

9. Soit $n \geqslant 1$. Alors par la question précédente, on a $\begin{cases} \alpha^{n+1} = \alpha F_n + F_{n-1} \\ \beta^{n+1} = \beta F_n + F_{n-1} \end{cases}$

Alors en soustrayant les deux équations, $F_n(\alpha - \beta) = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}$.

Mais $\alpha - \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$, et donc $\boxed{F_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}.}$

Remarquons enfin que cette formule est encore valable[5] pour $n = 0$, car $F_0 = 1 = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^{0+1} - \beta^{0+1}}{\sqrt{5}}$.

[5] Mais pas la preuve donnée ci-dessus qui ne valait que pour $n \geqslant 1$.

10. Attention, l'énoncé ne nous dit pas qu'il s'agit de la partie entière de $\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}$, mais bien de l'entier le plus proche[6].

En effet, puisque $\beta < 0$, pour n pair, $-\beta^{n+1} > 0$, et donc $F_n > \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}$ et donc n'a aucune chance d'être sa partie entière.

Notons plutôt que $\left| F_n - \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \right| = \frac{|\beta|^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

Mais $|\beta| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$. Et donc $\left| \frac{\beta^{n+1}}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{2}$.

Or, pour tout réel x, il existe au plus un seul entier à distance strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ de x, qui est donc l'entier le plus proche de x.

[6] Par exemple, l'entier le plus proche de $\frac{2}{3}$ est 1, qui n'est pas $\left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor$.

Remarque
Si $x \notin \mathbf{Z}$ mais $2x \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire si x est de la forme $n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, alors il existe deux entiers à distance $1/2$ de x, mais aucun à une distance strictement inférieure. Je ne me prononce pas sur lequel serait l'entier le plus proche de x, mais le cas de figure ne se présente pas ici.

11. Utilisons la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\sqrt{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(-\sqrt{5}\right)^k\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n+1}\binom{n+1}{k}\sqrt{5}^k + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n+1}\binom{n+1}{k}\sqrt{5}^k - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n+1}\binom{n+1}{k}\underbrace{(-1)^k}_{=1}\sqrt{5}^k - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n+1}\binom{n+1}{k}\underbrace{(-1)^k}_{=-1}\sqrt{5}^k\right)$$

$$= \frac{2}{2^{n+1}}\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\sqrt{5}\right)^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2k+1}(\sqrt{5})^{2k+1}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2k+1}5^k.$$

Détails
Les entiers impairs inférieurs à $n+1$ sont les $2k+1$ avec $2k+1 \leqslant n+1 \Leftrightarrow k \leqslant \frac{n}{2}$. k étant entier, on a donc $k\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

Et donc après division par $\sqrt{5}$, il vient $\boxed{F_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2k+1}5^k.}$

Partie III. Des limites de sommes

12.a. Il suffit d'utiliser la formule de Binet : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}} = \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^{n+2}}\,\frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+2}} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+2}}.$$

Astuce
On a factorisé au numérateur et au dénominateur par le terme que l'on pensait «prépondérant».

Mais $|\beta| < 1$ et $|\alpha| > 1$, donc $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, de sorte que $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\alpha}.}$

12.b. Puisque $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+2}F_{n-1}-F_nF_{n+1}}{F_{n+1}F_{n-1}}$, il s'agit donc de prouver que $F_{n+2}F_{n-1}-F_nF_{n+1} = (-1)^{n+1}$.
Procédons par récurrence simple sur $n \geqslant 1$.
Pour $n = 1$, on a $F_3F_0 - F_1F_2 = 3-2 = 1 = (-1)^{1+1}$.
Supposons donc que $F_{n+2}F_{n-1}-F_nF_{n+1} = (-1)^{n+1}$. Alors

$$F_{n+3}F_n - F_{n+1}F_{n+2} = (F_{n+2}+F_{n+1})F_n - (F_n+F_{n-1})F_{n+2} = F_{n+1}F_n - F_{n-1}F_{n+2} = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}.$$

Donc la formule est vraie au rang $n+1$, et par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

