Devoir surveillé 1 (3h)

► *Les calculatrices sont* ***interdites****.*
► *La qualité d'une copie ne tient pas uniquement aux calculs et aux résultats qui s'y trouvent. Vous apporterez donc un soin particulier à la présentation, à la lisibilité et à l'orthographe de vos copies.* ***La qualité de la rédaction, la clarté et la finesse des raisonnements*** *sont des éléments susceptibles d'influencer la note finale.*
► *Merci de numéroter entièrement les réponses (par exemple 6.c. et pas seulement c.) et d'encadrer vos résultats.*

Exercice 1

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

   a. $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{x+2}{x+3}$

   b. $x|x| = 3x + 2$

   c. $\lfloor 3x \rfloor = 2 - \lfloor x \rfloor$

   d. $2e^{2x} - 7e^{x} = 4$

2. Prouver que :

   a. pour tout $t \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(\mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t))^n = \mathrm{ch}(nt) + \mathrm{sh}(nt)$.

   b. pour tous a et b dans $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(n-1)a^n + b^n \geqslant na^{n-1}b$.
   Indication : on pourra commencer par se ramener à une inégalité plus simple en divisant par b^n.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{1\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

1. Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue x : $\sqrt{1+x} - 1 \geqslant \dfrac{x}{3}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - 1 \geqslant \dfrac{1}{3(n+1)}$.
3. Prouver alors que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \leqslant 4 - \dfrac{3}{\sqrt{n}}$.
4. En déduire que la suite (u_n) admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

On note $\mathscr{H}$ la courbe représentative de la fonction $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et on considère trois points A, B, C de $\mathscr{H}$, deux à deux distincts, d'abscisses respectives a, b et c.

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
2. Prouver que l'orthocentre (point de concours des hauteurs) du triangle ABC est sur $\mathscr{H}$ et que son abscisse h vérifie $abch = -1$.
3. En déduire que ABC est un triangle rectangle si et seulement si $(a^2bc+1)(ab^2c+1)(abc^2+1) = 0$.
   On pourra commencer par chercher une condition nécessaire et suffisante pour que ABC soit rectangle en A.

Problème : fonction argument cosinus hyperbolique

1. Rappeler, sans démonstrations, la définition, la dérivée et le tableau de variations (avec limites) de la fonction ch (cosinus hyperbolique).
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, il existe un unique réel positif t tel que $\mathrm{ch}(t) = x$.

Ce réel t est alors appelé l'argument cosinus hyperbolique de x, et on le note Argch(x).

3. Donner le sens de variations de la fonction Argch, ainsi que la valeur de Argch(1).
4. Pour $x \geqslant 1$, montrer que $\mathrm{sh}\left(\mathrm{Argch}(x)\right) = \sqrt{x^2-1}$.
5. En utilisant la question précédente, prouver que Argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée.
6. Pour $x \geqslant 1$, prouver que $\mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. En déduire la limite de Argch en $+\infty$, et retrouver l'expression de la dérivée de Argch.
7. Montrer que la fonction $F : \left|\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{Argch}(x) - \sqrt{x^2-1} \end{array}\right.$ est une primitive de Argch.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{5/4}^{13/5} \mathrm{Argch}(x)\,dx$.
8. On souhaite prouver dans cette question donner trois preuves du fait suivant :

$$\text{pour tout } x \geqslant 1, \quad 2\mathrm{Argch}(x) = \mathrm{Argch}\left(2x^2-1\right) \quad (\star).$$

   a. **Première méthode : à l'aide de l'expression logarithmique de** Argch
   Utiliser l'expression de Argch obtenue à la question 6 pour prouver la relation $(\star)$.

   b. **Seconde méthode : à l'aide de formules de trigonométrie hyperbolique**

      i. Montrer que pour tous réels a et b, $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$.

      ii. Prouver que si x et y sont deux réels de $[1,+\infty[$, alors

$$\mathrm{Argch}(x) + \mathrm{Argch}(y) = \mathrm{Argch}\left(xy + \sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)}\right).$$

      Conclure.

   c. **Troisième méthode : par un calcul de dérivées.**
   Étudier la dérivée de la fonction $g : \left|\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Argch}\left(2x^2-1\right) \end{array}\right.$, et en déduire la formule $(\star)$.

Question subsidiaire

Cette question est hors barème et n'a vocation qu'à occuper ceux qui iraient trop vite. Ne l'abordez que si vous estimez avoir très bien réussi le reste du sujet.

Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbf{R}$, le nombre de solutions de l'équation (E_a) : $\quad \ln(x) + a|x-1| = 0$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

EXERCICE 1

1.a. Notons que l'inéquation n'a de sens que pour $x \neq -1$ et $x \neq -3$.
Et alors, pour $x \notin \{-1, -3\}$, on a

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \frac{x+2}{x+3} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{x+2}{x+3} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+3)-(x+2)(x+1)}{(x+1)(x+3)} \leqslant 0.$$

Soit au final, $\dfrac{-2}{(x+1)(x+3)} \leqslant 0$.
Et -2 étant négatif, ceci est équivalent à $(x+1)(x+3) > 0$.
Un tableau de signes facile nous permet de conclure que

$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est }]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[.}$

> **Danger !**
> L'erreur à ne surtout pas faire : multiplier sans précautions les deux membres de l'inégalité par x ou par $x+3$.
> En effet, sans information sur le signe de ces quantités, rien ne justifie qu'on garde le sens de l'inégalité.

1.b. Distinguons deux cas, suivant que $x \geqslant 0$ ou $x < 0$.
► **Si $x \geqslant 0$** : alors $|x| = x$, et donc l'équation s'écrit encore $x^2 - 3x - 2 = 0$.
Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta = 9 - 4 \times (-2) = 17$, de sorte qu'il y a deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.
Puisque $17 > 9$, $\sqrt{17} > \sqrt{9} = 3$ et donc $x_1 < 0$.
Donc la seule solution positive de l'équation est $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.
► **Si $x < 0$** : alors $|x| = -x$ et donc l'équation de départ s'écrit encore $x^2 + 3x + 2 = 0$.
Le discriminant est alors $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$, de sorte qu'il y a deux racines qui sont -1 et -2, et donc sont toutes deux négatives.

Ainsi, $\boxed{\text{l'équation } x|x| = 3x+2 \text{ possède trois solutions qui sont } -2, -1 \text{ et } \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}.}$

> **Méthode**
> Bien qu'il s'agisse de prouver un résultat pour tout entier n, il ne faut pas pour autant se lancer tête baissée dans une récurrence sans y avoir réfléchi. Avant de démarrer une récurrence dans une copie, il faudrait se poser deux questions :
> 1) puis-je prouver le résultat par un calcul direct, sans récurrence (comme c'est le cas ici) ?
> 2) ai-je une idée de comment prouver l'hérédité, en utilisant bien l'hypothèse de récurrence ? Si vous avez une preuve qui ne nécessite pas de savoir $\mathscr{P}(n)$ vraie pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$, c'est qu'il s'agit d'une preuve directe, et que la récurrence est superflue.
> Et si vous n'avez aucune idée de comment prouver $\mathscr{P}(n+1)$, alors passez votre route, le fait d'initialiser une récurrence sans prouver l'hérédité ne vous rapportera probablement aucun point.

1.c. Commençons par noter que si $x \geqslant 1$, alors $\lfloor 3x \rfloor \geqslant 3$ et $2 - \lfloor x \rfloor \leqslant 1$, donc x n'est pas solution de l'équation.
De même, si $x < 0$, alors $\lfloor 3x \rfloor < 0$ et $2 - \lfloor x \rfloor \geqslant 2$, donc x n'est pas solution.
Ainsi, les solutions éventuelles de l'équation sont dans $[0, 1[$.
Or, pour $x \in [0, 1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$, donc

$$\lfloor 3x \rfloor = 2 - \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow \lfloor 3x \rfloor = 2 \Leftrightarrow 2 \leqslant 3x < 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leqslant x < 1.$$

Et donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \left[\dfrac{2}{3}, 1\right[.}$

1.d. Posons $X = e^x$, de sorte que

$$2e^{2x} - 7e^x = 4 \Leftrightarrow 2X^2 - 7X - 4 = 0.$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 en X est $\Delta = 49 + 32 = 81 = 9^2$.
Donc il possède deux racines, qui sont $X_1 = \dfrac{7+9}{4} = 4$ et $X_2 = \dfrac{7-9}{4} = -\dfrac{1}{2}$.
On ne peut pas avoir $e^x = -\dfrac{1}{2}$ car une exponentielle est toujours positive, et donc

$$2e^{2x} - 7e^x = 4 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln(4) = 2\ln(2).$$

