Devoir surveillé 8

▶ Problème 1 : nombres de Bernoulli

1. Justifier qu'il existe une unique suite $(B_p)_{p\geqslant 0}$ de réels tels que $B_0 = 1$ et $\forall m \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0$. $\quad$ (♣)

   Le nombre B_p est appelé $p^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli.
2. Vérifier que les premiers nombres de Bernoulli sont $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$ et $B_3 = 0$. Calculer B_4.
3. Justifier que pour tout $p \in \mathbf{N}$, B_p est rationnel.

Les parties I et II sont totalement indépendantes.

Partie I. Développement limité de la tangente hyperbolique

Dans cette partie, on note $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ et $\coth : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)} \end{array}\right.$.

4. a. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$ et justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, elle possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, qu'on ne cherchera pas à calculer.

   Dans la suite, on note $f(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} x^k + o(x^n)$ ce développement limité.

   b. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3, et en déduire les valeurs de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

   c. En notant que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x = f(x)(e^x - 1)$, montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha_k = 0$.

   En déduire, à l'aide de la relation (♣) que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n = B_n$.
5. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x) + \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}\coth\left(\dfrac{x}{2}\right)$. $\quad (\star)$

   En déduire, par un argument de parité, que pour tout $n \geqslant 1$, $B_{2n+1} = 0$.
6. À l'aide de $(\star)$, déterminer le développement limité de $\coth(x) - \frac{1}{x}$ au voisinage de 0, à l'ordre n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
7. a. Rappeler l'expression de th' en fonction de th^2.

   b. En déduire le développement limité à l'ordre 7 de th.

   c. Prouver que pour $x \neq 0$, $\operatorname{th}(x) = 2\coth(2x) - \coth(x)$, et en déduire que le développement limité de th au voisinage de 0, à l'ordre $2n$ est

$$\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k\left(4^k - 1\right)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} + o\left(x^{2n}\right).$$

Partie II. Formules de Faulhaber

Nous savons que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Le but de cette partie est de prouver que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, il existe un polynôme $Q \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p = Q(n)$, et de déterminer un tel polynôme pour $p = 3$ et $p = 4$.

Dans toute cette partie, p désigne un élément **fixé** de $\mathbf{N}^*$.
Pour $P \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$, on note $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) \in \mathbf{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on notera $\mathscr{B}_n = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

8. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_{p+1}[X]$.
9. Pour $k \in [\![0, p+1]\!]$, déterminer $\Delta(X^k)$.
10. Déterminer la matrice M de Δ dans la base canonique de $\mathbf{R}_{p+1}[X]$.
    On pourra se contenter d'une forme avec des pointillés, sous réserve que suffisamment de termes figurent dans la matrice pour qu'on puisse «deviner» les termes non écrits.
11. En déduire la dimension de $\operatorname{Im}(\Delta)$.
12. Soit $P \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$ non nul, de degré $d \in [\![0, p+1]\!]$ et de coefficient dominant λ.
    Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de d et λ.
13. À l'aide des questions précédentes, prouver que $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbf{R}_0[X]$ et $\operatorname{Im} \Delta = \mathbf{R}_p[X]$.
14. Soit $Q \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$. Montrer que $\left(\forall n \in \mathbf{N}, Q(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^p\right) \Leftrightarrow (\Delta(Q) = X^p \text{ **et** } Q(0) = 0)$.
    Indication : dans le sens $\Rightarrow$, on pourra calculer les $[\Delta(Q)](k)$, pour $k \in \mathbf{N}$.
15. On note $\mathscr{H} = \{P \in \mathbf{R}_{p+1}[X] \mid P(0) = 0\}$.
    Montrer que $\mathscr{H}$ est un hyperplan de $\mathbf{R}_{p+1}[X]$, et que $\mathscr{B}_{\mathscr{H}} = (X, X^2, \dots, X^{p+1})$ en est une base.
16. Dans toute la suite, on note $\delta \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbf{R}_p[X])$ la restriction de Δ à $\mathscr{H}$.
    Écrire la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p+1}$ de δ dans les bases $\mathscr{B}_{\mathscr{H}}$ et $\mathscr{B}_p$, et prouver que δ est un isomorphisme de $\mathscr{H}$ sur $\mathbf{R}_p[X]$.
17. Prouver qu'il existe un unique polynôme $Q_p \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $Q_p(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^p$.
18. Pour $p = 4$, écrire explicitement la matrice A de la question 16 , et vérifier que la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 5}$ définie par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ \dfrac{1}{j}\dbinom{j}{i} B_{j-i} & \text{si } j \geqslant i \end{cases}$ est égale à A^{-1}.
19. Après avoir justifié que le polynôme Q_p de la question 17 est égal à $\delta^{-1}(X^p)$, déterminer Q_3 et Q_4.

