Devoir surveillé 2

Exercice 1 : logique et ensembles

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Traduire les propositions suivantes par une phrase en français, écrire leur négation, et déterminer si elles sont vraies ou fausses (en prouvant ce que vous affirmez).
   a. $\forall x \in \mathbf{R}, (x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbf{R}, xy = 1))$
   b. $\forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, (n < m) \wedge (m = 2p)$.
2. Soient P, Q, R trois propositions logiques. Montrer que
   a. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est équivalente à $(P \wedge Q) \Rightarrow R$
   b. $(P \Rightarrow Q)$ **et** $(Q \Rightarrow R)$ **et** $(R \Rightarrow P)$ est équivalente à $(P \Leftrightarrow Q)$ **et** $(Q \Leftrightarrow R)$.
3. Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E. On suppose qu'il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\begin{cases} A \cap X \subset B \cap X \\ A \cup X \subset B \cup X \end{cases}$.

   Montrer que $A \subset B$.

Exercice 2 : convergence d'une suite de $\mathscr{P}(E)$

Soit E un ensemble non vide, et soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de parties de E (autrement dit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on se donne un ensemble $X_n \in \mathscr{P}(E)$).
On pose alors

$$\liminf(X_n) = \bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k\right) \quad \text{et} \quad \limsup(X_n) = \bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k\right).$$

1. On suppose **dans cette question uniquement** que $E = \mathbf{R}$. Dans chacun des cas suivants, pour $n \in \mathbf{N}$, déterminer les ensembles $\bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k$ et $\bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k$. Puis en déduire $\limsup(X_n)$ et $\liminf(X_n)$.
   a. $X_n = [\![0, n]\!]$
   b. $X_n = [n, +\infty[$
   c. $X_n = \left\{\frac{p}{n+1}, p \in \mathbf{N}\right\}$
2. Pour $x \in E$, écrire avec des quantificateurs $x \in \liminf(X_n)$ et $x \in \limsup(X_n)$.
   Décrire par une phrase en français les ensembles $\limsup(X_n)$ et $\liminf(X_n)$.
3. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} X_n \subset \liminf(X_n) \subset \limsup(X_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} X_n$.

On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de parties de E est convergente si $\liminf(X_n) = \limsup(X_n)$.

4. Donner un exemple de suite de parties de E convergente et un exemple de suite (de parties de E) non convergente.
5. La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $X_n = [n, 2n]$ est-elle convergente ?
6. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $Y_n = \overline{X_n} = E \setminus X_n$ converge également. Quelle est sa limite ?

Exercice 3 : limite d'une somme

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$.

1. Prouver que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}(2t) = \operatorname{ch}^2(t) + \operatorname{sh}^2(t)$ et que $\operatorname{sh}(2t) = 2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)$.
2. En déduire une expression de $\operatorname{th}(2t)$ uniquement en fonction de $\operatorname{th}(t)$.

3. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{th}(t)}{t}$.
4. En utilisant la question 2, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,
$$\ln\left(1+\mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right).$$
5. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n(x) = \ln\left(2^n \mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln(\mathrm{th}(x))$.
6. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ fixé. En utilisant les questions 5 et 3, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

Problème : autour des coefficients binomiaux

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Partie I. Somme des coefficients successifs d'une colonne du triangle de Pascal

1. Redémontrer que pour $(k,n) \in \mathbf{N}^2$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et pour tout $i \geqslant k$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{i} \binom{j}{k} = \binom{i+1}{k+1}$.

   Indication : faire apparaître une somme télescopique.
3. Montrer qu'il existe trois entiers a, b et c tels que pour tout $j \in \mathbf{N}$, $j^3 = a\binom{j}{3} + b\binom{j}{2} + c\binom{j}{1}$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, une formule donnant la somme des n premiers cubes d'entiers non nuls en fonction de n.