Et donc $\boxed{\text{l'équation ne possède qu'une solution, qui est } 2\ln(2).}$

2.a. Soit $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^t - e^{-t}}{2} = e^t.$$

Et donc $(\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t))^n = (e^t)^n = e^{nt}$.
D'autre part, on a $\operatorname{ch}(nt) = \dfrac{e^{nt} + e^{-nt}}{2}$ et $\operatorname{sh}(nt) = \dfrac{e^{nt} - e^{-nt}}{2}$ et donc

$$\operatorname{ch}(nt) + \operatorname{sh}(nt) = \frac{e^{nt} + e^{-nt}}{2} + \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2} = e^{nt} = \boxed{(\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t))^n}.$$

2.b. Soient a et b deux réels strictement positifs, et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$(n-1)a^n + b^n \geqslant na^{n-1}b \Leftrightarrow (n-1)\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1 \geqslant n\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}.$$

Il nous suffit donc de prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(n-1)x^n + 1 \geqslant nx^{n-1}$, puis d'appliquer ceci avec $x = \frac{a}{b}$.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f_n(x) = (n-1)x^n + 1 - nx^{n-1}$.
Alors f est dérivable, et $f_n'(x) = n(n-1)x^{n-1} - n(n-1)x^{n-2} = n(n-1)x^{n-2}(x-1)$.
Le tableau de variations de f_n est alors facile à établir :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc f_n admet un minimum en 1, et ce minimum vaut $f_n(1) = 0$.
On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $f_n(x) \geqslant 0$, et donc $(n-1)x^n + 1 \geqslant x^{n-1}$.
Et donc pour tout $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, en prenant $x = \frac{a}{b}$ dans l'inégalité précédente, puis en multipliant par b^n, il vient

$$\boxed{(n-1)a^n + b^n \geqslant (n-1)a^{n-1}b.}$$

EXERCICE 2

Méthode — Si l'énoncé ne précise rien, toujours commencer par s'interroger sur le domaine de validité de l'inéquation.

1. Commençons par noter que l'inéquation n'a de sens que si $1 + x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$.
Et alors, pour $x \geqslant -1$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} - 1 \geqslant \frac{x}{3} &\Leftrightarrow \sqrt{1+x} \geqslant 1 + \frac{x}{3}\\ &\Leftrightarrow 1 + x \geqslant \left(1 + \frac{x}{3}\right)^2\\ &\Leftrightarrow 1 + x \geqslant 1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{9}\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{x}{3} \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{x}{9}(x-3) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Puisque les deux membres sont positifs, le passage au carré est bien une équivalence.

Puisque $x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$, il ne reste plus qu'à faire un tableau de signe :

x	-1		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est } [0,3].}$

2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$ et donc $\frac{1}{n} \in [0,3]$.

On en déduit que $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \geqslant \frac{1}{3n} \boxed{\geqslant \frac{1}{3(n+1)}.}$

$n = 0$ ou $n = 1$? — On cherche à prouver un résultat pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et $\mathbf{N}^*$ commence à 1.
Donc il n'est pas question d'essayer de prouver $\mathscr{P}(0)$ (qui n'aurait de toutes façons aucun sens car u_0 n'est pas défini).

3. Commençons par noter que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.

Prouvons alors par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: «$u_n \leqslant 4 - \frac{3}{\sqrt{n}}$».

<u>**Initialisation**</u> : pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 \leqslant 4 - \frac{3}{\sqrt{1}}$.

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie, et donc la récurrence est initialisée.
Hérédité : supposons que pour un certain $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant 4 - \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}.$$

Hypothèse de récurrence.

Pour prouver que $u_{n+1} \leqslant 4 - \dfrac{3}{\sqrt{n+1}}$, on peut donc se contenter[1] de prouver que

$$4 - \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant 4 - \frac{3}{\sqrt{n+1}}.$$

[1] En espérant que ce soit vrai !

Or

$$\begin{aligned}4 - \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant 4 - \frac{3}{\sqrt{n+1}} &\Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant -\frac{3}{\sqrt{n+1}}\\ &\Leftrightarrow -3\sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{1}{n+1} \leqslant -3\\ &\Leftrightarrow -3\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 3 \leqslant -\frac{1}{n+1}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \geqslant \frac{1}{3(n+1)}.\end{aligned}$$

On a multiplié les deux membres de l'inégalité par $\sqrt{n+1} \geqslant 0$.