▶ Problème 2 : étude d'un ensemble de matrices

On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$, et I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$.

Dans tout le problème, on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note également $\mathscr{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbf{C}^3 \right\}$.

1. Calculer A^2 et A^3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. a. Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ et en donner la dimension.
   b. Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$.
   c. En considérant $A^3 + I_3$, montrer que $\mathscr{H}$ n'est pas un anneau intègre.
3. a. Déterminer les complexes λ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible. On montrera qu'il existe exactement trois tels complexes, que l'on notera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
   b. Pour chaque valeur de $k \in [\![1, 3]\!]$, déterminer $\operatorname{Ker}(A - \lambda_k I_3)$.
   c. En déduire que A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}$ où l'on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

   Dans toute la suite, on note $P \in GL_3(\mathbf{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$. *La valeur d'une telle matrice n'est pas importante dans la suite de l'exercice.*

4. a. Soit $M \in \mathcal{H}$. Déterminer $M' = P^{-1}MP$.

b. Prouver que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'algèbres, c'est-à-dire une application linéaire bijective qui est aussi un isomorphisme d'anneaux.

c. Montrer que $\varphi(\mathcal{H})$ est égal à $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

d. En déduire que $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C}),\ M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \varphi(M) \in \mathcal{D}$.

5. Pour $M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. On note alors

$$\alpha(M) = a - b + c,\ \beta(M) = a - jb + j^2c,\ \gamma(M) = a - j^2b + jc.$$

a. Justifier que α est un morphisme d'algèbres (application linéaire et morphisme d'anneaux) de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$. *On admet qu'il en est de même de β et γ.*

b. Montrer que $M \in \mathcal{H}$ est inversible si et seulement si $\alpha(M)\beta(M)\gamma(M) \neq 0$. Prouver que si c'est le cas, alors $M^{-1} \in \mathcal{H}$.

c. Soit $M \in \mathcal{H}$ inversible. Montrer que l'équation $X^2 = M$, d'inconnue $X \in \mathcal{H}$ possède exactement huit solutions.

6. a. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$. Montrer que $M \in \mathcal{H}$ si et seulement si $AM = MA$. *On pourra à cet effet étudier la matrice $M' = \varphi(M)$.*

b. Combien y a-t-il de matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ vérifiant $X^2 = A$?

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 8

PROBLÈME 1

1. La clé ici est que pour $p \geqslant 1$, on peut isoler exprimer B_p en fonction de $B_0, \dots, B_{p-1}$ en transformant la relation $\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k = 0$ en $B_p = -\frac{1}{\binom{p+1}{p}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} B_k = -\frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} B_k$.
Cette relation permet alors d'exprimer B_p en fonction de $B_0, B_1, \dots, B_{p-1}$.

Et donc $(B_p)_{p\geqslant 0}$ est l'unique suite de réels vérifiant

$$B_0 = 1 \text{ et } \forall p \geqslant 1,\ B_p = -\frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} B_k.$$

Remarque

On peut discuter de savoir ou non si cette preuve est convaincante. Je trouve que oui.
Mais si on voulait prouver l'unicité, on pourrait raisonner par récurrence forte en supposant qu'on dispose de deux suites qui satisfont la même relation de récurrence et possèdent le même premier terme.
Pour l'existence, on ne sait pas trop comment le dire si ce n'est qu'on définit la suite par son premier terme et la relation de récurrence définissant un terme en fonction des précédents...
Et quelque part, quand on accepte de définir ainsi une suite c'est qu'on accepte que ceci la définit de manière unique !

2. On a donc $B_2 = -\frac{1}{2} B_0 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = -\frac{1}{3}\left(\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{2} B_1\right) = \frac{1}{6}$,
$B_3 = -\frac{1}{4}\left(\binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2\right) = 0$.
Enfin, $B_4 = -\frac{1}{5}\left(\binom{5}{0} B_0 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{3} B_3\right) = -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{5}{2} + 10\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{30}$.

3. La preuve se fait par récurrence forte sur $p \in \mathbf{N}$.
Il est évident que B_0 est rationnel.
Supposons que $B_0, B_1, \dots, B_p$ soient rationnels. Alors

$$B_{p+1} = \frac{1}{p+2} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+2}{k} B_p \in \mathbf{Q}.$$

Et donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbf{N},\ B_p \text{ est rationnel.}}$

Partie I. Développements limités de la tangente de la tangente hyperbolique

4.a. Il est évident que f est continue sur $\mathbf{R}^*$ car quotient de deux fonctions qui le sont.
De plus, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ puisque $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc f est continue en 0, et par conséquent $\boxed{\text{est continue sur } \mathbf{R} \text{ tout entier.}}$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$, et donc

$$\frac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)!} + o(x^n).$$

Et donc

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)!} + o(x^n)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)!}\right) - \dots + (-1)^{n-1}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)!}\right)^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Il ne s'agit pas encore exactement d'un développement limité d'ordre n, mais en développant les puissances de $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)!}$ et en tronquant à l'ordre n les résultats obtenus, on obtient bien un développement limité d'ordre n de f.