12.c. On en déduit alors que pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{F_{k+1}F_{k-1}} &= \sum_{k=1}^n\left(\frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} - \frac{F_k}{F_{k-1}}\right)\\ &= \sum_{k=1}^n \frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} - \sum_{k=1}^n\frac{F_k}{F_{k-1}}\\ &= \sum_{\ell=3}^{n+2}\frac{F_\ell}{F_{\ell-1}} - \sum_{k=1}^n\frac{F_k}{F_{k-1}}\\ &= \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} + \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_1}{F_0} - \frac{F_2}{F_1}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha+\alpha-1-2 = 2\alpha-3 = \boxed{\sqrt{5}-2.}\end{aligned}$$

12.d. Soit $x \in \left]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right[$, et soit $n \geqslant 2$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n F_kx^k &= 1 + x + \sum_{k=2}^n F_kx^k\\ &= 1 + x + \sum_{k=2}^n (F_{k-1}+F_{k-2})\,x^k\\ &= 1 + x + \sum_{k=2}^n F_{k-1}x^k + \sum_{k=2}^n F_{k-2}x^k = 1 + x + \sum_{j=1}^{n-1}F_jx^{j+1} + \sum_{\ell=0}^{n-2}F_\ell x^{\ell+2}\end{aligned}$$

Remarque
Il est indispensable d'isoler les termes F_0 et F_1, car ces deux nombres ne s'écrivent pas comme somme de deux nombres de Fibonacci plus petits.

$$= 1 + x + x\left(\sum_{j=0}^{n} F_j x^j - F_n x^n - F_0\right) + x^2\left(\sum_{\ell=0}^{n} F_\ell x^\ell - F_{n-1}x^{n-1} - F_n x^n\right).$$

On en déduit, en isolant la somme, que

$$(1-x-x^2)\sum_{k=0}^{n} F_k x^k = 1 - x^2 F_{n-1}x^{n+1} - x^2 F_n x^n \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} F_k x^k = \frac{1 - x^2 F_n x^n - x^2 F_{n-1}x^{n-1}}{1-x-x^2}.$$

Or, on a $F_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha(\alpha x)^n - \beta(\beta x)^n\right)$.
Puisque $|x| < \frac{1}{\alpha}$, $|\alpha x| < 1$, et donc $(\alpha x)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et de même, $|\beta x| < 1$, et donc $(\beta x)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc $F_n x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $F_{n-1}x^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit donc que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} F_k x^k = \frac{1}{1-x-x^2}.}$

Partie IV. Le théorème de Zeckendorf

13. Le plus simple est probablement de distinguer deux cas, suivant que n soit pair ou impair.
Si $n = 2p$ est pair, il s'agit de prouver que $\sum_{k=0}^{p-1} F_{2p-2k} < F_{2p+1}$ et si $n = 2p-1$ est impair, il s'agit de prouver que $\sum_{k=0}^{p-1} F_{2p-1-2k} < F_{2p}$.

Prouvons ces deux résultats en même temps par une récurrence simple sur $p \in \mathbf{N}^*$.
Notons alors $\mathscr{P}(p)$ la proposition :

$$\sum_{k=0}^{p-1} F_{2p-2k} < F_{2p+1} \text{ et } \sum_{k=0}^{p-1} F_{2p-1-2k} < F_{2p}.$$

Pour $p = 1$, on a $\sum_{k=0}^{0} F_{2-2k} = F_2 < F_3$ et $\sum_{k=0}^{0} F_{1-2k} = F_1 < F_2$.
Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie, la récurrence est initialisée.
Supposons donc $\sum_{k=0}^{p-1} F_{2p-2k} < F_{2p+1}$ **et** $\sum_{k=0}^{p-1} F_{2p-1-2k} < F_{2p}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} F_{2p+2-2k} &= F_{2p+2} + \sum_{k=1}^{p+1} F_{2p+2-2k}\\ &= F_{2p+2} + \sum_{i=0}^{p-1} F_{2p-2i}\\ &< F_{2p+2} + F_{2p+1} < F_{2p+3}.\end{aligned}$$