Puisque nous savons déjà que cette inégalité est vérifiée, on a donc bien $u_{n+1} \leqslant 4 - \dfrac{3}{\sqrt{n+1}}$, donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \leqslant 4 - \dfrac{3}{\sqrt{n}}.}$

4. Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \underbrace{\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}}_{\geqslant 0}$, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$, et donc la suite (u_n) est croissante.
D'autre part, grâce à la majoration prouvée à la question précédente, on a $u_n \leqslant 4 - \dfrac{3}{\sqrt{n}} \leqslant 4$.
Autrement dit, la suite (u_n) est majorée, et étant croissante, $\boxed{\text{elle possède donc une limite.}}$

Détails
Il s'agit là d'un résultat que vous avez utilisé en l'admettant en terminale : une suite croissante et majorée admet une limite (finie).
Bien qu'il soit relativement intuitif, il fera tout de même l'objet d'une preuve rigoureuse dans quelques temps (et nous le nommerons «théorème de la limite monotone»).

EXERCICE 3

1. Commençons par remarquer que les coordonnées de A, B et C sont parfaitement connues : ce sont $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$, $\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$ et $\left(c, \dfrac{1}{c}\right)$.
Pour montrer que A, B et C ne sont pas alignés, nous pouvons par exemple[2] prouver que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Mais $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c-a \\ \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\end{pmatrix}$.
Et alors

$$(b-a)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) - (c-a)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = (b-a)\frac{a-c}{ca} - (c-a)\frac{a-b}{ab} = \frac{(b-a)(c-a)(b-c)}{abc} \neq 0$$

car a, b et c sont deux à deux distincts.
Donc $\boxed{A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés.}}$

[2] C'est une manière de procéder parmi d'autres.

Rappel
Deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

2. Nous pourrions être tentés de chercher les coordonnées de l'orthocentre, par exemple en déterminant des équations des hauteurs, mais la question se reformule en fait en : «prouver que le point de coordonnées $\left(\dfrac{-1}{abc}, -abc\right)$ est l'orthocentre de ABC».
Notons donc H le point de coordonnées $\left(\dfrac{-1}{abc}, -abc\right)$, et prouvons qu'il se trouve sur

Détails
Un point situé sur $\mathscr{H}$ dont l'abscisse h vérifie $abch = -1$ ne peut être que $\left(-\dfrac{1}{abc}, \dfrac{1}{\frac{1}{abc}}\right) = \left(\dfrac{-1}{abc}, -abc\right)$.

chacune des hauteurs de ABC.
Pour prouver qu'il est sur la hauteur issue de A, il faut et il suffit de prouver que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.
Mais

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{abc} - a\right)(c-b) + \left(-abc - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) = \frac{-1-a^2bc}{abc}(c-b) + \frac{-1-a^2bc}{a}\frac{b-c}{bc} = 0.$$

Donc H est bien sur la hauteur issue de A.
En permutant les rôles de A et B, on montre de même que H est sur la hauteur issue de B.
Or, deux hauteurs distinctes ne se coupent qu'en un point, qui est l'orthocentre : donc $\boxed{H \text{ est l'orthocentre de } ABC.}$

Détails

a, b et c jouent des rôles symétriques dans l'expression des coordonnées de H, et donc permuter deux points ne change pas les coordonnées de H.

3. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $A = H$.
Puisque A et H sont tous deux sur $\mathscr{H}$, ils sont égaux si et seulement si ils ont même abscisse, soit si et seulement si $a^2bc = -1$.
De même, ABC est rectangle en B si et seulement si $B = H$, soit si et seulement si $ab^2c = -1$, et enfin, ABC est rectangle en C si et seulement si $abc^2 = -1$.
Donc ABC est rectangle si et seulement si l'un des trois nombres $a^2bc + 1$, $ab^2c + 1$ et $abc^2 + 1$ est nul.
Soit encore si et seulement si leur produit est nul :
$\boxed{ABC \text{ est un triangle rectangle si et seulement si } (a^2bc+1)(ab^2c+1)(abc^2+1) = 0.}$

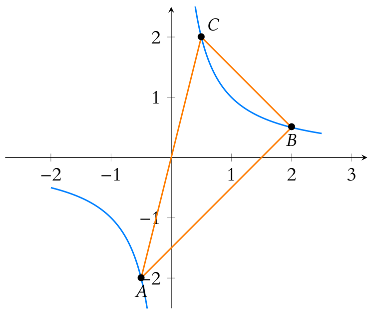

FIGURE 0.1– Un cas où ABC est rectangle.