Remarque

Nous avons même déjà quasiment fait le calcul du développement limité. En tous cas, si on se fixe n (par exemple $n = 3$, $n = 5$ ou $n = 171$), nous savons par quels moyens obtenir les coefficients du développement limité.
Mais nous n'avons pour l'instant pas mis en évidence une formule générale donnant le coefficient de degré n de ce développement limité.

4.b. Reprenons les calculs ci-dessus avec $n = 3$. Alors

$$\frac{x}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^3 + o(x^3)$$

$$\underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

$$\boxed{\underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3).}$$

On en déduit que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 2!\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ et $\alpha_3 = 0$.

4.c. Soit $n \in \mathbf{N}$. Par produit de développements limités, on a

$$f(x)(e^x - 1) \underset{x\to0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} x^k\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} x^i\right) + o(x^n)$$

$$\underset{x\to0}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i-1} \frac{\alpha_k}{k!} \frac{1}{(k-i)!}\right) x^i + o(x^n)$$

Détails

C'est tout simplement la formule qui donne le coefficient de degré i d'un produit de polynômes. On notera que la somme s'arrête à $i-1$ et pas à i car $e^x - 1$ n'a pas de terme de degré 0.

Mais puisque $f(x)(e^x - 1) = x$, par unicité du développement limité, tous les coefficients de degré supérieur ou égal à 2 sont nuls.

En particulier celui de degré n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{(n-k)!k!} = 0$, ce qui après multiplication par $n!$ nous donne $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha_k = 0.}$

On reconnaît là la relation de récurrence définissant les nombres de Bernoulli, et puisque de plus $\alpha_0 = 1$, on a nécessairement, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N},\ \alpha_k = B_k.}$

Remarque

C'est généralement cette définition qui est donnée des nombres de Bernoulli : les B_k tels que $\frac{B_k}{k!}$ soit le coefficient de degré n du $DL_n(0)$ de $\frac{x}{e^x-1}$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Alors

$$f(x) + \frac{x}{2} = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{2x + x(e^x - 1)}{2(e^x - 1)}$$

$$= \frac{xe^x + x}{2(e^x - 1)} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\frac{e^{x/2}}{e^{x/2}}\frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}}$$

$$= \frac{x}{2}\frac{2\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)} = \boxed{\frac{x}{2}\coth\left(\frac{x}{2}\right).}$$

Puisque coth est impaire[1] et que $x \mapsto x$ est également impaire, $x \mapsto f(x) + \frac{x}{2}$ est paire.
Et par conséquent, les coefficients de degré impair de son développement limité à l'ordre n sont nuls.
Mais les coefficients de son développement limité sont alors ceux de f, à l'exception de celui de degré 1, auquel on a ajouté $\frac{1}{2}$.
Et donc pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Leftrightarrow B_{2n+1} = 0$.

[1] Car quotient d'une fonction paire par une fonction impaire.

6. On a donc, pour $x \neq 0$, $f(2x) + x = x\coth(x)$, et donc pour $n \geqslant 2$,

$$\coth(x) - \frac{1}{x} = \frac{f(2x)}{x} + 1 \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{B_k}{k!}(2x)^k + 1 + o(x^n) - \frac{1}{x}$$

$$\underset{x\to0}{=} \boxed{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2^k B_k}{k!} x^{k-1} + o(x^n).}$$

Détails

Le $+1$ compense $2B_1$, et de même les termes en $1/x$ se compensent. C'est une bonne nouvelle si on veut vraiment obtenir un développement limité (qui possède toujours une limite finie en 0).

7.a. On a $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$.