Partie II. Formule de Vandermonde et application

5. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété suivante :
$$\mathscr{P}(n) : \forall (m,p) \in \mathbf{N}^2,\ \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$
6. En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
7. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.

   En utilisant le changement d'indice $j = n-k$, déterminer une relation entre S_n et T_n, puis la valeur de T_n.

Partie III. Formule d'inversion de Pascal

On considère dans cette partie une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ fixée, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

Le but de cette partie est de donner une expression de u_n en fonction des a_k.

8. Montrer que
$$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ \forall p \in \mathbf{N}, k \leqslant p \leqslant n \Rightarrow \binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}.$$
9. Montrer que si k et n sont deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$, alors
$$\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n+1-k}{j} = (-1)^{n-k}.$$
10. Soit $n \in \mathbf{N}$. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des u_k, $0 \leqslant k \leqslant n$.

11. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.

Cette formule est connue sous le nom de formule d'inversion de Pascal.

12. **Une application** : on considère la suite $(d_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$d_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}.$$

   a. Écrire une fonction Python `d(n)` qui prend comme paramètre un entier n et renvoie la valeur de d_n.

   b. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

   c. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N},\ d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 2

EXERCICE 1 : LOGIQUE ET ENSEMBLES

1.a. En français, cela donne «tout réel non nul possède un inverse[1]».
Ceci est évidemment vrai : soit $x \in \mathbf{R}^*$, alors $y = \dfrac{1}{x}$ vérifie $xy = 1$.
La négation de cette proposition (négation qui est donc fausse) est

$$\exists x \in \mathbf{R},\ x \neq 0 \textbf{ et } \forall y \in \mathbf{R},\ xy \neq 1.$$

[1] $xy = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$, donc y doit être l'inverse de x.

Rappel
La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

1.b. Notons que pour $m \in \mathbf{N}$ fixé, $\exists p \in \mathbf{N},\ m = 2p$ signifie que m est pair.
Donc la proposition donnée se traduit en français par «pour tout entier naturel n, il existe un entier pair strictement plus grand que n».
Ceci est vrai, en voici une preuve : soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $m = 2n + 2$ est pair[2] et strictement plus grand que n.
Ceci prouve donc que $\exists m \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, (n < m) \wedge (m = 2p)$, et donc cette propriété st vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, de sorte que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N},\ \exists p \in \mathbf{N},\ (n < m) \wedge (n = 2p).$$

La négation de cette proposition (qui est donc fausse) est

$$\exists n \in \mathbf{N},\ \forall m \in \mathbf{N},\ \forall p \in \mathbf{N}, (n \geqslant m) \vee (n \neq 2p).$$

[2] Car égal à $2(n+1)$.

2.a. Il serait possible de dresser des tables de vérité, mais nous connaissons suffisamment de logique pour nous en passer :

$$\begin{aligned} P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) &\equiv (\neg P) \vee (Q \Rightarrow R) \\ &\equiv (\neg P) \vee (\neg Q \vee R) \\ &\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \\ &\equiv \neg (P \wedge Q) \vee R \\ &\equiv \boxed{(P \wedge Q) \Rightarrow R.} \end{aligned}$$

Rappel
Le point clé ici est que $P \Rightarrow Q$ est équivalente à (**non** P) **ou** Q.

2.b. Là encore, essayons de nous passer de tables de vérité. Ce n'est pas vraiment plus rapide, et sûrement pas plus facile qu'une table de vérité, mais il s'agit surtout vous convaincre qu'on **peut** se passer d'une telle table.