PROBLÈME : FONCTION ARGUMENT COSINUS HYPERBOLIQUE

1. La fonction ch est définie sur $\mathbf{R}$ par $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
Elle est dérivable sur $\mathbf{R}$, et sa dérivée est la fonction sh.
Enfin, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

2. La fonction ch est continue sur $\mathbf{R}$, car dérivable, et elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ puisque sa dérivée est positive sur $\mathbf{R}_+$, et ne s'y annule que pour $x = 0$.
D'autre part, on a $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, donc par le théorème de la bijection, ch réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.
Et donc tout réel dans $[1, +\infty[$ possède un unique antécédent par ch : pour tout $x \geqslant 1$, il existe un unique $t \geqslant 0$ tel que $x = \operatorname{ch}(t)$.

Remarque

Bien que l'énoncé ne le dise pas en ces termes, Argch est la bijection réciproque de la fonction ch restreinte à $\mathbf{R}_+$.

3. Puisque ch est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, sa bijection réciproque l'est également.
Et puisque $\operatorname{ch}(0) = 1$, alors $\boxed{\operatorname{Argch}(1) = 0.}$

4. Par définition d'une bijection réciproque, pour tout $x \geqslant 1$, $\operatorname{ch}(\operatorname{Argch}(x)) = x$.
D'autre part, nous savons que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$, et donc

$$\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argch}(x)) - \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch}(x)) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch}(x)) = x^2 - 1.$$

Puisque $\operatorname{Argch}(x) \geqslant 0$, son sinus hyperbolique est positif (car $\operatorname{sh}(x)$ est toujours du signe de x). Et donc

$$\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argch}(x)) = x^2 - 1 \Rightarrow \operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = \boxed{\sqrt{x^2-1}.}$$

⚠ Attention !

Ne concluons pas trop rapidement que $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = \sqrt{x^2-1}$, il se pourrait encore que $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = -\sqrt{x^2-1}$, et donc il y a des précautions à prendre avant de passer à la racine.

5. La fonction ch réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et sa dérivée, qui est la fonction sh ne s'annule pas sur $\mathbf{R}_+^*$.
Donc sa bijection réciproque, Argch, est dérivable sur $]1, +\infty[$, et

$$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Rappel

Pour garantir la dérivabilité de la bijection réciproque, il faut que sur l'intervalle de départ, f' ne s'annule pas (car une tangente horizontale de f se traduirait par une tangente verticale de f^{-1}).

6. Soit $x \geqslant 1$. Il s'agit de prouver que $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ est l'unique[3] réel positif dont le cosinus hyperbolique vaut x.
La positivité n'est pas difficile car $x+\sqrt{x^2-1} \geqslant x \geqslant 1$ et donc $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \geqslant 0$.
On a alors

[3] L'unicité nous est assurée par le fait que ch réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}+e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\\
&= \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\\
&= \frac{1+x^2+x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\\
&= \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\\
&= \frac{2x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = x.
\end{aligned}$$

$e^{-u} = \frac{1}{e^u}$.

Et donc, on a bien $\boxed{\operatorname{Argch}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).}$

On a alors $x+\sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Argch}(x) = +\infty.}$

Prévisible
La fonction Argch est croissante et doit prendre comme valeur tous les réels positifs. Sa limite ne peut donc qu'être $+\infty$...

Pour dériver $x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, commençons par dériver $x \mapsto x+\sqrt{x^2-1}$, qui se dérive en $x \mapsto 1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
Et donc la dérivée de Argch est donnée par

$$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$$

Une autre méthode : ici l'expression de Argch était donnée dans l'énoncé, et il y avait donc juste à vérifier qu'elle convenait. Mais d'où vient cette expression ?
Par définition, $\operatorname{Argch}(x)$ est l'unique solution de l'équation $\operatorname{ch}(t) = x$, d'inconnue $t \in \mathbf{R}_+$.
Laissons de côté le cas où $x = 1$ puisque nous connaissons déjà la valeur de $\operatorname{Argch}(1)$.
Pour $t \geqslant 0$, on a

$$\operatorname{ch}(t) = x \Leftrightarrow e^t + e^{-t} = 2x \Leftrightarrow \left(e^t\right)^2 - 2xe^t + 1 = 0.$$