7.b. Il s'agit de s'inspirer de ce qui a été fait en TD pour le développement limité de la tangente : noter $\mathrm{th} \underset{x\to0}{=} x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6)$. En déduire le développement limité de th^2, puis celui de $1 - \mathrm{th}^2$, et enfin intégrer pour obtenir le développement limité d'ordre 7 de th.
Par identification des coefficients, on obtient alors

$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^7).$$

7.c. Soit $x \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
2\coth(2x)-\coth(x) &= 2\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}-\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\\
&= \frac{2e^{3x}-2e^{x}+2e^{-x}-2e^{-3x}-e^{3x}-e^{x}+e^{-x}+e^{-3x}}{\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)} = \frac{e^{3x}-3e^{x}+3e^{-x}-e^{-3x}}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2\left(e^{x}+e^{-x}\right)}\\
&= \frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^3}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2\left(e^{x}+e^{-x}\right)} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \boxed{\operatorname{th}(x).}
\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(x) = 2\coth(2x)-\coth(x) &= 2\left(\coth(2x)-\frac{1}{2x}\right)-\left(\coth(x)-\frac{1}{x}\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 2\sum_{k=2}^{2n}\frac{B_k 2^k}{k!}(2x)^{k-1}-\sum_{k=2}^{2n}\frac{B_k 2^k}{k!}x^{k-1}+o(x^{2n})\\
&\underset{x\to 0}{=} 2\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}2^{2k}}{(2k)!}x^{2k-1}+o(x^{2n})\\
&\boxed{\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)}{(2k)!}x^{2k-1}+o(x^{2n}).}
\end{aligned}$$

Détails
Les B_{2k+1} sont nuls, donc on ne garde que les termes de degré impair.

Partie II. Formules de Faulhaber

8. Pour $P, Q \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\Delta(\lambda P+Q) = \lambda P(X+1)+Q(X)-\lambda P(X)-Q(X) = \lambda(P(X+1)-P(X))+(Q(X+1)-Q(X)) = \lambda\Delta(P)+\Delta(Q).$$

Donc Δ est linéaire.
N'oublions pas de vérifier qu'elle est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_{p+1}[X]$. Mais puisque $X+1$ est de degré 1, le degré de la composition $P(X+1)$ est égal à $\deg P$, et donc $P(X+1) \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$.
On en déduit donc que $\Delta(P) \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$, et donc $\boxed{\Delta \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbf{R}_{p+1}[X].}$

Rappel
Le degré de $P \circ Q$ est égal au produit des degrés de P et Q.

9. On a $\Delta(1) = 1-1 = 0$, et pour $k \geqslant 1$, on a

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i.$$

10. D'après les calculs précédents, on a

$$M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{p+1}}(\Delta) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \Delta(1) & \Delta(X) & \Delta(X^2) & \Delta(X^3) & & \Delta(X^{p+1}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 2 & \binom{3}{1} & \dots & \binom{p+1}{1}\\ \vdots & 0 & 0 & 3 & & \binom{p+1}{2}\\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & p+1\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1\\ X\\ X^2\\ \vdots\\ X^p\\ X^{p+1} \end{array} \in \mathscr{M}_{p+2}(\mathbf{R})$$

Notons qu'il est possible d'obtenir une formule explicite pour le coefficient (i,j) de M, mais attention, il ne s'agit pas de $\binom{j}{i}$ car les éléments de la base canonique sont numérotés à partir de 0, et non de 1.

Donc on a plutôt $m_{i,j} = \begin{cases} \dbinom{j-1}{i-1} & \text{si } j > i\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

11. La matrice M est échelonnée, avec $p+1$ pivots, donc $\operatorname{rg}(M) = p+1$, et donc $\boxed{\dim \operatorname{Im}\Delta = p+1.}$

12. Il est clair sur la base des formules obtenues précédemment que $\deg \Delta(X^k) = \begin{cases} -\infty & \text{si } k = 0\\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}$

Si P est constant, on a donc $\Delta(P) = 0$. Et si P est de degré $d \geqslant 1$, de coefficient dominant

λ, alors il existe $Q \in \mathbf{R}_{d-1}[X]$ tel que $P = \lambda X^d + Q$, et donc $\Delta(P) = \lambda\Delta(X^d) + \Delta(Q)$, avec $\deg(\Delta(Q)) \leqslant d-2$, puisque Δ baisse le degré d'au moins une unité.
Donc $\Delta(P)$ est de même degré et de même coefficient dominant que $\lambda\Delta(X^d)$. Et puisque $\Delta(X^d)$ est de degré $d-1$ et de coefficient dominant d, $\Delta(P)$ est de degré $d-1$ et de coefficient dominant λd.

13. Nous avons donc prouvé que si P est constant, $\Delta(P) = 0$ et si $\deg P \geqslant 1$, alors $\deg \Delta(P) \geqslant 0$ et en particulier, $\Delta(P) \neq 0$.
Et donc $\operatorname{Ker} P = \mathbf{R}_0[X]$, et par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im}\Delta = \dim \mathbf{R}_{p+1}[X] - \dim \operatorname{Ker}\Delta = p+2-1 = p+1$.
Comme de plus, $\operatorname{Im}\Delta \subset \mathbf{R}_p[X]$, et que $\dim \mathbf{R}_p[X] = p+1 = \dim \operatorname{Im}\Delta$, on a bien comme annoncé $\boxed{\operatorname{Im}\Delta = \mathbf{R}_p[X].}$

14. Supposons que $\forall n \in \mathbf{N}$, $Q(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^p$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$[\Delta(Q)](n) = Q(n+1) - Q(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p - \sum_{k=0}^{n-1} k^p = n^p.$$

Donc $\Delta(Q)$ et le polynôme X^p coïncident en un nombre fini de valeurs et donc sont égaux.
Et pour $n = 0$, on a $Q(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{-1} k^p = 0$.