Et de même,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} F_{2p+1-2k} &= F_{2p+1} + \sum_{k=1}^{p} F_{2p+1-2k}\\ &= F_{2p+1} + \sum_{i=0}^{p-1} F_{2p-1-2i}\\ &< F_{2p+1} + F_{2p} < F_{2p+2}.\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie, et donc que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)2 \rfloor} F_{n-2k} < F_{n+1}.}$

Simple ou double ?
On pourrait procéder par récurrence double.
Mais la preuve de l'hérédité montre que pour prouver que la formule est vraie pour un rang n, il suffit de la savoir vraie pour $n-2$, et pas à la fois pour $n-1$ et $n-2$.
Donc ce n'est pas tout à fait une récurrence double. Mais pas tout à fait une récurrence simple non plus, sauf à bien choisir son hypothèse de récurrence comme ci-dessus.

Chgt d'indice
$i = k - 1$.

Tout n ?
Nous utilisons ici le fait que tout élément de $\mathbf{N}^*$ est soit de la forme $2p$, soit de la forme $2p-1$, pour $p \in \mathbf{N}^*$.
Si on choisissait d'écrire les impairs sous la forme $2p+1$, cela marcherait moins bien, car il faudrait que p commence à 0. Mais pas pour les pairs...

14. Il est évident que tous les F_{a_i} doivent être inférieurs à F_N.
Supposons donc par l'absurde que $F_{a_1} < F_N$, et donc que $F_{a_1} \leqslant F_{N-1}$.
Alors, les a_i étant deux à deux non consécutifs, on doit avoir $F_{a_2} < F_{N-3}$, donc $F_{a_3} < F_{N-5}$, etc, et donc

$$n = F_{a_1} + F_{a_2} + \cdots + F_{a_k} \leqslant F_{N-1} + F_{N-3} + \cdots + F_{N-2\lfloor \frac{N-2}{2} \rfloor}.$$

Soit encore, d'après le résultat de la question précédente, $n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (N-2)/2 \rfloor} F_{N-1-2k} < F_N$.

C'est absurde puisque cela contredit le fait que $F_N \leqslant n$.
Donc nécessairement, $\boxed{F_{a_1} = F_N.}$.

15. Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}^*$ que si une représentation de Fibonacci de n existe, alors elle est unique.
Pour $n = 1$, $n = F_1$ est une représentation de Fibonacci de n.
Supposons donc que tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ possède une unique représentation de Fibonacci, et soit $n + 1 = F_{a_1} + F_{a_2} + \cdots + F_{a_k}$ une éventuelle[7] représentation de Fibonacci de $n + 1$.
Soit alors N le plus grand entier tel que $F_N \leqslant n + 1 < F_{N+1}$.
Par la question précédente, $a_0 = N$.
Si $n + 1 = F_N$, on a bien là l'unique représentation de Fibonacci de $n + 1$.
Et sinon, alors $F_{a_1} + \cdots + F_{a_k} = n + 1 - F_N$ est une représentation de Fibonacci de $n + 1 - F_N$.
Puisque $F_N \geqslant 1$, $n + 1 - F_N \leqslant n$, et donc une telle représentation de Fibonacci est unique.
Donc la représentation de Fibonacci de $n + 1$, si elle existe, est unique.
Par le principe de récurrence forte, tout entier $n \geqslant 1$ possède au plus une représentation de Fibonacci.

[7] Nous n'avons pas encore prouvé qu'il en existe !

16. Reste à prouver l'existence d'une représentation de Fibonacci de tout entier $n \geqslant 1$.
Procédons encore une fois par récurrence forte.
Pour $n = 1$, on a $1 = F_1$.
Supposons donc que tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ possède une représentation de Fibonacci, et soit N tel que $F_N \leqslant n + 1 < F_{N+1}$.
▶ Si $n + 1 = F_N$, alors nous avons là une représentation de Fibonacci de $n + 1$.
▶ Sinon, par hypothèse de récurrence, $n + 1 - F_N$ possède une représentation de Fibonacci $n + 1 - F_N = F_{a_1} + F_{a_2} + \cdots + F_{a_k}$ avec pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $a_{i+1} < a_i - 1$.
Alors $F_{a_1} + F_N \leqslant n + 1 < F_{N+1} = F_{N-1} + F_N$. Et donc $F_{a_1} < F_{N-1}$, de sorte que $a_1 \leqslant N - 1$.
Donc $n + 1 = F_N + F_{a_1} + F_{a_2} + \cdots + F_{a_k}$ est bien une représentation de Fibonacci de $n + 1$.
Par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe une représentation de Fibonacci de n.