Il s'agit là d'une équation polynomiale de degré 2 en $X = e^t$, de discriminant $\Delta = 4x^2-4 = 4(x^2-1)$.
Elle possède donc deux solutions qui sont $X_1 = \frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2} = x+\sqrt{x^2-1}$ et $X_2 = x-\sqrt{x^2-1}$.
Pour $t \geqslant 0$, on doit avoir $e^t \geqslant 1$. Or, il n'est pas trop dur de constater que $X_2 < 1$, et donc pour $t \geqslant 0$,

$$\operatorname{ch}(t) = x \Leftrightarrow e^t = x+\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow t = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Sans calcul
Puisque nous savons déjà, par bijectivité de ch, que cette équation admet une unique solution, l'un des deux nombres X_1 et X_2 est forcément inférieur strictement à 1 (faute de quoi il y aurait deux solutions).
Ce nombre est forcément le plus petit des deux : c'est X_2.

7. La fonction F est dérivable sur $]1,+\infty[$ car Argch est dérivable, que la racine est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que $x^2-1 > 0$ pour $x > 1$.
Il suffit donc de dériver F pour constater que sa dérivée est Argch. Or, pour $x > 1$, on a

$$F'(x) = \operatorname{Argch}(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Argch}(x).$$

Donc $\boxed{F \text{ est bien une primitive de Argch.}}$

On a donc
$$\int_{5/4}^{13/5} \operatorname{Argch}(x)\,dx = [F(x)]_{5/4}^{13/5} = F\left(\frac{13}{5}\right) - F\left(\frac{5}{4}\right).$$

Or, $\sqrt{\left(\frac{13}{5}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{169}{25} - 1} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$ et donc

$$\operatorname{Argch}\left(\frac{13}{5}\right) = \ln\left(\frac{13}{5} + \frac{12}{5}\right) = \ln\left(\frac{25}{5}\right) = \ln(5)$$

de sorte que $F\left(\frac{13}{5}\right) = \frac{13\ln(5) - 12}{5}$.

Et de même, $\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ et donc

$$\operatorname{Argch}\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) = \ln(2) \text{ et } F\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5\ln(2) - 3}{4}.$$

Et ainsi,
$$\boxed{\int_{5/4}^{13/5} \operatorname{Argch}(x)\,dx = \frac{13\ln(5) - 12}{5} - \frac{5\ln(2) - 3}{4}.}$$

8.a. **Première méthode** : notons une fois pour toutes que pour $x \geqslant 1$, $2x^2 - 1 \geqslant 1$, et donc $\operatorname{Argch}\left(2x^2 - 1\right)$ existe bien.
On a alors

$$\operatorname{Argch}\left(2x^2 - 1\right) = \ln\left(2x^2 - 1 + \sqrt{\left(2x^2 - 1\right)^2 - 1}\right) = \ln\left(2x^2 - 1 + \sqrt{4x^4 - 4x^2}\right)$$
$$\ln\left(2x^2 - 1 + \sqrt{4x^2}\sqrt{x^2 - 1}\right) = \ln\left(2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1}\right).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Argch}(x) &= 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \ln\left(\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^2\right) \\ &= \ln\left(x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} + \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2\right) \\ &= \ln\left(2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\operatorname{Argch}\left(2x^2 - 1\right) = 2\operatorname{Argch}(x).}$

8.b. **Seconde méthode** :

8.b.i. Pour a et b réels, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) &\left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right) + \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^b - e^{-b}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2e^{a+b} + 2e^{-(a+b)}\right) \\ &= \boxed{\operatorname{ch}(a+b).} \end{aligned}$$

8.b.ii. Soient x, y deux réels supérieurs ou égaux à 1. On a alors

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\left(\operatorname{Argch}(x) + \operatorname{Argch}(y)\right) &= \operatorname{ch}\left(\operatorname{Argch}(x)\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{Argch}(y)\right) + \operatorname{sh}\left(\operatorname{Argch}(x)\right)\operatorname{sh}\left(\operatorname{Argch}(y)\right) \\ &= xy + \sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1}. \end{aligned}$$

Puisque $xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} \geqslant xy \geqslant 1$, en appliquant la fonction Argch aux deux membres de l'égalité ci-dessus, il vient

$$\operatorname{Argch}(x)+\operatorname{Argch}(y) = \operatorname{Argch}\left(\operatorname{ch}\left(\operatorname{Argch}(x)+\operatorname{Argch}(y)\right)\right) = \boxed{\operatorname{Argch}\left(xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}\right).}$$

En particulier, pour $x = y$, $2\operatorname{Argch}(x) = \operatorname{Argch}\left(x^2+\sqrt{(x^2-1)(x^2-1)}\right) = \operatorname{Argch}\left(2x^2-1\right)$.