Inversement, supposons que $\Delta(Q) = X^p$ et que $Q(0) = 0$.
Alors pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} Q(n) &= (Q(n) - Q(n-1)) + (Q(n-1) - Q(n-2)) + \cdots + (Q(2) - Q(1)) + (Q(1) - Q(0)) + Q(0) \\ &= [\Delta(Q)](n-1) + [\Delta(Q)](n-2) + \cdots + [\Delta(Q)](1) + Q(0) = (n-1)^p + (n-2)^p + \cdots + 2^p + 1^p \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k^p. \end{aligned}$$ Somme télescopique.

Et donc on a bien l'équivalence associée.

15. Il suffit de noter que $\mathscr{H}$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(0)$. C'est donc un hyperplan, qui est dimension $\dim \mathbf{R}_{p+1}[X] - 1 = p+1$.
Par ailleurs, il est clair que $(X, X^2, \dots, X^{p+1})$ est une famille de $\mathscr{H}$, libre car sous-famille de la base canonique de $\mathbf{R}_{p+1}[X]$. Étant de cardinal $p+1 = \dim \mathscr{H}$, c'est une base de $\mathscr{H}$.

16. Il s'agit tout simplement d'enlever la première colonne et la dernière ligne de M :

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathscr{H}}, \mathscr{B}_p}(\delta) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \Delta(X) & \Delta(X^2) & \Delta(X^3) & & \Delta(X^{p+1}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & \binom{3}{1} & \dots & \binom{p+1}{1} \\ 0 & 0 & 3 & & \binom{p+1}{2} \\ \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & p+1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^p \end{array} \in \mathscr{M}_{p+1}(\mathbf{R}).$$

17. Puisque A est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, elle est inversible, et donc δ est bijectif.
Par conséquent, il existe un unique $Q \in \mathscr{H}$ tel que $\delta(Q) = X^p$.
C'est-à-dire un unique polynôme $Q \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$ qui satisfait à la fois $Q(0) = 0$ et $\Delta(Q) = X^p$.
Par la question 14, c'est donc l'unique polynôme $Q \in \mathbf{R}_{p+1}[X]$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ Q(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p.$$

18. On a donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_5(\mathbf{R})$.

La matrice proposée B proposée est alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 & -1/30 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Un simple calcul[2] nous dit que $AB = I_5$, et donc $B = A^{-1}$.

[2] Et je ne vois pas bien ce que vous pouvez faire pour convaincre le correcteur sur une question comme celle-ci. Bluffer est sûrement le mieux !

19. Ainsi, B est la matrice de δ^{-1} dans les bases $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_{\mathscr{H}}$.
Puisque par ailleurs le polynôme Q_p de la question 17 était le seul polynôme de $\mathscr{H}$ dont l'image par δ est X^p, c'est donc $\delta^{-1}(X^p)$.
Et alors les coordonnées de $\delta^{-1}(X^p)$ se lisent dans la base $\mathscr{B}_{\mathscr{H}}$ se lisent dans la dernière colonne de B.
Donc pour $p = 4$, on obtient $Q_4 = -\frac{1}{30}X + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{5}X^5$.
Ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5.$$

Et de même, les coordonnées de Q_3 sont dans l'avant dernière colonne de B, donc $Q_3 = \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{4}X^4$.

Commentaire *: plus généralement, la formule donnée pour les coefficients de B est valable pour tout p, ce qui permet de trouver des formules générales pour B_p.*
Mais c'est plus dur !

Problème 2 : étude d'un ensemble de matrices.

1. On a $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{A^3 = -I_3.}$
On a donc $A(-A^2) = I_3$, ce qui signifie que A est inversible, et que $A^{-1} = -A^2$.

2.a. Commençons par noter que si $M = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{H}$, alors $M = bA + cA^2 + aI_3 \in \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.

Et inversement, si a, b, c sont trois complexes, alors $aI_2 + bA + cA^2 = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{H}$.

Donc $\mathscr{H} = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$, qui est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$, qui possède (I_3, A, A^2) pour famille génératrice.

Astuce — Un Vect est toujours un sous-espace vectoriel, il n'est pas utile de la vérifier, c'est du cours.

