Devoir surveillé 3

Exercice 1 : modules et arguments des solutions d'une équation de degré 2.

Dans cet exercice, a et b désignent deux nombres complexes non nuls, et on note (E) l'équation $z^2 - 2az + b = 0$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.
On note z_1 et z_2 les solutions (éventuellement confondues) de (E).

1. **Question préliminaire :** exprimer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ en fonction de a et b. Justifier alors que z_1 et z_2 sont non nuls.

Partie I. Étude d'un cas particulier

Dans cette partie, et seulement dans cette partie, on suppose que $b = -6 + 8i$.
On note M_1 le point du plan d'affixe z_1, M_2 le point d'affixe z_2 et A le point d'affixe $2a$.

TODO
Demander les solutions sous forme algébrique !

2. Résoudre l'équation (E) dans le cas où $a = \sqrt{2}$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le milieu du segment $[M_1 M_2]$ soit situé sur l'axe des ordonnées.
4. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?
5. Montrer qu'il existe exactement deux valeurs de a, que l'on déterminera, pour lesquelles le triangle AM_1M_2 est isocèle et rectangle en A.

Partie II. Étude des solutions d'une équation de degré 2.

On revient au cas général, et on note $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ les formes exponentielles de z_1 et z_2, avec $(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \times]-\pi, \pi]^2$.

6. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $z_1 = \overline{z_2}$.
   Montrer que z_1 et z_2 sont conjugués si et seulement si a et b sont tous les deux réels et que $a^2 - b \leqslant 0$.
7. *Une condition nécessaire et suffisant pour que* $|z_1| = |z_2|$.
   a. On suppose que $r_1 = r_2$. Déterminer alors les formes exponentielles de a et b, et en déduire que $\frac{a^2}{b}$ est un nombre réel, appartenant à l'intervalle $]0, 1]$.
   b. Prouver que réciproquement, si $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$, alors $|z_1| = |z_2|$.
8. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.
   a. On suppose que $\theta_1 = \theta_2$. À l'aide de la forme exponentielle de $\dfrac{a^2}{b}$, montrer que $\dfrac{a^2}{b}$ est un réel appartenant à $[1, +\infty[$.
   b. À l'inverse, on suppose que $\dfrac{a^2}{b} \in [1, +\infty[$. Prouver que $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

Exercice 2 : limite d'une somme d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\, dx$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est bien défini.
2. Calculer u_1.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   a. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x\, dx$.
   b. Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de n, et en déduire la valeur de u_3.

4. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_n$ et en déduire qu'elle est convergente.
5. a. Déterminer un réel $K \in]0,1[$ tel que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin x \leqslant K$.

   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2\pi}{3} K^n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
6. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

   a. Montrer que la suite $(S_n)_n$ est croissante. En déduire qu'elle est possède une limite finie que l'on notera S.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x\,(1-\sin x)} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1} x}{\cos x(1-\sin x)}\,dx$.

   c. En déduire que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x(1-\sin x)}$.

   d. À l'aide d'un changement de variable, prouver que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u)^2(1+u)}$.

   e. En déduire la valeur de S.

Problème : quelques applications des polynômes de Tchebychev

Le but de ce problème est d'étudier une famille classique de polynômes nommés en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Tchebychev (1821–1894) et de découvrir quelques unes de leurs applications.
La partie I introduit les polynômes de Tchebychev, qui sont utilisés dans les parties II et III.
Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I. Polynômes de Tchebychev

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$\forall t \in [-1,1],\ f_n(t) = \cos\big(n \operatorname{Arccos}(t)\big).$$

1. Pour tout $t \in [-1,1]$, déterminer $f_0(t), f_1(t)$ et $f_2(t)$ en fonction de t, et prouver que f_0, f_1, f_2 sont alors des fonctions polynomiales sur $[-1,1]$.
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall t \in [-1,1]$, $f_{n+2}(t) = 2t f_{n+1}(t) - f_n(t)$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est une fonction polynomiale sur $[-1,1]$, de degré n, et que si $n \geqslant 1$, alors le coefficient dominant de f_n vaut 2^{n-1}.
   Déterminer également le coefficient constant (= de degré 0) de f_n.

Dans toute la suite du problème, on note $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite de fonctions polynomiales définies par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

On notera qu'en particulier, d'après la question 2, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, f_n est de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1}, et que pour tout $x \in [-1,1]$, $f_n(x) = T_n(x)$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$.

   a. Justifier que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$. En déduire la valeur de $T_n(1)$.

   b. En déduire que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction polynomiale telle que : $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $f(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, alors $f = T_n$.

   c. En utilisant la formule de Moivre, prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(x^2-1\right)^k x^{n-2k}.$$

   d. En déduire que $T_n'(1) = n^2$.

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}$, $T_n(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch}(nt)$.
5. À l'aide de la question 3.a, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, T_n possède exactement n racines réelles $x_0 > x_1 > \cdots > x_{n-1}$, que l'on déterminera, toutes dans $]-1,1[$.
6. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que si f est une fonction polynomiale de degré n, de coefficient dominant α et qui possède n racines réelles distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \alpha \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$.

   En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T_n(x) = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi \right) \right)$.

Partie II. Calcul de $\zeta(2)$.

Le but de cette partie est de calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

7. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \leqslant 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
8. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{X(X-1)}$.
   En déduire, à l'aide de la question précédente, que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Dans toute la suite de cette partie, on note $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

9. Pour $n \geqslant 1$, on note $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
   a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, une relation entre u_{2n}, u_n et v_n.
   b. En déduire que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge, et que sa limite vaut $\dfrac{3}{4}\ell$.
10. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi \right)$.
    a. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$, $\dfrac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - x_k}$.
    b. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-x_k} = n^2$, puis les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)}{4n}\pi \right)}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n} \right)}$.
11. Prouver que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.
12. En déduire un encadrement de v_n, puis la valeur de $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Partie III. Formule de Cotes.

13. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x^{2n} + 2x^n + 1 = 2x^n \left[T_n\left(\frac{x^2+1}{2x} \right) + 1 \right].$$

14. Dans cette question, on fixe $p \in \mathbf{N}^*$. Le but de la question est alors d'obtenir la décomposition de $T_{2p} + 1$ en produit de polynômes irréductibles.
    a. Soit f une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 2$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une racine de f telle que :

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in]\lambda - \eta, \lambda + \eta[,\ f(x) \geqslant 0.$$

    En utilisant la décomposition de f en produit de polynômes irréductibles, prouver qu'il existe une fonction g, polynomiale de degré $n-2$ telle que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = (x-\lambda)^2 g(x)$.

b. Montrer que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\cos\left(\dfrac{2k+1}{2p}\pi\right)$ est racine de $T_{2p} + 1$.

c. Étudier le signe de $T_{2p} + 1$ sur $]-1, 1[$.

d. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T_{2p}(x) + 1 = 2^{2p-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \left(x - \cos\left(\frac{2k+1}{2p}\pi\right)\right)^2$.

15. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, $x^{4n} + 2x^{2n} + 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + 1\right)^2$.

16. Prouver enfin que pour $n \in \mathbf{N}$, la factorisation de $X^{2n} + 1$ en produit de polynômes irréductibles est

$$X^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + 1\right).$$

Ce résultat pourra être retrouvé bien plus facilement en utilisant les racines $(2n)^{\text{èmes}}$ de l'unité lorsque nous en saurons davantage sur les polynômes à coefficients complexes.
Cette décomposition en produit de facteurs irréductibles permet notamment de calculer les décompositions en éléments simples de fractions rationnelles de la forme $\dfrac{1}{X^{2p}+1}$, par exemple pour intégrer une telle fraction.

17. **Question subsidiaire** : déterminer la décomposition en produit de facteurs irréductibles de $X^{2p+1} + 1$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 3

EXERCICE 1 : MODULES ET ARGUMENTS DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DE DEGRÉ 2.

1. Il s'agit des relations racines-coefficients données en cours : on a $\boxed{z_1 + z_2 = 2a}$ et $\boxed{z_1 z_2 = b.}$
Puisque $b \neq 0$, on a donc z_1 et z_2 non nuls.

Étude d'un cas particulier

2. Il s'agit donc de résoudre l'équation du second degré $z^2 - 2\sqrt{2}z - 6 + 8i = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 8 - 8(-3+4i) = 32(1-i)$.
Cherchons donc une racine carrée de Δ sous forme algébrique $\delta = c + id$.

On a alors $\delta^2 = 32(1-i) \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - d^2 = 32 \\ 2cd = -32 \\ c^2 + d^2 = |\Delta| = 32\sqrt{2} \end{cases}$

On obtient alors facilement $c^2 = 16\left(1+\sqrt{2}\right)$ et $d^2 = 16\left(\sqrt{2}-1\right)$.
Puisque par ailleurs c et d sont de signes opposés, on peut par exemple[1] prendre $c = 4\sqrt{1+\sqrt{2}}$ et $d = -4\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Soit $\delta = 4\sqrt{1+\sqrt{2}} - 4i\sqrt{\sqrt{2}-1}$.
Et donc les deux solutions de (E) sont

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2} + 2\sqrt{1+\sqrt{2}} - 2i\sqrt{\sqrt{2}-1} \text{ et } z_2 = \sqrt{2} - 2\sqrt{1+\sqrt{2}} + 2i\sqrt{\sqrt{2}-1}.}$$

[1] Rappelons qu'il y a deux choix possibles pour δ, et que n'importe laquelle des deux racines nous convient.

3. Le milieu de $[M_1M_2]$ est sur l'axe des ordonnées si et seulement si $\frac{z_1+z_2}{2} \in i\mathbf{R}$.
Mais $z_1 + z_2 = 2a$, donc le milieu de $[M_1M_2]$ est sur l'axe des ordonnées si et seulement si a est imaginaire pur.

4. Les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses si et seulement si $z_1 = \overline{z_2}$.
Mais si c'est le cas, alors $b = z_1 z_2 = z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$.
Puisque b n'est pas réel, ceci n'est pas possible : $\boxed{\text{il n'existe pas de tel } a.}$

5. Le triangle AM_1M_2 est rectangle et isocèle en A si et seulement si M_2 est l'image de M_1 par une rotation de centre A et d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$.
Quitte à échanger z_1 et z_2, on peut supposer qu'il s'agit d'une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
Or, M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre A et de rayon $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si $z_2 - 2a = i(z_1 - 2a) \Leftrightarrow z_2 - iz_1 = 2a(1-i)$.
Par ailleurs, nous avons toujours $z_1 + z_2 = 2a$, et donc AM_1M_2 est rectangle isocèle en A si et seulement si

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a \\ z_1 - iz_2 = 2a(1-i) \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} z_1 + z_2 = 2a \\ -z_2(1+i) = -2ai \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 2a \\ z_2 = \frac{2ai}{1+i} = a(1-i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = a(1+i) \\ z_2 = a(1-i) \end{cases}.$$

Donc si AM_1M_2 est isocèle rectangle en A, $b = z_1z_2 = a^2(1-i)(1+i) = 2a^2$.
Et donc a est une racine carrée de $\frac{b}{2} = -3+4i$.

Et inversement, si a est une racine carrée de $-3+4i$, alors les complexes $u_1 = a(1+i)$ et $u_2 = a(1-i)$ vérifient $\begin{cases} u_1 + u_2 = 2a \\ u_1u_2 = 2a^2 = -6+8i \end{cases}$ et donc sont les solutions de (E).
Comme de plus on a bien $u_1 - 2a = i(u_2 - 2a)$, le triangle AM_1M_2 est bien isocèle, rectangle en A.

Rappel
(u, v) est solution de
$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$
si et seulement si $\{u, v\}$ est l'ensemble des solutions de $z^2 - sz + p = 0$.

Et donc AM_1M_2 est isocèle rectangle en A si et seulement si $a^2 = -3+4i$.
Or les racines carrées de $-3+4i$ sont[2] $1+2i$ et son opposé.
Donc $\boxed{AM_1M_2 \text{ est rectangle, isocèle en } A \text{ si et seulement si } a = 1+2i \text{ ou } a = -1-2i.}$

[2] Résoudre un système pour les trouver.

Partie II. Étude des solutions d'une équation de degré 2.

6. Il est classique que si a et b sont réels, avec $\Delta = 4(a^2 - b) \leqslant 0$, alors les deux solutions de l'équation sont complexes et conjuguées.

$\Delta = 0$
Le cas où le discriminant est nul est un peu particulier : on a alors $z_1 = z_2 \in \mathbf{R}$.
Donc on peut bien affirmer que z_1 et z_2 sont conjuguées.

Inversement, supposons que $z_1 = \overline{z_2}$.
Alors $2a = z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\,\mathrm{Re}(z_1)$. Donc a est un réel.
Et $b = z_1 z_2 = z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 \in \mathbf{R}$.
Et enfin, $\Delta = 4(a^2 - b) = 4\left(\mathrm{Re}(z_1)^2 - |z_1|^2\right) \leqslant 0$.