$$\begin{aligned} (P \Rightarrow Q) \textbf{ et } (Q \Rightarrow R) \textbf{ et } (R \Rightarrow P) &\equiv (\textbf{non } P \textbf{ ou } Q) \textbf{ et } (\textbf{non } Q \textbf{ ou } R) \textbf{ et } (\textbf{non } R \textbf{ ou } P) \\ &\equiv ((\textbf{non } P \textbf{ et non } Q) \textbf{ ou } (\textbf{non } P \textbf{ et } R) \textbf{ ou } \underbrace{(Q \textbf{ et non } Q)}_{\textbf{Faux}} \textbf{ ou } (Q \textbf{ et } R)) \textbf{ et } (\textbf{non } R \textbf{ ou } P) \\ &\equiv (\textbf{non } P \textbf{ et non } Q \textbf{ et non } R) \textbf{ ou } (Q \textbf{ et } R \textbf{ et } P) \end{aligned}$$

Détails
Nous avons (délibérément) omis toutes les propositions qui contenaient P **et non** P ou R **et non** R, qui sont systématiquement fausses.

D'autre part, commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} P \Leftrightarrow Q &\equiv (P \Rightarrow Q) \textbf{ et } (Q \Rightarrow P) \\ &\equiv (\textbf{non } P \textbf{ ou } Q) \textbf{ et } (\textbf{non } Q \textbf{ ou } P) \\ &\equiv \underbrace{(\textbf{non } P \textbf{ et } P)}_{\textbf{Faux}} \textbf{ ou } (\textbf{non } P \textbf{ et non } Q) \textbf{ ou } \underbrace{(Q \textbf{ et non } Q)}_{\textbf{Faux}} \textbf{ ou } (Q \textbf{ et } P) \\ &\equiv (P \textbf{ et } Q) \textbf{ ou } (\textbf{non } P \textbf{ et non } Q). \end{aligned}$$

Ceci n'a rien de surprenant puisque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si P et Q ont même valeur de vérité. Il vient alors

$$\begin{aligned} (P \Leftrightarrow Q) \textbf{ et } (Q \Leftrightarrow R) &\equiv ((P \textbf{ et } Q) \textbf{ ou } (\textbf{non } P \textbf{ et non } Q)) \textbf{ et } ((Q \textbf{ et } R) \textbf{ ou } (\textbf{non } Q \textbf{ et non } R)) \\ &\equiv (P \textbf{ et } Q \textbf{ et } R) \textbf{ ou } \underbrace{(P \textbf{ et } Q \textbf{ et non } Q \textbf{ et non } R)}_{\textbf{Faux}} \\ &\quad \textbf{ou } \underbrace{(\textbf{non } P \textbf{ et non } Q \textbf{ et } Q \textbf{ et } R)}_{\textbf{Faux}} \textbf{ ou } (\textbf{non } P \textbf{ et non } Q \textbf{ et non } R) \\ &\equiv (P \textbf{ et } Q \textbf{ et } R) \textbf{ ou } (\textbf{non } P \textbf{ et non } Q \textbf{ et non } R) \\ &\equiv (P \Rightarrow Q) \textbf{ et } (Q \Rightarrow R) \textbf{ et } (R \Rightarrow P). \end{aligned}$$

3. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup X$, et donc $x \in B \cup X$.
Ainsi, soit $x \in B$, soit $x \in X$.
Dans le cas où $x \in X$, puisqu'on sait déjà que $x \in A$, il vient donc $x \in A \cap X$, et par conséquent $x \in B \cap X$. Et en particulier, $x \in B$.
Ainsi, dans tous les cas, $x \in B$.
Donc nous venons de prouver que $x \in A \Rightarrow x \in B$, et donc $\boxed{A \subset B.}$

> **Méthode**
> Pour prouver que $A \subset B$, il faut prouver que tout élément de A est dans B.
> Donc la rédaction **doit** commencer par «Soit $x \in A$», pour arriver à la conclusion que «alors $x \in B$».

EXERCICE 2 : CONVERGENCE D'UNE SUITE DE $\mathscr{P}(E)$

1.a. Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque $[\![0,n]\!] \subset [\![0,k]\!]$, pour tout $k \geqslant n$, on a $[\![0,n]\!] \subset \bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k$.