Cette famille est libre puisque $aI_3 + bA + cA^2 = 0_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} = 0_3 \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

Donc il s'agit d'une base de $\mathscr{H}$, qui est donc $\boxed{\text{de dimension 3.}}$

2.b. Puisque $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel, c'est déjà un sous-groupe de $(\mathscr{M}_3(\mathbf{C}), +)$.
De plus, $I_3 \in \mathscr{H}$ car I_3 correspond à $(a, b, c) = (1, 0, 0)$.
Enfin, pour $(M, N) \in \mathscr{H}^2$, il existe des complexes $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ tels que $M = a_1I_3 + b_1A + c_1A^2$, et $N = a_2I_3 + b_2A + c_2A^2$. Et donc

$$\begin{aligned} MN &= (a_1I_3 + b_1A + c_1A^2)(a_2I_3 + b_2A + c_2A^2) \\ &= a_1a_2I_3 + (a_1b_2 + a_2b_1)A + (a_1c_2 + b_1b_2 + a_2c_1)A^2 + (b_1c_2 + c_1b_2)A^3 + c_1c_2A^4 \\ &= a_1a_2I_3 + (a_1b_2 + a_2b_1)A + (a_1c_2 + b_1b_2 + a_2c_1)A^2 - (b_1c_2 + c_1b_2)I_3 - c_1c_2A. \\ &\in \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2) = \mathscr{H}. \end{aligned}$$

Détails — Puisque $A^3 = -I_3$, on a $A^4 = A^3A = -A$.

Donc $\mathscr{H}$ est stable par produit, et donc est $\boxed{\text{un sous-anneau de } \mathscr{M}_3(\mathbf{C}).}$

2.c. On a $A^3+I_3=0_3$. Mais par ailleurs, $A^3+I_3=A^3-(-I_3)^3=(A+I_3)\left(A^2-A+I_3\right)$

Or, $A+I_3\neq 0_3$, et $A^2-A+I_3=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\neq 0_3$.

Donc $\boxed{\mathscr{H}\text{ n'est pas un anneau intègre}}$, puisque nous avons là deux diviseurs de zéro.

Détails

Il s'agit de la troisième identité remarquable généralisée, qui est valable car A et $-I_3$ commutent (les matrices scalaires commutent à toute matrice).

3.a. Soit $\lambda\in\mathbf{C}$. Alors $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A-\lambda I_3)<3$. Calculons donc ce rang par opérations élémentaires :

$$A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-\lambda&0&-1\\1&-\lambda&0\\0&1&-\lambda\end{pmatrix}\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&-\lambda&0\\-\lambda&0&-1\\0&1&-\lambda\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2+\lambda L_1}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&-\lambda&0\\0&-\lambda^2&-1\\0&1&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&-\lambda&0\\0&1&-\lambda\\0&-\lambda^2&-1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3+\lambda^2L_1}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&-\lambda&0\\0&1&-\lambda\\0&0&-1-\lambda^3\end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire, elle ne sera pas inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda^3+1=0\Leftrightarrow\lambda^3=-1$.
Or les racines cubiques de -1 sont $-1,-j$ et $-j^2$.

Donc $\boxed{A-\lambda I_3\text{ n'est pas inversible si et seulement si }\lambda\in\{-1,-j,-j^2\}.}$

Astuce

Il est clair que -1 est racine cubique de -1.
Or pour $a\in\mathbf{C}^*$, une fois que l'on a une racine cubique z_0 de a, les autres sont les $z_0\times\omega$, pour $\omega\in\mathbf{U}_3$.
Et il est bien connu que $\mathbf{U}_3=\{1,j,j^2\}$.

3.b. On peut bien évidemment résoudre le système $AX=-X$, pour $X\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{C})$.

Notons plutôt que $A+I_3=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ dont les colonnes sont liées par la relation $C_1-C_2+C_3=0_{3,1}$, si bien que $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(A+I_3)$.

Puisque par ailleurs, $A+I_3$ est de rang supérieur ou égal à 2 (car ses colonnes ne sont pas proportionnelles), elle est donc de rang 2, et donc $\dim\mathrm{Ker}(A+I_3)=1$, si bien que $\mathrm{Ker}(A+I_3)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

De même, $A+jI_3=\begin{pmatrix}j&0&-1\\1&j&0\\0&1&j\end{pmatrix}$ dont les colonnes sont liées par la relation $C_1-j^2C_2+jC_3=0_{3,1}$, si bien que $\begin{pmatrix}1\\-j^2\\j\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(A+jI_3)$. Et le même argument de rang que ci-dessus nous donne $\mathrm{Ker}(A+jI_3)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-j^2\\j\end{pmatrix}$.