> **Rappel**
> Pour tout $z \in \mathbf{C}$,
> $$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|.$$

7. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $|z_1| = |z_2|$.

7.a. Si $r_1 = r_2$, alors $a = \dfrac{z_1+z_2}{2} = \dfrac{r_1}{2}\left(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}\right) = r_1\cos\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$.
Et donc $a^2 = r_1^2\cos^2\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Et $b = z_1z_2 = r_1^2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
On en déduit donc que $\dfrac{a^2}{b} = \cos^2\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$, qui est donc bien un réel de $[0,1]$, nécessairement non nul car on a supposé $a \neq 0$.

7.b. Inversement, supposons $\dfrac{a^2}{b} \in]0,1]$. Alors le discriminant de (E) est
$\Delta = 4a^2 - 4b = (2a)^2\left(1 - \dfrac{b}{a^2}\right)$, avec $1 - \dfrac{b}{a^2}$ un réel négatif.
Donc une racine carrée de Δ est $\delta = 2ai\sqrt{\dfrac{b}{a^2} - 1}$.
Et donc on a $z_1 = \dfrac{2a+\delta}{2} = a + ia\sqrt{\dfrac{b}{a^2}-1} = a\left(1 + i\sqrt{\dfrac{b}{a^2}-1}\right)$ et $z_2 = a\left(1 - i\sqrt{\dfrac{b}{a^2}-1}\right)$.
Et donc on en déduit que
$$|z_1| = |a|\left|1 + i\sqrt{\frac{b}{a^2}-1}\right| = |a|\left|1 - i\sqrt{\frac{b}{a^2}-1}\right| = |z_2|.$$
Donc z_1 et z_2 ont bien le même module.

> **Danger !**
> N'oublions pas que a est un complexe, il n'est pas question d'écrire $\sqrt{a^2}$.

> **Conjugués**
> Les deux réels $1 \pm i\sqrt{\frac{b}{a^2} - 1}$ sont conjugués. En revanche, z_1 et z_2 ne sont pas forcément conjuguées.

8. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\arg(z_1) = \arg(z_2)$

8.a. Cette fois, on a $a = \dfrac{z_1+z_2}{2} = e^{i\theta_1}\dfrac{r_1+r_2}{2}$ et $b = z_1z_2 = r_1r_2e^{2i\theta_1}$.
Et donc $\dfrac{a^2}{b} = \dfrac{(r_1+r_2)^2}{4r_1r_2}$. Donc déjà $\dfrac{a^2}{b}$ est un réel positif.
De plus, $(r_1+r_2)^2 - 4r_1r_2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - 4r_1r_2 = (r_1-r_2)^2 \geqslant 0$.
On en déduit que $(r_1+r_2)^2 \geqslant 4r_1r_2$ et donc que $\boxed{\dfrac{a^2}{b} \geqslant 1.}$

8.b. Le discriminant de (E) est $\Delta = 4\left(a^2 - b\right) = (2a)^2\left(1 - \dfrac{b}{a^2}\right)$.
Cette fois, $\dfrac{b}{a_2} \leqslant 1$ et donc $1 - \dfrac{b}{a^2} \geqslant 0$.
Donc les racines carrées de Δ sont $\pm 2a\sqrt{1 - \frac{b}{a^2}}$.
On en déduit que les solutions de (E) sont $z_1 = a + a\sqrt{1 - \dfrac{b}{a^2}} = a\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{b}{a^2}}\right)$ et $z_2 = a\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{b}{a^2}}\right)$.
Puisque $\sqrt{1 - \dfrac{b}{a^2}}$ est un réel de $[0,1]$, $1 + \sqrt{1 - \dfrac{b}{a^2}}$ et $1 - \sqrt{1 - \frac{b}{a^2}}$ sont des réels positifs, ils sont tous deux d'argument nul. Et donc $\boxed{\arg(z_1) = \arg(z_2) = \arg(a).}$

> **Argument**
> Rappelons que la multiplication par un réel positif ne change pas l'argument (alors que la multiplication par un réel négatif lui ajoute π).

EXERCICE 2 : LIMITE D'UNE SOMME D'INTÉGRALES

1. Il s'agit juste de remarquer que cos ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, et que donc sur cet intervalle, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^n}{\cos x}$ est bien continue[3], donc l'intégrale est bien définie.

2. On a $u_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx = \left[-\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\ln(2).}$

3.a. On a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x\cos x\,dx = \left[\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.}$

[3] Car quotient de deux fonctions continues.

3.b. On a

$$u_{n+2}-u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2} x}{\cos x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x\,dx = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.$$

En particulier, pour $n = 1$, on en déduit que $u_3 = -\frac{1}{2}\frac{3}{4} + u_1 = \boxed{\ln(2) - \frac{3}{8}}.$

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$.
Et donc, $\cos x$ étant positif, $\frac{\sin^{n+1} x}{\cos x} \leqslant \frac{\sin^n x}{\cos x}$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$u_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1} x}{\cos x}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,dx = u_n.$$

Et donc $\boxed{(u_n)_n \text{ est décroissante.}}$
Puisque (u_n) est à valeurs positives (par positivité de l'intégrale), on en déduit, par le théorème de la limite monotone que $\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$

⚠ Attention !
Une suite géométrique (q^n) dont la raison q est dans $[0, 1]$ est décroissante, alors que pour $q \geqslant 1$, elle est croissante.

5.a. Puisque sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\sin x \leqslant \sin \frac{\pi}{3} \leqslant \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\in]0,1[}$.

Dans la suite, on note donc $\boxed{K = \frac{\sqrt{3}}{2}}.$

5.b. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $0 \leqslant \sin^n x \leqslant K^n$, et par ailleurs $\cos x \geqslant \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc $0 \leqslant \frac{\sin^n x}{\cos x} \leqslant 2K^n$.
Et donc par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2K^n\,dt = \frac{2\pi}{3}K^n$.
Puisque $K \in]0,1[$, $K^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

6.a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$, donc (S_n) est croissante.
Par ailleurs, en reprenant l'encadrement de u_k obtenu à la question 5.b on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2\pi}{3}K^k$.
Mais $\sum_{k=0}^{n} \frac{2\pi}{3}K^k = \frac{2\pi}{3}\frac{1-K^{n+1}}{1-K} \leqslant \frac{2\pi}{3(1-K)}$. Et donc (S_n) est majorée.
Étant croissante, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle possède une limite finie.}}$

☠ Danger !
Un majorant doit être une **constante** (indépendante de n).
Il n'est donc pas question de s'arrêter à

$$S_n \leqslant \frac{2\pi}{3}\frac{1-K^{n+1}}{1-K},$$

car cette quantité dépend de n.