Ceci achève de prouver l'existence d'une telle représentation, son unicité ayant déjà été prouvée, nous avons bien l'existence et l'unicité, et donc nous avons prouvé le théorème de Zeckendorf.

17. Les questions précédentes nous donnent en fait un algorithme pour arriver à nos fins, il s'agit à chaque fois de prendre le plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à n.
Calculons donc les nombres de Fibonacci jusqu'à dépasser 44 :

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13, F_7 = 21, F_8 = 34, F_9 = 55.$$

Donc le plus grand nombre de la décomposition de Fibonacci de 44 est $F_8 = 34$.
Puisque $44 - F_8 = 10$, qui est entre F_5 et F_6. Donc le nombre suivant de la décomposition de Fibonacci de 44 est F_5. Alors $44 - 34 - 8 = 2 = F_2$.
$\boxed{\text{Donc la décomposition de Fibonacci de 44 est } 34 + 8 + 2.}$

18. Il s'agit de mettre en œuvre l'algorithme précédent.
Nous proposons deux solutions.
La première d'entre elles est sûrement la plus évidente : elle consiste en une fonction qui cherche le plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à n, puis d'une seconde qui répète le procédé :

```
def plus_grand_fib(n) :
        a,b = 1,1
        while b<=n :
```

```
            a,b = b,a+b
        return a


def zeckendorf(n) :
        L = []
        while n !=0 :
                p = plus_grand_fib(n)
                L.append(p)
                n = n-p
        return L
```

Cette option possède un inconvénient : les termes successifs de la suite de Fibonacci sont calculés plusieurs fois.
Une autre option, un peu plus délicate à mettre en œuvre est donc la suivante, qui ne calcule qu'une fois les nombres de Fibonacci inférieurs à n et les garde en mémoire dans une liste.

```
def zeckendorf(n) :
        fib = [1,2]
        decomposition = []
        while fib[-1]<=n :
                fib.append(fib[-1] + fib[-2])
        decomposition.append(fib[-2]) #le dernier est trop grand
        n = n-decomposition[0]
        while n !=0 : # tant qu'on n'a pas 0
                k=1
                while fib[k]<=n : #recherche du plus grand fibonacci inférieur à n
                        k+=1
                decomposition.append(fib[k-1])
                n = n -fib[k-1]
        return decomposition
```

Quelques commentaires *: la suite (F_n) est très classique, et est appelée suite de Fibonacci et doit son nom à Leonardo Fibonacci qui s'y est intéressé dès le XIII^ème^ siècle, via l'amusant problème suivant : «Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?»*
Si on note x_n le nombre de couples de lapins au début du $n^{\text{ème}}$ mois, on a donc $x_0 = 1$ et $x_1 = 1$. De plus, au début du $n^{\text{ème}}$ mois, le nombre de couples est égal au nombre de couples déjà présents le mois précédent (x_{n-1}), plus le nombre de couples nés depuis.
Mais puisqu'il faut deux mois à un couple pour atteindre la maturité sexuelle, le nombre de couples qui viennent de naître est égal au nombre de couples âgés de plus de deux mois, c'est-à-dire au nombre de couples qui étaient déjà nés deux mois avant : c'est x_{n-2}.
Et ainsi, on a la relation

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + x_{n-1}.$$

On retrouve donc la suite (F_n).
Cette suite a passionné des générations de mathématiciens, et il existe toujours une revue mathématique[8] qui ne publie que des articles traitant des propriétés de (F_n).

[8] Le Fibonacci Quarterly.