Enfin, pour $A+j^2I_3$, on a $C_1-jC_2+j^2C_3=0_{3,1}$ et donc $\mathrm{Ker}(A+j^2I_3)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-j\\j^2\end{pmatrix}$.

Remarque

Si vous avez choisi de résoudre un système, ne prenez pas peur du fait des coefficients complexes, la méthode est la même que pour la résolution des systèmes à coefficients réels !

3.c. Notons $X_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}1\\-j^2\\j\end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix}1\\-j\\j^2\end{pmatrix}$.

Prouvons que (X_1,X_2,X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{C})$. Sa matrice dans la base canonique est

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-j^2&-j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$$

prouvons donc que M est inversible. Procédons à un pivot :

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-j^2&-j\\1&j&j^2\end{pmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1-j^2&1-j\\0&j-1&j^2-1\end{pmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2/(j-1)\\L_3\leftarrow L_3/(1-j)}}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&j+1&1\\0&1&j+1\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&j+1\\0&j+1&1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-(j+1)_2}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&j+1\\0&0&-j^2-2j\end{pmatrix}.$$

Astuce

$j^2-1=(j-1)(j+1)$

Cette dernière matrice est échelonnée, avec trois pivots, donc inversible, si bien que M l'est aussi.
Et donc (X_1, X_2, X_3) est une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{C})$.

La matrice de $f_A : X \mapsto AX$ dans la base $\mathscr{B}$ est alors $\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} AX_1 & AX_2 & AX_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \end{array} = D$ puisque

$X_1 \in \operatorname{Ker}(A + I_3) \Leftrightarrow (A + I_3)X_1 = 0_{3,1} \Leftrightarrow AX_1 = -X_1$ et de même $AX_2 = -jX_2$ et $AX_3 = -j^2X_3$.
Puisque par ailleurs, la matrice de f_A dans la base canonique est A, par la formule de changement de base, A et D sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme f_A dans deux bases différentes de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{C})$.

Remarque
La formule de changement de base nous dit même comment trouver une matrice de P telle que $A = P^{-1}DP$: il s'agit de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à la base canonique. Mais vous noterez que ce n'était pas demandé.

4.a. Si $M = aI_3 + bA + cA^2$, alors

$$M' = P^{-1}MP = aP^{-1}I_3P + bP^{-1}AP + cP^{-1}A^2P = aI_3 + bD + cD^2.$$

4.b. La bijectivité de φ n'est absolument pas difficile, puisque pour $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$, l'unique antécédent de M par φ est PMP^{-1}.
La linéarité et le fait qu'il s'agisse d'un morphisme d'anneaux ne posent pas non plus de difficultés (n'oubliez juste pas de vérifier que $\varphi(I_3) = I_3$, ce qui est indispensable pour un morphisme d'anneaux).

Rappel
Si f est un isomorphisme de E sur F, alors pour tout sev G de E, $f(G)$ et G ont même dimension (un isomorphisme préserve la dimension).

4.c. Commençons par noter que $\varphi(\mathscr{H})$ et $\mathscr{H}$ sont de même dimension car φ est un isomorphisme.
Par le calcul précédent, il est clair que pour $M \in \mathscr{H}$, $\varphi(M) = M'$ est diagonale. Donc $\varphi(\mathscr{H}) \subset \mathscr{D}$, et ces deux espaces étant de dimension 3, ils sont égaux.

Détails
$\mathscr{D}$ possède pour base la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ et donc est de dimension 3.

4.d. Que reste-t-il à dire ?...
Une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ est dans $\mathscr{H}$ si et seulement si $\varphi(M) \in \varphi(\mathscr{H}) = \mathscr{D}$.

5.a. Il est clair que $\alpha(0_3) = 0$ et que $\alpha(I_3) = 1$.
Si $M = a_1I_3 + b_1A + c_1A^2$ et $N = a_2I_3 + b_2A + c_2A^2$ sont dans $\mathscr{H}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\lambda M + N = (\lambda a_1 + a_2)I_3 + (\lambda b_1 + b_2)A + (\lambda c_1 + c_2)A^2$$

si bien que $\alpha(\lambda M + N) = (\lambda a_1 + a_2) - (\lambda b_1 + b_2) + \lambda c_1 + c_2 = \lambda\alpha(M) + \alpha(N)$.
Et pour le calcul de $\alpha(MN)$, il s'agit de reprendre les calculs de la question 2.b, qui nous donnent

$$\alpha(MN) = (a_1a_2 - b_1c_2 - c_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1 - c_1c_2) + (a_1c_2 + b_1b_2 + a2c_1).$$

Mais $\alpha(M)\alpha(N) = (a_1 - b_1 + c_1)(a_2 - b_2 + c_2) = \alpha(MN)$, donc α est un morphisme d'anneaux.