6.b. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\sin x \neq 1$. Et donc quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k x}{\cos x} = \frac{1-\sin^{n+1} x}{1-\sin x}$$

de sorte que par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^k x}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k x}{\cos x}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} \sum_{k=0}^{n} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^{n+1}(x)}{\cos x(1-\sin x)}\,dx \\ &= \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos x(1-\sin x)}\,dx.} \end{aligned}$$

6.c. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $0 \leqslant \cos(x)(1-\sin x) \leqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, et donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos x(1-\sin x)}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}K^{n+1}\,dx \leqslant \frac{\pi}{3}\frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}K^{n+1}.$$

Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos x}\,dx = 0$.
On en déduit donc que

$$\boxed{S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)}\,dx.}$$

6.d. Réalisons le changement de variable $t = \sin x$, de sorte que $dt = \cos x\,dx$, et donc

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x(1-\sin x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\left(1-\sin^2 x\right)(1-\sin x)}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1-t^2)(1-t)} = \boxed{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)}.} \end{aligned}$$

Méthode
Trouver le bon changement de variable est toujours délicat.
Ici on a de toutes façons plutôt envie de faire un changement de variable du type sin, cos ou tan afin de faire disparaître les fonctions trigonométriques.
Les bornes de l'intégrales doivent permettre de choisir, puisque $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$.

6.e. Reste à calculer l'intégrale précédente, ce qui nécessite d'intégrer une fraction rationnelle, et donc de déterminer sa décomposition en éléments simples.
La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(X-1)^2(X+1)}$ est de la forme

$$\frac{1}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1}. \qquad (\star)$$

En multipliant $(\star)$ par $(X-1)^2$ et en évaluant en $X = 1$, il vient $\frac{1}{2} = b$.
En multipliant $(\star)$ par $X+1$ et en évaluant en $X = -1$, il vient $c = \frac{1}{4}$.
Enfin, en évaluant $(\star)$ en $X = 0$, on obtient $1 = -a + b + c \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.
Et donc enfin,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(t-1)^2} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t+1} \\ &= \frac{1}{4}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{2}{t-1}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \boxed{\frac{1}{4}\ln\left(7+4\sqrt{3}\right) + \sqrt{3} + \frac{3}{2}.} \end{aligned}$$

PROBLÈME : QUELQUES APPLICATIONS DES POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

Partie I. Polynômes de Tchebychev

1. Soit $t \in [-1,1]$. Alors $f_0(t) = \cos(0) = 1$. De même, $f_1(t) = \cos(\operatorname{Arccos} t) = t$ et

$$f_2(t) = \cos(2\operatorname{Arccos} t) = 2\cos^2(\operatorname{Arccos} t) - 1 = \boxed{2t^2 - 1.}$$

On constate donc que f_0, f_1 et f_2 sont polynomiales sur $[-1,1]$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $t \in [-1,1]$. Alors

$$\begin{aligned} f_{n+2}(t) + f_n(t) &= \cos((n+2)\operatorname{Arccos} t) + \cos(n\operatorname{Arccos} t) \\ &= 2\cos\left(\frac{2n+2}{2}\operatorname{Arccos} t\right)\cos\left(\frac{n+2-n}{2}\operatorname{Arccos} t\right) \\ &= 2\cos((n+1)\operatorname{Arccos} t)\underbrace{\cos(\operatorname{Arccos} t)}_{=t} = 2t f_{n+1}(t). \end{aligned}$$

Formule de factorisation.

Et donc on a bien $\boxed{f_{n+2}(t) = 2t f_{n+1}(t) - f_n(t).}$

Prouvons alors par récurrence double sur n la propriété $\mathscr{P}(n)$: « f_n est polynomiale sur $[-1,1]$, de degré n et si $n \geqslant 1$, alors le coefficient dominant de f_n est 2^{n-1} ».
Nous avons déjà prouvé que f_0 et f_1 sont polynomiales, et que le coefficient dominant de f_1 est $1 = 2^{1-1}$.

Supposons donc que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies, de sorte que f_n et f_{n+1} soient polynomiales, de degrés respectifs n et $n+1$, avec f_{n+1} de coefficient dominant 2^n.
Alors il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $b_0, b_1, \dots, b_n$ tels que pour tout $t \in [-1,1]$,

$$f_n(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \text{ et } f_{n+1}(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t + 2^n t^{n+1}.$$

Alors pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} f_{n+2}(t) = 2t f_{n+1}(t) - f_n(t) &= 2\left(b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t + 2^n t^{n+1}\right) - (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) \\ &= -a_0 + (2b_0 - a_1)t + \cdots + (2b_{n-1} - a_n)t^n + 2b_n t^{n+1} + 2^{n+1} t^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc f_{n+2} est bien polynomiale, de degré $n+2$, et son coefficient dominant vaut 2^{n+1}.
Par le principe de récurrence $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Pour le coefficient constant, nous pouvons noter que la récurrence précédente montre que le coefficient constant de f_{n+2} est l'opposé de celui de f_n.
On en déduirait alors facilement que le coefficient constant de f_n est nul si n est impair, car le coefficient constant de f_1 est nul. Et que le coefficient constant de f_{2p} vaut $(-1)^p$, car le coefficient constant de f_0 vaut 1.
Mais plus simplement, le coefficient constant de f_n est

$$f_n(0) = \cos(n \operatorname{Arccos}(0)) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \end{cases}}$$

3.a. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Une option serait de procéder par récurrence double sur n, et d'utiliser les formules de développement.
Procédons autrement en distinguant plusieurs cas :

- **Si** $\theta \in [0,\pi]$: alors $\operatorname{Arccos}(\cos(\theta)) = \theta$ et donc $T_n(\cos\theta) = \cos(n \operatorname{Arccos}(\cos\theta)) = \cos(n\theta)$.
- **Si** $\theta \in [-\pi, 0]$: alors $\cos\theta = \cos(-\theta)$ et donc $T_n(\cos\theta) = T_n(\cos(-\theta))$. Et puisque $-\theta \in [0,\pi]$, $T_n(\cos(\theta)) = T_n(\cos(-\theta)) = \cos(-n\theta) = \cos(n\theta)$.
- **Cas général** : il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta - 2k\pi \in [-\pi,\pi]$.