Et d'autre part, puisque $\bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k \subset X_n = [\![0,n]\!]$, on a donc $\bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k = X_n = [\![0,n]\!]$.

Et donc $\liminf(X_n) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n = \boxed{\mathbf{N}.}$

D'autre part, on a $\bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k = \mathbf{N}$, et donc $\limsup(X_n) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} X_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathbf{N} = \boxed{\mathbf{N}.}$

1.b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque $X_k \subset X_n$ si $k \geqslant n$, alors $\bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k = X_n$.

Et donc $\limsup(X_n) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} X_n = \emptyset$.

En effet, pour $x \in \mathbf{R}$, il existe un entier p tel que $p > x$, de sorte que $x \notin [p, +\infty[$ et donc $x \notin \bigcap_{n=0}^{+\infty} X_n$.

De même, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k = \emptyset$ et donc $\boxed{\liminf(X_n) = \emptyset.}$

1.c. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors il est évident[3] que $\mathbf{N} \subset X_k$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, et donc que $\mathbf{N} \subset \bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k$.

Prouvons qu'il s'agit en fait d'une égalité : $\bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k = \mathbf{N}$.

Soit $x \in \bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k$. Alors en particulier, $x \in X_n$ et $x \in X_{n+1}$.
Donc il existe deux entiers p et q tels que $x = \dfrac{p}{n+1} = \dfrac{q}{n+2}$. Si $p = 0$, alors $x = 0 \in \mathbf{N}$.
Supposons donc que $p \neq 0$ et donc $q \neq 0$.
Alors $(n+2)p = (n+1)q \Leftrightarrow p = (n+1)(q-p)$ et donc $x = q - p \in \mathbf{N}$.
Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k = \mathbf{N}$ et donc $\boxed{\liminf X_n = \mathbf{N}.}$

Remarque : nous venons de prouver qu'un rationnel qui peut s'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est n, mais aussi sous forme d'une fraction dont le dénominateur est n + 1 est nécessairement entier.
Vous vous en convaincrez aisément en cherchant par exemple les fractions qui s'écrivent à la fois avec 2 et avec 3 comme dénominateur, ou avec 5 et avec 6.

> **Alternative**
> Ceux qui connaissent un peu d'arithmétique pouvaient éventuellement trouver une solution utilisant le théorème de Gauss, en remarquant que $n+1$ et $n+2$ sont premiers entre eux.

D'autre part, pour $n \in \mathbf{N}$ fixé, $\bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k$ est l'ensemble des rationnels positifs qui peuvent s'écrire avec un dénominateur supérieur ou égal à $n+1$.
Mais c'est $\mathbf{Q}_+$ tout entier. En effet, soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}_+$, et soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $kq - 1 \geqslant n$. Alors $r = \dfrac{pk}{qk} \in X_{qk-1} \subset \bigcup_{j=n}^{+\infty} X_j$.

[3] Car $p = \dfrac{p(k+1)}{k+1}$.

Donc $\limsup(X_n) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathbf{Q}_+ = \boxed{\mathbf{Q}_+.}$

2. Soit $x \in E$. Alors

$$x \in \liminf(X_n) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N},\ x \in \bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N},\ \forall k \geqslant n, x \in X_k.$$

Autrement dit, $\liminf(X_n)$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans tous les X_k à partir d'un certain rang.
De même, on a

$$x \in \limsup(X_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ x \in \bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}, \exists k \geqslant n, x \in X_k.$$

Et donc $\limsup(X_n)$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans une infinité de X_k.

Détails
Un élément x qui ne serait que dans un nombre fini des X_n ne peut pas être dans $\limsup(X_n)$ puis si N est le plus grand entier tel que $x \in X_N$, alors $x \notin \bigcup_{k \geqslant N+1} X_k$.
Et en revanche, si un élément est dans une infinité de X_n, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe bien un $k \geqslant n$ tel que $x \in X_k$.

3. Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} X_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \in \bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k$ puisque $\bigcap_{k=0}^{+\infty} X_k \subset \bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k$.
Et donc $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k = \liminf(X_n)$.
Par conséquent, on a bien $\boxed{\bigcap_{n \in \mathbf{N}} X_n \subset \liminf(X_n).}$

À présent, soit $x \in \liminf(X_n)$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$, $x \in \bigcup_{k=n_0}^{+\infty} X_k$.
Soit encore : il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geqslant n_0$, $x \in X_k$.
Donc pour $n \in \mathbf{N}$, $x \in \bigcup_{k \geqslant n} X_k$.
Et donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{k \geqslant n} X_k = \limsup(X_n)$.
Ceci prouve donc que $\boxed{\liminf(X_n) \subset \limsup(X_n).}$

Détails
Si $j \geqslant \max(n, n_0)$ alors

$$x \in X_j \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k.$$

Remarque
Notons que ceci est évident si on a bien compris les caractérisations de lim sup / lim inf données question 2.
En effet, si x est dans tous les X_k à partir d'un certain rang, alors en particulier, il est dans une infinité de X_k.

Enfin, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} X_k$ et donc $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} X_k$.
Et donc $\limsup(X_n) \subset \bigcup_{k \in \mathbf{N}} X_k$.
Au final, nous avons donc bien prouvé que $\boxed{\bigcap_{n \in \mathbf{N}} X_n \subset \liminf(X_n) \subset \limsup(X_n) \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n.}$

4. La suite de la question 1.a est convergente, alors que celle de la question 1.c ne l'est pas.

5. Il n'existe aucun élément de $\mathbf{R}$ qui appartienne à une infinité de X_n, de sorte que $\limsup(X_n) = \emptyset$.
Plus précisément, soit $x \in \mathbf{R}$, et soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $x < p$.
Alors $x \notin \bigcup_{k=p}^{+\infty} X_k$ et donc $x \notin \limsup(X_n)$. Donc $\limsup(X_n)$ ne contient aucun réel, donc est vide.
En utilisant les inclusions de la question 3, on a immédiatement[4] $\liminf(X_n) = \emptyset$.
Et donc la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et sa limite est $\emptyset$.

[4] La seule partie de l'ensemble vide est l'ensemble vide.

6. Supposons donc (X_n) convergente. Alors, on a

$$\limsup(Y_n) = \limsup(\overline{X_n}) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} \overline{X_k} \right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{\bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k} = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} X_k} = \overline{\liminf(X_n)}.$$

Et de même,

$$\liminf(Y_n) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{X_k} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k} = \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} X_k} = \overline{\limsup(X_n)}.$$

Donc si on suppose (X_n) convergente, on a $\liminf(X_n) = \limsup(X_n)$ et donc en passant au complémentaire, $\limsup(Y_n) = \liminf(Y_n)$.
On en déduit que (Y_n) est convergente, et que sa limite est le complémentaire de celle de (X_n).

EXERCICE 3 : LIMITE D'UNE SOMME

1. Soit $t \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2(t) + \operatorname{sh}^2(t) &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t} + e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2e^{2t} + 2e^{-2t}\right) = \boxed{\operatorname{ch}(2t).}\end{aligned}$$

Et de même, en utilisant une identité remarquable,

$$2\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)\left(e^t - e^{-t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) = \boxed{\operatorname{sh}(2t).}$$

Rédaction Pour prouver un résultat pour tout t dans $\mathbf{R}$, la rédaction doit **impérativement** commencer par prendre un tel t, donc par «soit $t \in \mathbf{R}$.