5.b. Pour $M = aI_3 + bA + cA^2 \in \mathscr{H}$, on a

$$\varphi(A) = aI_3 + bD + cD^2 = \begin{pmatrix} a - b + c & 0 & 0 \\ 0 & a - bj + cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a - j^2b + cj \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(M) & 0 & 0 \\ 0 & \beta(M) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(M) \end{pmatrix}.$$

Donc M est semblable à cette dernière matrice diagonale (nommons-là D_M) et donc est inversible si et seulement si D_M l'est.
Et une matrice diagonale est inversible si et seulement si chacun de ses coefficients diagonaux est non nul, donc ici, D_M est inversible si et seulement si $\alpha(M)\beta(M)\gamma(M) \neq 0$.

Détails
Puisque deux matrices semblables ont même rang, l'une est inversible si et seulement si l'autre l'est.

Lorsque M est inversible, $\varphi(M)\varphi(M^{-1}) = \varphi(I_3) = I_3$, et donc $\varphi(M^{-1}) = \varphi(M)^{-1}$.
Mais l'inverse de la matrice diagonale $\varphi(M)$ est encore une matrice diagonale.
Et donc $\varphi(M^{-1}) \in \mathscr{D}$, ce qui par la question 4.d nous dit que $M^{-1} \in \mathscr{H}$.

5.c. Soient M et X dans $\mathscr{H}$. Alors $\varphi(X^2) = \varphi(X)^2$, et donc on a

$$X^2 = M \Leftrightarrow \varphi(X^2) = \varphi(M) \Leftrightarrow \varphi(X)^2 = \varphi(M)$$

où $\varphi(X)$ et $\varphi(M)$ sont toutes deux dans $\mathscr{D}$.
Si de plus M est inversible, alors $\varphi(M) = \operatorname{Diag}(\alpha(M), \beta(M), \gamma(M))$, avec $\alpha(M)\beta(M)\gamma(M) \neq 0$.
Il s'agit donc de trouver le nombre de solutions à l'équation $Y^2 = \varphi(M)$, avec $Y \in \mathscr{D}$.

Mais si $Y = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, alors $Y^2 = \mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$, et donc $Y^2 = \varphi(M)$ si et seulement si $\begin{cases} \lambda_1^2 = \alpha(M) \\ \lambda_2^2 = \beta(M) \\ \lambda_3^2 = \gamma(M) \end{cases}$.

Puisque $\alpha(M), \beta(M)$ et $\gamma(M)$ sont tous nous nuls, ils possèdent chacun deux racines carrées, et donc il y a exactement 8 matrices diagonales Y telles que $Y^2 = \varphi(M)$.

Ce qui après application de φ^{-1} nous fournit exactement 8 matrices $X \in \mathcal{H}$ telles que $X^2 = M$.

Remarque

Puisque φ^{-1} est bijective (et donc injective), les 8 matrices ainsi obtenues sont bien différentes.

6.a. Comme indiqué, utilisons la matrice $M' = \varphi(M)$. En effet, puisque φ est un isomorphisme d'anneaux, on a $AM = MA \Leftrightarrow \varphi(AM) = \varphi(MA) \Leftrightarrow \varphi(A)\varphi(M) = \varphi(M)\varphi(A) \Leftrightarrow M'D = DM'$.

Astuce

Évitons de nommer i un coefficient de la matrice lorsqu'on manipule des complexes...

Si $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & u \end{pmatrix}$, alors $M'D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -jb & -j^2c \\ -d & -je & -j^2f \\ -g & -jh & -j^2u \end{pmatrix}$.

Et de même, $DM' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -jd & -je & -jf \\ -j^2g & -j^2h & -j^2u \end{pmatrix}$.

On a donc $M'D = DM'$ si et seulement si on a à la fois

$$-jb = -b,\ -j^2c = -c,\ -d = -jd,\ -jf = -j^2f,\ -g = -j^2g,\ -jh = -j^2h$$

soit si et seulement si $b = c = d = f = g = h = 0$. Donc si et seulement si M' est diagonale.

Mais par la question 4.d, c'est le cas si et seulement si $M \in \mathcal{H}$.

Donc $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow AM = MA$.

6.b. Si une matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ vérifie $X^2 = A$, alors $AX = X^2X = X^3$ et $XA = XX^2 = X^3$, donc $AX = XA$.

Par la question 6.a, ceci signifie que $X \in \mathcal{H}$.

Et puisque A est inversible, par la question 5.c, il existe exactement 8 matrices de $\mathcal{H}$ dont le carré vaut A.

Et donc $\boxed{\text{il existe exactement 8 matrices de } \mathcal{M}_3(\mathbf{C}) \text{ dont le carré vaut } A.}$