  Et alors
  $$T_n(\cos\theta) = T_n(\cos(\theta - 2k\pi)) = \cos(n(\theta - 2k\pi)) = \cos(n\theta).$$

Remarque
Un tel k n'est pas unique si $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

Donc dans tous les cas, $\boxed{\text{pour tout } \theta \in \mathbf{R},\ f_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$ On en déduit[4] que $T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n \times 0) = \boxed{1.}$

3.b. Soit f une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $f(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
Alors pour tout $x \in [-1,1]$, soit $\theta = \operatorname{Arccos}(x)$, de sorte que $x = \cos\theta$.
On a alors $f(x) = f(\cos\theta) = \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta) = T_n(x)$.
Ainsi, les fonctions polynomiales f et T_n coïncident sur $[-1,1]$. Mais nous savons que deux fonctions polynomiales qui coïncident sur un ensemble infini sont égales, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = T_n(x)$, de sorte que $\boxed{f \text{ et } T_n \text{ sont égales.}}$

3.c. Il s'agit d'utiliser la question précédente.
Notons $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(x^2 - 1\right)^k x^{n-2k}$, qui est clairement une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}$.
Soit alors $\theta \in \mathbf{R}$. On a alors

$$T_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(\cos^2\theta - 1\right)^k \cos^{n-2k}(\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}\theta \cos^{n-2k}(\theta).$$

Mais par ailleurs, d'après la formule de Moivre,

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k\theta \cos^{n-k}(\theta)\right).$$

Or les puissances paires de i sont réelles alors que les puissances impaires sont imaginaires pures, et donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) &= \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k\theta \cos^{n-k}(\theta)\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}(-1)^p \sin^{2p}(\theta)\cos^{n-2p}(\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}(-1)^p(1-\cos^2(\theta))^p \cos^{n-2p}(\theta)\\ &= f(\cos\theta).\end{aligned}$$

Donc pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $f(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, donc par la question précédente, $\boxed{T_n = f.}$

3.d. On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T_n'(x) = f'(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\left[2kx\left(x^2-1\right)^{k-1} x^{n-2k} + (n-2k)\left(x^2-1\right)^k x^{n-2k-1}\right].$$

Et donc en particulier,

$$T_n'(1) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\left[2k \times 0^{k-1} + (n-2k)\times 0^k\right] = \binom{n}{0}n + \binom{n}{2}\times 2 = n + 2\frac{n(n-1)}{2} = \boxed{n^2.}$$

> **⚠ Attention !**
> $0^k = 0$, sauf si $k = 0$, auquel cas $0^0 = 1$.
> Dans la somme, il ne reste alors que les termes avec $k = 0$ et $k = 1$.

4. Soit $t \in \mathbf{R}$. Prouvons le résultat par récurrence double sur n.
Il est évidemment vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
Supposons que $T_n(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch}(nt)$ et $T_{n+1}(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch}((n+1)t)$. Alors

$$\begin{aligned}T_{n+2}(\operatorname{ch} t) &= 2\operatorname{ch}(t)\operatorname{ch}((n+1)t) - \operatorname{ch}(nt)\\ &= \left(e^t + e^{-t}\right)\left(\frac{e^{(n+1)t} + e^{-(n+1)t}}{2}\right) - \frac{e^{nt}+e^{-nt}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{(n+2)t} + e^{nt} + e^{-t} + e^{-(n+2)t} - e^{nt} - e^{-nt}\right) = \frac{e^{(n+2)t} + e^{-(n+2)t}}{2}\\ &= \operatorname{ch}((n+2)t).\end{aligned}$$

Et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{T_n(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch}(nt).}$

> **Remarque**
> Il est remarquable que les formules qui donnent $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ sont les mêmes qui donnent $\operatorname{ch}(nt)$ en fonction de $\operatorname{ch} t$.

5. Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on a $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
Or, $\cos(n\theta) = 0$ si et seulement si $n\theta \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2n} \mod \frac{\pi}{n}$.
Donc déjà, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $T_n\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = 0$.
N'en concluons pas trop vite que nous avons là une infinité de racines de T_n, car les $\cos\left(\frac{(2k+1)}{2n}\pi\right)$, pour $k \in \mathbf{Z}$ ne sont pas deux à deux distincts[5].
En revanche, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$, intervalle sur lequel cos est injective, car strictement décroissante.
Et donc en posant $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, on a bien $x_0 > x_1 > \cdots > x_{n-1}$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $T_n(x_k) = 0$.
Donc nous avons déjà n racines de T_n, toutes dans l'intervalle $[-1, 1]$.
Or, nous savons qu'un polynôme de degré n possède au plus n racines réelles. Donc nous avons toutes les racines réelles de T_n : ce sont les x_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

[5] Par périodicité du cosinus.

6. Comme indiqué, prouvons le résultat par récurrence sur n.
Notre hypothèse de récurrence est donc $\mathscr{P}(n)$: «pour tout polynôme f de degré n, possédant n racines réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, de coefficient dominant α, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \alpha \prod_{k=1}^{n}(x - \lambda_i)$».
Si f est de degré 0 (c'est-à-dire une constante non nulle α), alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \alpha$.

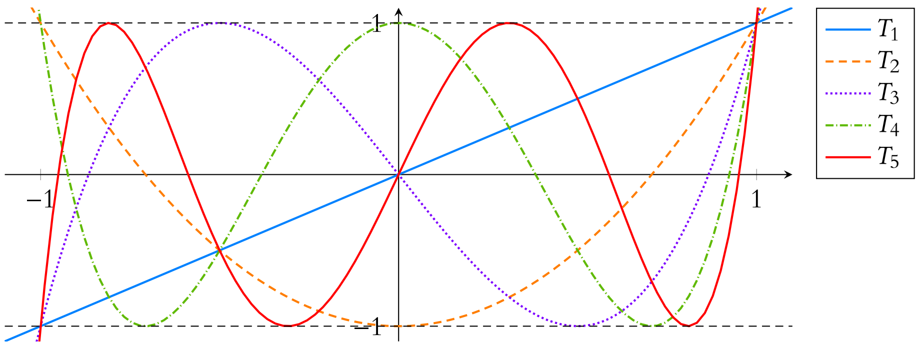


FIGURE 0.1 – Les premiers polynômes de Tchebychev et leurs racines.