2. Il vient donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\operatorname{th}(2t) = \frac{\operatorname{sh}(2t)}{\operatorname{ch}(2t)} = \frac{2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^2(t) + \operatorname{sh}^2(t)} = \frac{2\operatorname{th}(t)\operatorname{ch}^2(t)}{\operatorname{ch}^2(t)\left(1 + \frac{\operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}\right)} = \boxed{\frac{2\operatorname{th}(t)}{1 + \operatorname{th}^2(t)}}.$$

3. Puisque $\operatorname{th}(0) = 0$, on a donc, pour $t \neq 0$, $\dfrac{\operatorname{th}(t)}{t} = \dfrac{\operatorname{th}(t) - \operatorname{th}(0)}{t - 0}$.
Or, nous savons que th est dérivable en 0 et que $\operatorname{th}'(0) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(0)} = 1$. Et donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{th}(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{th}(t) - \operatorname{th}(0)}{t - 0} = \operatorname{th}'(0) = \boxed{1.}$$

Détails C'est la **définition** du nombre dérivé.

4. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $k \in \mathbf{N}^*$. Alors d'après la question 2,

$$\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) = \operatorname{th}\left(2\frac{x}{2^k}\right) = \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)}.$$

Et donc en passant au logarithme[5],

$$\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right) = \ln\left(\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)}\right) = \ln(2) + \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right).$$

[5] Ce qui est légitime puisque la fonction th est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$.

On en déduit alors aisément la relation demandée.

5. Sommons les relations obtenues à la question précédente pour k allant de 1 à n. Alors

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(2) + \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)\right] \\ &= n\ln(2) + \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)\right] \\ &= \ln(2^n) + \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}(x)\right) \\ &= \boxed{\ln\left(2^n\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln(\operatorname{th}(x)).}\end{aligned}$$

Somme télescopique.

6. Lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais alors, par la question 3, on a $\dfrac{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Et donc en multipliant par x, $2^n\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\frac{1}{x}2^n\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Par composition de limites[6], on en déduit que $\ln\left(2^n\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x)$.
Et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \ln(x) - \ln(\operatorname{th}(x))}$.

[6] Ce qui n'est pas tout à fait trivial et nécessite de savoir que le ln est continu, laissons ça de côté pour l'instant, nous en reparlerons prochainement.

PROBLÈME

Partie I. Somme des coefficients successifs d'une colonne du triangle de Pascal

1. Soit $(k,n) \in \mathbf{N}^2$. Si $k > n$, alors les trois coefficients sont nuls. Si $k = n$, alors $\binom{n}{k} = 1 = \binom{n+1}{k+1}$ et $\binom{n}{k+1} = 0$, donc la formule est vérifiée. Enfin, si $k \leqslant n$, c'est un simple calcul :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \boxed{\binom{n+1}{k+1}}.$$

2. On a, pour $i \geqslant k$, $\binom{j}{k}+\binom{j}{k+1} = \binom{j+1}{k+1}$ et donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{i}\binom{j}{k} &= \sum_{j=k}^{i}\left(\binom{j+1}{k+1}-\binom{j}{k+1}\right)\\ &= \sum_{j=k}^{i}\binom{j+1}{k+1}-\sum_{j=k}^{i}\binom{j}{k+1}\\ &= \sum_{p=k+1}^{i+1}\binom{p}{k+1}-\sum_{j=k}^{i}\binom{j}{k+1}\\ &= \binom{i+1}{k+1}-\underbrace{\binom{k}{k+1}}_{=0} = \boxed{\binom{i+1}{k+1}}.\end{aligned}$$

Méthode
Si à ce stade vous avez déjà reconnu une somme télescopique et savez la simplifier sans erreur, ce qui suit est inutile, et vous pouvez directement passer au résultat.

Chgt d'indice
Dans la première somme, on a posé $p = j+1$.