8.c. **Troisième méthode** : notons que pour $x > 1$, $2x^2-1 > 1$, et donc $2x^2-1$ est bien dans le domaine de dérivabilité de Argch, de sorte que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ car composée de fonctions dérivables.
On a alors, pour $x > 1$,

$$g'(x) = 4x\operatorname{Argch}'\left(2x^2-1\right) = 4x\frac{1}{\sqrt{(2x^2-1)^2-1}} = \frac{4x}{4x^4-4x^2} = \frac{2x}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Nous reconnaissons là la dérivée de $2\operatorname{Argch}(x)$, mais ceci ne suffit pas : deux fonctions de même dérivée ne sont pas forcément égales, et peuvent différer d'une constante. Par exemple, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x-1$ ont la même dérivée, mais ne sont clairement pas égales.
Soit donc $h : x \mapsto 2\operatorname{Argch}(x) - \operatorname{Argch}(2x^2-1)$.
Alors h est dérivable sur $]1,+\infty[$, et sa dérivée est nulle.
Par conséquent, h est constante, et

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = 2\operatorname{Argch}(1) - \operatorname{Argch}(1) = 0.$$

Astuce
Une fonction constante égale à λ tend vers λ en n'importe quel point de son domaine de définition.

Et donc h est constante égale à 0 : pour tout $x \in]1,+\infty[$, $\boxed{2\operatorname{Argch}(x) = \operatorname{Argch}\left(2x^2-1\right).}$

Comme cette formule est trivialement vraie pour $x = 1$, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $x \in [1,+\infty[$.

QUESTION SUBSIDIAIRE

Notons que l'inéquation (E_a) n'a de sens que pour $x > 0$.
Commençons par dégrossir un peu le problème : 1 est toujours solution de (E_a) car $\ln(1) = 0 = |1-1|$.
Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit tout simplement $\ln(x) = 0$, dont 1 est la seule solution.
Si $a > 0$, alors (E_a) s'écrit $\ln(x) = -a|x-1|$.
Puisque $-a|x-1| \leqslant 0$, (E_a) ne peut pas posséder de solutions dans $]1,+\infty[$.
De même si $a < 0$, alors $-a|x-1| > 0$, et donc (E_a) ne peut posséder de solution dans $]0,1[$.

Pour répondre à la question posée, introduisons la fonction f_a, définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f_a(x) = \ln(x) + a|x-1|$.
Les solutions de (E_a) étant exactement les zéros de f_a, il s'agit donc de déterminer combien de fois f_a s'annule.

Valeur absolue
Si $x < 1$, $x-1 < 0$ et donc $|x-1| = 1-x$.

▶ <u>Si $a > 0$</u> : alors il suffit d'étudier f_a sur $]0,1]$, et pour $x \in]0,1]$, $f_a(x) = \ln(x) + a(1-x)$.
En particulier, f_a est dérivable sur $]0,1[$ et $f_a'(x) = \dfrac{1}{x} - a$.
Donc $f_a'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > a \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{a}$.
Mais nous n'étudions f_a que sur $]0,1]$, donc il faut encore savoir à quelle condition $\dfrac{1}{a} \in]0,1]$.
C'est le cas si et seulement si $a \geqslant 1$.
• Donc pour $a \in]0,1]$, f_a' est strictement positive sur $]0,1[$, et donc f_a est strictement croissante sur $]0,1]$.
Par conséquent pour tout $x \in]0,1[$, $f_a(x) < f_a(1) = 0$, de sorte que la seule solution de (E_a) sur $]0,1]$, et donc sur $\mathbf{R}_+^*$ est $x = 1$.
• En revanche, si $a > 1$, alors $\dfrac{1}{a}$ est dans $]0,1[$, et donc le tableau de variations de f_a sur $]0,1]$ est donné par

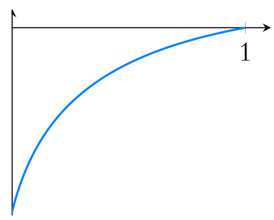

FIGURE 0.2– La fonction f_a si $a \in]0,1]$.

x	0		$\frac{1}{a}$		1
$f_a'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_a(x)$	‖	$\nearrow$	$f_a\left(\frac{1}{a}\right)$	$\searrow$	0

De plus, en 0, $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $|x-1| \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} |-1| = 1$. Et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_a(x) = -\infty$.