Si f est de degré 1, de coefficient dominant α et possède λ_1 comme racine, c'est nécessairement $f(x) = \alpha(x - \lambda_1)$.
Supposons la propriété vraie au rang $n-1$, et soit f une fonction polynomiale, de degré n, de coefficient dominant α et possédant n racines réelles distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Alors nous savons que par division euclidienne, il existe une fonction polynomiale g, de degré $n-1$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = (x - \lambda_1)g(x)$.
Puisque le coefficient dominant d'un produit est le produit des coefficients dominants, nécessairement g possède α pour coefficient dominant.
Et pour $x \neq \lambda_1$, on a $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x - \lambda_1} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.
Donc g est un polynôme de degré $n-1$, de coefficient dominant α et qui possède $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ pour racines.

Nombre de racines
Notons que g possédant au maximum $n-1$ racines (car de degré $n-1$), nous avons là toutes les racines de g. Et en particulier, λ_1 n'est pas racine de g.

Par hypothèse de récurrence, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \alpha \displaystyle\prod_{i=2}^{n}(x - \lambda_i)$.

Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \alpha \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x - \lambda_k)$.

Donc la propriété est héréditaire et donc par le principe de récurrence, est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Remarque *: nous aurions pu donner une autre preuve de ce résultat en utilisant la décomposition en produit de facteurs irréductibles*[6].
En effet, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des racines de g, nous savons qu'il existe des entiers $m_1, \dots, m_n$ tous supérieurs à 1 tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \alpha \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)^{m_i} \times g(x)$ où g est le produit de facteurs irréductibles de degré 2.
Mais alors $n = \deg(f) = \underbrace{m_1 + \cdots + m_n}_{\geqslant n} + \deg g$.
Si $\deg g \neq 0$, alors on ne peut pas avoir égalité.
Et de même, si l'un des m_i est supérieur strictement à 1, $m_1 + \cdots + m_n > n$, ce qui est absurde.
Donc g est constant égal à 1, et tous les m_i valent 1, ce qui nous donne bien la factorisation annoncée.

[6] Mais comme nous avons pour l'instant **admis** l'existence et l'unicité d'une telle décomposition, c'est moins éclairant.

En particulier, en appliquant ceci à T_n, dont nous savons déjà qu'il possède n racines distinctes, et un coefficient dominant égal à 2^{n-1}, on obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi \right) \right).$$

Partie II. Calcul de $\zeta(2)$.

7. On a $\dfrac{1}{1^2} = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$.

Donc en sommant ces inégalités pour $k \in [\![1, n]\!]$, il vient $\boxed{u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}.}$

8. C'est un grand classique : $\dfrac{1}{X(X-1)} = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{X}$.
Et donc pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$.
Mais cette dernière somme est une somme télescopique, égale à $1 - \dfrac{1}{n}$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \leqslant 1 + 1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$.
Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 2. Par ailleurs elle est croissante car pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0.$$

Et donc par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n)_n \text{ est convergente.}}$

9.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \boxed{\frac{1}{4}u_n + v_n.}$$

9.b. On en déduit que $v_n = u_{2n} - \dfrac{1}{4}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \dfrac{1}{4}\ell = \boxed{\dfrac{3}{4}\ell.}$

10.a. Nous avons reconnu que les x_k sont les racines de T_n, et donc par la question 6, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k).$$

En particulier, pour $x \notin \{x_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$, il vient

$$\ln |T_n(x)| = (n-1)\ln(2) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln|x - x_k|.$$

En dérivant cette relation[7], on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$,

$$\boxed{\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - x_k}.}$$

[7] Les deux membres sont dérivables sur $\mathbf{R} \setminus \{x_k\}$.

Alternative : on peut aussi utiliser la formule pour la dérivée d'un produit de n termes : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T_n'(x) = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} (x - x_j).$$

Et donc pour $x \notin \{x_k, 0 \leqslant k \neq n-1\}$, $\displaystyle\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n-1} (x - x_i)}{\prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - x_k}.$

10.b. En particulier, puisque $1 \notin \{x_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$, on a

$$\frac{T_n'(1)}{T_n(1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - x_k}.$$

Mais nous savons que $T_n(1) = 1$ et $T_n'(1) = n^2$, et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - x_k} = n^2$.

Or, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$1 - x_k = 1 - \left(\cos \frac{2k+1}{2n}\pi\right) = 2\sin^2\left(\frac{2k+1}{4n}\pi\right).$$

Trigo

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

et donc

$$1 - \cos(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

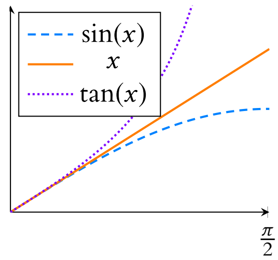
On en déduit donc que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)}{4n}\pi\right)} = 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1-x_k} = \boxed{2n^2.}$

Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, on a $\displaystyle\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2}{\sin^2} = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$.
En particulier, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $0 < \frac{2k+1}{4n}\pi < \frac{\pi}{2}$, et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k+1)}{4n}\pi\right)} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)}{4n}\pi\right)} - 1\right) = 2n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \boxed{2n^2 - n.}$$

11. Soit φ_1 et φ_2 les fonctions définies sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $\varphi_1 : x \mapsto x - \sin(x)$ et $\varphi_2 : x \mapsto \tan x - x$.
Alors φ_1 et φ_2 sont dérivables, et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\varphi_1'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0 \text{ et } \varphi_2'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geqslant 0.$$



Donc φ_1 et φ_2 sont croissantes sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, avec $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$.
Donc les deux fonctions sont positives sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, de sorte que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\varphi_1(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x) \leqslant x \text{ et } \varphi_2(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \tan(x).$$

12. Notons que pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{(2k+1)}{4n}\pi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc en appliquant la question précédente,

$$0 \leqslant \sin\left(\frac{(2k+1)}{4n}\pi\right) \leqslant \frac{(2k+1)}{4n}\pi \leqslant \tan\left(\frac{(2k+1)}{4n}\pi\right) \Rightarrow \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k+1)}{4n}\pi\right)} \leqslant \frac{1}{\pi^2}\frac{16n^2}{(2k+1)^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)}{4n}\pi\right)}.$$

En sommant ces inégalités pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, il vient

$$2n^2 - n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k+1)}{4n}\pi\right)} \leqslant \frac{16n^2}{\pi^2}v_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)}{4n}\pi\right)} = 2n^2.$$

Soit encore $\displaystyle\frac{2n^2-n}{16n^2}\pi^2 \leqslant v_n \leqslant \frac{\pi^2}{8}$.
Mais $\displaystyle\frac{2n^2-n}{16n^2}\pi^2 = \frac{2\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{16}\pi^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{8}$, et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi^2}{8}$.