3. Pour $j \in \mathbf{N}$, et pour a, b, c trois entiers, on a

$$\begin{aligned}a\binom{j}{3}+b\binom{j}{2}+c\binom{j}{1} &= a\frac{j(j-1)(j-2)}{6}+b\frac{j(j-1)}{2}+cj = \frac{j}{6}\left((j-1)(aj-2a+3b)+6c\right)\\ &= \frac{j}{6}\left(aj^2+3(b-a)j+2a-3b+6c\right) = \frac{aj^3+3(b-a)j^2+(2a-3b+6c)j}{6}\end{aligned}$$

Pour que cette quantité soit égale à $j^3 = \frac{6j^3}{6}$ pour tout j, il suffit d'avoir

$$\begin{cases}a=6\\3(b-a)=0\\2a-3b+6c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=6\\b=6\\c=1\end{cases}$$

Donc pour tout $j \in \mathbf{N}$, $\boxed{j^3 = 6\binom{j}{3}+6\binom{j}{2}+\binom{j}{1}}$.

4. D'après ce qui précède, on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} j^3 &= 6\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{3}+6\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{2}+\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{1}\\ &= 6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}+(n+1)n(n-1)+\frac{(n+1)n}{2}\\ &= (n+1)n\frac{(n-1)(n-2)+4(n-1)+2}{4}\end{aligned}$$

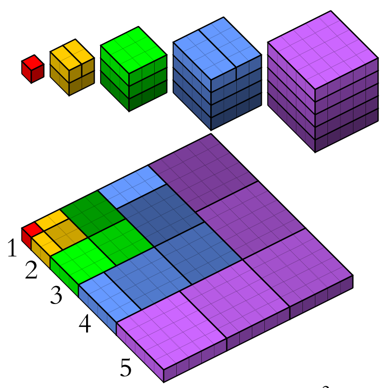

FIGURE 0.1– $\sum k^3 = \left(\sum k\right)^2$

$$= (n+1)n\frac{n^2+n}{4} = \boxed{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.}$$

Partie II. Formule de Vandermonde et application

5. Pour $n = 0$, et pour tous entiers naturel m et p, on a

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{0}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{0}{0}\binom{m}{p-0} = \binom{m}{p} = \binom{m+0}{p}.$$

Rappel
Si $k > 0$, $\binom{0}{k} = 0$.

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soient m, p deux entiers naturels. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+1}{k}\binom{m}{p-k} &= \binom{m}{p} + \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)\binom{m}{p-k}\\ &= \binom{m}{p} + \sum_{k=1}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k} + \sum_{k=1}^{p}\binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k}\\ &= \binom{m+n}{p} + \sum_{k=1}^{p}\binom{n}{k-1}\binom{m}{p-k}\\ &= \binom{m+n}{p} + \sum_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}\binom{m}{p-1-j}\\ &= \binom{m+n}{p} + \binom{m+n}{p-1}\\ &= \binom{m+n+1}{p}.\end{aligned}$$

On isole le terme $k = 0$.

Détails
Nous avons utilisé l'hypothèse de récurrence pour la première somme, le coefficient $\binom{m}{p}$ étant le terme correspondant à $k = 0$.

Chgt d'indice
$j = k - 1 \Leftrightarrow k = j + 1$.

Hypothèse de récurrence.

Formule de Pascal.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est encore vraie.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\mathscr{P}(n) \text{ est vraie, quel que soit } n \in \mathbf{N}.}$

6. En particulier, pour $m = n$ et $p = n$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n} = \boxed{\binom{2n}{n}.}$$

7. Utilisons le changement d'indice indiqué :

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{j=0}^{n}(n-j)\binom{n}{n-j}^2 = \sum_{j=0}^{n}(n-j)\binom{n}{j}^2\,{}^{7}\\ &= n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2 - \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}^2\\ &= nS_n - T_n.\end{aligned}$$

[7] Symétrie des coefficients binomiaux.

On en déduit donc que $2T_n = nS_n \Leftrightarrow T_n = \frac{nS_n}{2} = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.

Notons que ceci se simplifie encore un peu en notant que $n\binom{2n}{n} = 2n\binom{2n-1}{n-1}$ et donc $S_n = n\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n-1}{n}$.

Rappel
On a toujours
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
Cette formule est au minimum à savoir retrouver avec des factorielles.