Puisque f_a est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{a}, 1\right]$, alors $f_a\left(\frac{1}{a}\right) > f_a(1) = 0$.

Sur $\left]0, \frac{1}{a}\right]$, f_a est continue[4], strictement croissante, et 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to 0^+} f_a(x)$ et $f_a\left(\frac{1}{a}\right)$. Par le théorème de la bijection, il existe donc une unique solution de $f_a(x) = 0$ dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{a}\right]$.

Par ailleurs, f_a est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{a}, 1\right]$, et donc pour $x \in \left]\frac{1}{a}, 1\right[$, $f_a(x) > \underbrace{f_a(1)}_{=0}$,

et donc x n'est pas solution de (E_a).
Ainsi, (E_a) possède deux solutions dans $]0, 1]$ et donc dans $\mathbf{R}$.

[4] Car dérivable.

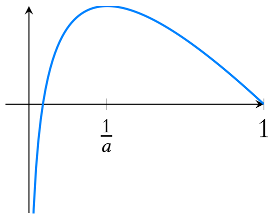

FIGURE 0.3– La fonction f_a si $a > 1$.

► <u>Si $a < 0$</u> : alors pour $x \in [1, +\infty[$, $f_a(x) = \ln(x) + a(x-1)$.
Donc f_a est dérivable sur $]1, +\infty[$, avec $f_a'(x) = \frac{1}{x} + a$.
Ainsi, $f_a'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > -a \Leftrightarrow x < \frac{-1}{a}$.
Comme précédemment, il faut encore se poser la question de savoir à quelle condition $\frac{-1}{a}$ est dans $]1, +\infty[$.
C'est le cas si et seulement si $-a < 1 \Leftrightarrow a > -1$.
• Donc si $a \leqslant -1$, alors f_a' est strictement négative sur $]1, +\infty[$, de sorte que f_a y est strictement décroissante, avec $f_a(1) = 0$.
Donc pour tout $x > 1$, $f_a(x) > f_a(1) = 0$.
Et en particulier, (E_a) ne possède pas de solution sur $]1, +\infty[$, et donc possède 1 comme unique solution.

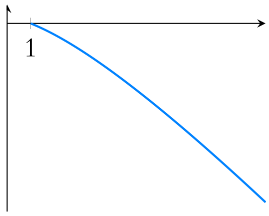

FIGURE 0.4– La fonction f_a si $a \leqslant -1$.

• Enfin, si $a \in]-1, 0[$, alors le tableau de variations de f_a sur $[1, +\infty[$ est le suivant

x	1		$\frac{-1}{a}$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	$f_a\left(\frac{-1}{a}\right)$	$\searrow$	

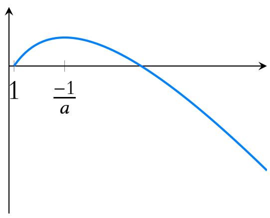

FIGURE 0.5– La fonction f_a si $a \in]-1, 0[$.

Comme précédemment, puisque f_a est strictement croissante sur $\left[1, \frac{-1}{a}\right]$, alors $f_a\left(-\frac{1}{a}\right) > 0$.

Et pour $x > 1$, $f_a(x) = \ln(x) + a(x-1) = x\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x} + a - \frac{a}{x}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Rappel

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Puisque f_a est continue, strictement décroissante sur $\left[\frac{-1}{a}, +\infty\right[$ et que 0 est compris entre $f_a\left(-\frac{1}{a}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$, par le théorème de la bijection, il existe une unique solution de $f_a(x) = 0$ dans $\left[\frac{-1}{a}, +\infty\right[$.

Comme il n'y a pas de solutions dans $\left]1, \frac{-1}{a}\right[$, ni dans $]0, 1[$, l'équation (E_a) possède deux solutions.

Détails

Le tableau de variations suffit à se convaincre qu'il n'y a pas de solution dans $\left]1, \frac{1}{a}\right[$, mais pour être rigoureux il faut faire appel à un argument de stricte monotonie comme dans le cas $a > 1$.

En résumé, $\boxed{(E_a) \text{ possède deux solutions lorsque } a \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[\text{, et une seule[5] sinon.}}$

[5] Qui vaut 1.