Et donc par la question 9, $\ell = \displaystyle\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}.}$

Pour la culture

Nous venons de prouver ce que nous noterons plus tard

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

résultat surprenant et très célèbre qui remonte à EULER et dont il existe des dizaines de preuves (dont l'une est dans le DM6).

Partie III. Formule de Cotes

13. Prouvons donc la formule par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$.
Pour $n = 0$, on a

$$2x^0\left[T_0\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) + 1\right] = 2(1+1) = 4 = x^{2\times 0} + 2x^0 + 1.$$

Rappel

Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $x^0 = 1$.

Pour $n = 1$, on a

$$2x\left[T_1\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) + 1\right] = 2x\left[\frac{x^2+1}{2x} + 1\right] = 2x\frac{x^2+2x+1}{2x} = x^2 + 2x + 1.$$

Supposons donc que $x^{2n}+2x^n+1 = 2x^n\left[T_n\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)+1\right]$ et $x^{2n+2}+2x^{n+1}+1 = 2x^{n+1}\left[T_{n+1}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)+1\right]$.
On a alors $T_n\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right) = \dfrac{x^{2n}+2x^n+1}{2x^n} - 1$ et $T_{n+1}\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right) = \dfrac{x^{2n+2}+2x^{n+1}+1}{2x^{n+1}} - 1$.
Et donc,

$$\begin{aligned}2x^{n+2}\left[T_{n+2}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)+1\right] &= 2x^{n+2}\left[2\frac{x^2+1}{2x}T_{n+1}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) - T_n\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)+1\right]\\ &= 2x^{n+2}\left[\frac{x^2+1}{x}\left(\frac{x^{2n+2}+2x^{n+1}+1}{2x^{n+1}}-1\right)-\left(\frac{x^{2n}+2x^n+1}{2x^n}-1\right)+1\right]\\ &= 2x^{n+2}\left[\frac{x^{2n+4}+2x^{n+3}+x^2+x^{2n+2}+2x^{n+1}+1-2x^{n+3}-2x^{n+1}-x^{2n+2}-2x^{n+2}-x^2+4x^{n+2}}{2x^{n+2}}\right]\\ &= x^{2n+4}+2x^{n+2}+1.\end{aligned}$$

Rappel
Pour tout $t\in\mathbf{R}$,
$T_{n+2}(t) = 2tT_{n+1}(t) - T_n(t)$.

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $x^{2n}+2x^n+1 = 2x^n\left[T_n\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)+1\right]$.

14.a. L'hypothèse faite sur f est qu'il s'agit d'une fonction positive «au voisinage de λ».
Notons $\lambda_1=\lambda,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ les racines réelles distinctes de f et α son coefficient dominant.
Nous savons[8] qu'il existe des polynômes irréductibles de degré 2 $g_1,\dots,g_r$, et des entiers $m_1,\dots,m_p$ supérieurs ou égaux à 1 tels que pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$f(x) = \alpha\prod_{i=1}^{p}(x-\lambda_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{r}g_j(x).$$

Les g_j sont de signe constant, car de discriminant négatif.
Puisque f ne possède qu'un nombre fini de racines, considérons $\delta>0$, suffisamment petit pour que λ soit la seule racine de f sur $]\lambda-\delta,\lambda+\delta[$.
Donc $h : x\mapsto \alpha\displaystyle\prod_{i=2}^{p}(x-\lambda_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{r}g_i(x)$ ne s'annule pas sur $]\lambda-\delta,\lambda+\delta[$, et donc[9] y est de signe constant.
Notons alors $\eta' = \min(\delta,\eta)$, de sorte que sur $]\lambda-\eta',\lambda+\eta'[$, les deux fonctions f et h sont de signe constant.
On a alors $f(x) = (x-\lambda)^{m_1}h(x)$. Mais f est positive sur $]\lambda-\eta',\lambda+\eta'[$, et $(x-\lambda)^{m_1}\geqslant 0$ pour $x\in]\lambda,\lambda+\eta'[$, donc h est positive sur $]\lambda-\eta',\lambda+\eta'[$.

[8] C'est la factorisation de f en produit d'irréductibles : f est produit de termes de degré 1, ou de polynômes irréductibles de degré 2.

En pratique
Si f possède λ pour unique racine, on peut prendre par exemple $\delta=1$.
Et sinon, on peut prendre
$\delta = \min\{|\lambda-\lambda_i|, 2\leqslant i\leqslant p\}$.

[9] C'est une fonction continue, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, si elle changeait de signe, elle devrait s'annuler quelque part.

Supposons par l'absurde que $m_1 = 1$. Alors $x\mapsto(x-\lambda)^{m_1} = x-\lambda$ est strictement négative sur $]\lambda-\eta',\lambda[$, et donc f aussi (car h est à valeurs positives sur cet intervalle), ce qui contredit l'hypothèse faite sur f.
On en déduit donc que $m_1\geqslant 2$.
Et donc $f(x) = (x-\lambda)^2\times\underbrace{\alpha(x-\lambda_1)^{m_1-2}\prod_{i=2}^{p}(x-\lambda_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{r}g_j(x)}_{=g(x)}$, et donc f est bien de la forme indiquée.

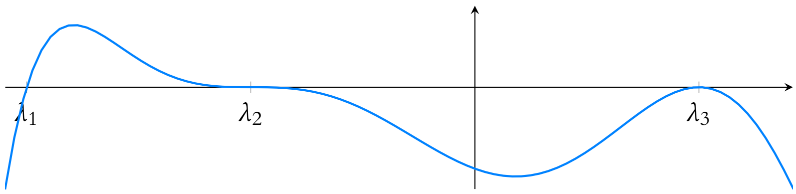
Mieux
On prouve de la même manière que m_1 est en fait un entier pair.

Commentaire *: nous savons que si λ est une racine d'une fonction polynomiale f, alors dans la décomposition de f en produit de facteurs irréductibles se trouve un facteur de la forme $(x-\lambda)^m$, $m\geqslant 1$.*
Ce que nous venons de prouver est que si f ne change pas de signe au voisinage de λ (c'est-à-dire que $\mathscr{C}_f$ vient toucher l'axe des abscisses en λ, mais sans le traverser), alors m (qu'on appelera bientôt la multiplicité de λ) est pair. On peut même prouver qu'il s'agit d'une équivalence.
Par exemple pour le polynôme représenté ci-dessous, les multiplicité des λ_1 et λ_2 sont impaires, et celle de λ_3 est paire.