Partie III. Formule d'inversion de Pascal

8. Soient k, n, p trois entiers vérifiant $k \leqslant p \leqslant n$. Alors

$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}\,\frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!(p-k)!k!}.$$

D'autre part,

$$\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\,\frac{(n+1-k)!}{(p-k)!(n+1-k-(p-k))!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!(p-k)!k!} = \binom{n+1}{p}\binom{p}{k}.$$

9. Soient k, n deux entiers tels que $k \leqslant n$. Par la formule du binôme de Newton, on a

$$0 = (1-1)^{n+1-k} = (1+(-1))^{n+1-k} = \sum_{j=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{j} (-1)^j 1^{n+1-k-j} = \sum_{j=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{j} (-1)^j.$$

Séparons alors le dernier terme du reste de la somme :

$$\sum_{j=0}^{n+1-k} \binom{n+1-k}{j} (-1)^j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+1-k}{j} (-1)^j + \underbrace{\binom{n+1-k}{n+1-k}}_{=1} (-1)^{n+1-k} = 0.$$

Soit encore $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+1-k}{j} (-1)^j = -(-1)^{n+1-k} = (-1)^{n+2-k} = \boxed{(-1)^{n-k}.}$

10. Puisque $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u_k$, en séparant le dernier terme des précédents,

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} u_k + \binom{n+1}{n+1} u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} u_k + u_{n+1}.$$

Et donc $\boxed{u_{n+1} = a_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} u_k.}$

11. Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n) : u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a $a_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} u_k = \binom{0}{0} u_0 = u_0$.

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} \binom{0}{k} a_k = (-1)^{0-0} \binom{0}{0} a_0 = a_0$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} u_k \\
&= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{k-j} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{k-j} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} a_j \sum_{k=j}^{n} \binom{n+1-j}{k-j} (-1)^{k-j} \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} a_j \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1-j}{i} (-1)^{i} \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} a_j (-1)^{n-j} \\
&= (-1)^{n+1-(n+1)} \binom{n+1}{n+1} a_{n+1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} a_j
\end{aligned}$$

Rec. forte
À chaque étape, nous avons besoin de supposer connue l'expression de **tous** les u_k, $k \leqslant n$, d'où la nécessité d'une récurrence forte.

C'est la formule de la question 8, qui s'applique car

$$j \leqslant j \leqslant n.$$

Interversion de sommes.

Chgt d'indice
On a posé $i = k - j$.
Alors si $j \leqslant k \leqslant n$, il vient

$$0 \leqslant i \leqslant n - j.$$

Question 9.

On a «rentré» le -1 dans la somme, ce qui augment d'une unité la puissance de -1.

$$= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} a_j.$$

Et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence forte, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et donc que

$$\boxed{u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k.}$$

12. Une application

12.a. Il s'agit de calculer successivement les valeurs de d_n :

```python
def d(n) :
        u = 1
        for i in range(1,n+1) :
                u = i*u + (-1)**i
        return u
```

12.b. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n) : n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a $0! = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} d_k = d_0 = 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$. Alors

$$\begin{aligned}
(n+1)! = (n+1)n! = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k
&= \sum_{k=0}^{n} (n+1) \binom{n}{k} d_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (k+1) d_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \left(d_{k+1} + (-1)^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} d_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (-1)^k \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} d_i + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} d_i - \underbrace{\cancel{d_0}}_{=1} - \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^i + \cancel{1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} d_i - (1-1)^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} d_i.
\end{aligned}$$

Rappel

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Chgt d'indice

On a posé $i = k+1$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.}$

12.c. Appliquons la formule d'inversion de Pascal, où $u_k = d_k$ et $a_n = n!$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $d_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$.

Un changement d'indice $i = n-k$ nous permet alors de conclure que $\boxed{d_n = n! \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.}$

Bornes

Si k varie de 0 à n, alors $n-k$ varie encore de 0 à n.