14.b. Pour $k\in[\![0,p-1]\!]$, $T_{2p}\left(\cos\left(\dfrac{2k+1}{2p}\pi\right)\right)+1 = \cos((2k+1)\pi)+1 = 0$.

Donc $\boxed{\cos\left(\dfrac{2k+1}{2p}\pi\right) \text{ est racine de } T_{2p}+1.}$

14.c. Pour $x\in]-1,1[$, on a $T_{2p}(x) = f_{2p}(x) = \cos(2p\operatorname{Arccos}(x))\in[-1,1]$.
Et donc $\boxed{T_{2p}(x)+1\geqslant 0.}$



14.d. Prouvons par récurrence sur $n \in [\![0, p]\!]$ qu'il existe g_n polynôme de degré $2p - 2n$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T_{2p}(x) + 1 = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}\left(x - \cos\left(\frac{2k+1}{2p}\pi\right)\right)^2 g_n(x)$.
Pour $n = 0$, il s'agit de prendre $g_0(x) = T_{2p}(x) + 1$.
Supposons donc que $n \leqslant p - 1$, et qu'il existe g_n de degré $2p - 2n$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T_{2p}(x) + 1 = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}\left(x - \cos\left(\frac{2k+1}{2p}\pi\right)\right)^2 g_n(x)$.
Alors $\lambda = \cos\left(\dfrac{2n+1}{2p}\pi\right)$ est une racine de g_n (car racine de $T_{2p} + 1$ et pas du produit des facteurs de degré 2).
De plus, $T_{2p+1} + 1$ étant positif sur $[-1, 1]$, si $\eta > 0$ est suffisamment petit pour que $]\lambda - \eta, \lambda + \eta[\subset [-1, 1]$, alors g_n est également positif[10] sur $]\lambda - \eta, \lambda + \eta[$.
Et donc le résultat de 14.a s'applique : il existe g_{n+1}, polynomiale de degré $2p - 2n - 2$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g_n(x) = (x - \lambda)^2 g_{n+1}(x)$.
Donc par le principe de récurrence[11], pour tout $n \in [\![0, p]\!]$, il existe g_n polynomiale de degré $2p - 2n$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T_{2p}(x) + 1 = \prod_{i=0}^{n-1}\left(x - \cos\left(\frac{2k+1}{2p}\pi\right)\right)^2 g_n(x).$$

Et en particulier, g_p est une fonction polynomiale de degré 0, donc une constante. Par identification des coefficients constants, g_p est le coefficient constant de $T_{2p} + 1$, à savoir 2^{2p-1}.
Et donc nous avons bien prouvé que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{T_{2p}(x) + 1 = 2^{2p-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - \cos\left(\frac{2k+1}{2p}\pi\right)\right)^2.}$$

[10] Car quotient de deux fonctions positives.

[11] Notons qu'il s'agit d'une récurrence **finie.**

15. En particulier, pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \neq 0$, on a

$$x^{2n} + 2x^n + 1 = 2x^n 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x^2+1}{2x} - \cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)\right)^2 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 + 1 - 2x\cos\left(\frac{(2k+1)}{n}\pi\right)\right)^2.$$

Pour $x = 0$, cette égalité reste évidemment vraie.

16. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^{4n} + 2x^{2n} + 1 = \left(x^{2n} + 1\right)^2$.
Et donc

$$\left(x^{2n} + 1\right)^2 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{(2k+1)}{2n}\pi\right) + 1\right)^2.$$

Mais pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, le discriminant du polynôme $X^2 - 2X\cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right) + 1$ est $4\cos^2\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right) - 4 < 0$.
Et donc le polynôme en question est de signe constant, positif car de coefficient dominant égal à 1.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$x^{2n} + 1 = \sqrt{(x^{2n}+1)^2} = \sqrt{\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + 1\right)^2} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + 1\right).$$

Puisque nous venons de prouver que ces polynômes de degré 2 sont bien irréductibles, il s'agit bien là de $\boxed{\text{la décomposition de } X^{2n}+1 \text{ en produit de facteurs irréductibles.}}$

17. **Question subsidiaire** : les calculs de la question 13 restent valables si $n = 2p+1$ est impair.
Il n'est pas difficile de vérifier alors que les $\cos\left(\frac{2k+1}{2p+1}\pi\right)$, pour $0 \leqslant k \leqslant p$ sont racines de $T_{2p}+1$, et que $T_{2p+1}+1$ est toujours de signe constant sur $[-1,1]$.
En revanche, cette fois l'une des racines[12] est égale à -1, et nous ne pouvons plus affirmer que $T_{2p+1}+1$ est de signe constant au voisinage de -1.
En revanche, le même raisonnement qu'à la question 14 va prouver qu'il existe un polynôme g, de degré 1 tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T_{2p+1}(x)+1 = 2^{2p}\prod_{k=0}^{p-1}\left(x-\cos\left(\frac{2k+1}{2p+1}\pi\right)\right)^2 \times g(x).$$

Et puisque -1 est racine de $T_{2p+1}+1$, nécessairement, $g(x) = x+1$.

Donc comme à la question 15, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$x^{4p+2}+2x^{2p+1}+1 = 2x^{2p+1}2^{2p}\prod_{k=0}^{p-1}\left(\frac{x^2+1}{2x}-\cos\left(\frac{2k+1}{2p+1}\pi\right)\right)^2\times\left(\frac{x^2+1}{2x}+1\right) = \prod_{k=0}^{p-1}\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k+1}{2p+1}\pi\right)+1\right)^2(x^2+2x+1).$$

Et cette fois, on reconnaît que $x^2+2x+1 = (x+1)^2$.
Donc pour $x \geqslant 1$,

$$x^{2p+1}+1 = \prod_{k=0}^{p-1}\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k+1}{2p+1}\pi\right)+1\right)\times(x+1).$$

Et donc nous avons là deux fonctions polynomiales qui coïncident sur l'ensemble infini $[1,+\infty[$: elles sont égales.

Et donc la décomposition de $X^{2p+1}+1$ en produit de facteurs irréductibles est

$$X^{2p+1}+1 = (X+1)\prod_{k=0}^{p-1}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{2k+1}{2p+1}\pi\right)+1\right).$$

[12] Celle où $k = p$.

Détails

La condition $x \geqslant 1$ garantit à a la fois que

$$\sqrt{(x^{2p+1}+1)^2} = x^{2p+1}+1$$

et

$$\sqrt{(x+1)^2} = x+1.$$