Devoir surveillé 3

► *Les calculatrices sont* ***interdites****.*
► *La qualité d'une copie ne tient pas uniquement aux calculs et aux résultats qui s'y trouvent. Vous apporterez donc un soin particulier à la présentation, à la lisibilité et à l'orthographe de vos copies.* ***La qualité de la rédaction, la clarté et la finesse des raisonnements*** *sont des éléments susceptibles d'influencer la note finale.*
► *Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous la signalerez sur votre copie, et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiative que vous seriez amené à prendre.*

Problème 1 : autour des sommes d'arctangentes

Partie I. La formule de Machin

1. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, donner une expression de $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
   En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis justifier que $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$.
2. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$.
3. En déduire que

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Cette formule est connue sous le nom de formule de Machin (du nom de John Machin, 1680–1751).
Dans la suite du problème, on appellera **formule de type Machin** toute formule de la forme

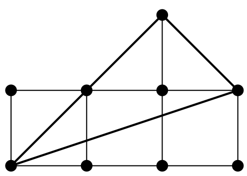
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{i=1}^{m} a_i \operatorname{Arctan}\frac{1}{b_i}$$

où $m \in \mathbf{N}^*$, $a_1, \dots, a_m$ sont dans $\mathbf{Z}$ et $b_1, \dots, b_m$ sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.

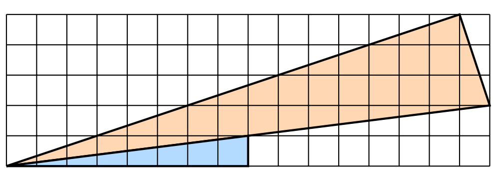
Partie II. D'autres formules du type Machin.

4. a. En utilisant uniquement des arguments géométriques, prouver à l'aide de la figure ci-contre que

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}.$$



   b. De même, utiliser la figure ci-dessous pour prouver que $\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.



   En déduire une nouvelle formule de type Machin.

5. a. Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on pose $\alpha = \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$. Exprimer la forme exponentielle du complexe $z = x + i$ à l'aide de α.
   b. Prouver que pour $m \in \mathbf{N}^*$ et $(x, y) \in (\mathbf{R}^*)^2$, on a

$$m\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{y} \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\pi] \Leftrightarrow (x+i)^m(y+i)e^{-i\frac{\pi}{4}} \in \mathbf{R}.$$

c. Utiliser le résultat précédent pour prouver que

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7}. \qquad (\star)$$

d. En utilisant la question 5.b, donner une autre preuve de la formule de Machin.

6. **a.** Soient p, q, r trois réels positifs vérifiant $p \neq 0$ et $1 + p^2 = qr$. Prouver que :

$$\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{p} = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{p+q} + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{p+r}.$$

Cette formule est connue sous le nom de formule de Dodgson, mais aussi sous le nom de formule de Lewis Caroll, le révérend Dodgson (1831–1898) étant davantage passé à la postérité en tant qu'auteur de Alice's Adventures in Wonderland.

b. En partant de la formule $(\star)$ et en utilisant la formule de Dodgson, prouver les deux formules du type Machin suivantes :

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{3} + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{7} + 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{8}.$$

Partie III. La formule de Gregory et le calcul effectif d'arctangentes

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$.

7. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+t^2} = S_n'(t) + (-1)^{n+1}\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

8. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $\mathrm{Arctan}\,x = S_n(x) + (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

9. **a.** En remarquant que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$, prouver que pour tout $x \in [0,1]$,

i. pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_{2n+1}(x) \leqslant \mathrm{Arctan}(x) \leqslant S_{2n}(x)$

ii. pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|\mathrm{Arctan}(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$.

b. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ **fixé**, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \mathrm{Arctan}(x)$. *(Formule de Gregory).*

10. Soit $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{b_i}$ une formule de type Machin, avec $2 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_m$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose alors $v_n = 4\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i S_n\left(\frac{1}{b_i}\right)$.

Justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \pi$, et justifier que si on souhaite une convergence rapide, il faut privilégier les formules avec b_1 le plus grand possible.

11. Utiliser ce qui précède pour écrire une fonction Python `Machin` qui prend comme paramètres deux listes $A = [a_1, \ldots, a_m]$ et $B = [b_1, \ldots, b_m]$ et un entier $p \geqslant 1$ où

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{i=1}^{m} a_i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{b_i} \quad \text{avec } 2 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_n$$

est une formule de type Machin et qui retourne une approximation de π à 10^{-p} près.
On interdit toute utilisation du module `math` *et en particulier de* `math.pi` *et* `math.atan`.

La formule de Machin, combinée à la formule de Gregory a longtemps constitué le moyen le plus efficace de calculer des décimales de π.
Le mathématicien amateur Williams Shanks (1812–1882) y a consacré 15 ans de sa vie et a obtenu les 707 premières décimales de π (dont seulement 527 étaient correctes), ce qui a constitué un record jusqu'en 1946.

Problème 2 : birapport et inversions circulaires

Dans tout le problème, on considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et on confond un point du plan avec son affixe.
On ne fait donc aucune distinction entre une transformation du plan et la fonction de $\mathbf{C}$ dans lui-même qui lui est associée.
On note $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$, qu'on identifie donc au cercle trigonométrique.

Préliminaire : autour des similitudes directes

1. Soit $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe avec $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$. Prouver qu'il existe une unique similitude directe $f^\star : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, que l'on exprimera en fonction de a et b, telle que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f^\star(f(z)) = z$.
2. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\omega \in \mathbf{C}$ et de rayon $R > 0$.
   Prouver que l'application $\sigma_{\mathscr{C}} : z \mapsto \dfrac{1}{R}(z - \omega)$ est telle que $\forall z \in \mathbf{C},\ z \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \sigma_{\mathscr{C}}(z) \in \mathbf{U}$.
   Caractériser géométriquement la transformation $\sigma_{\mathscr{C}}$.

Partie I : cocyclicité

Des points du plan sont dits **cocycliques** s'ils sont situés sur un même cercle.

3. Montrer que deux points distincts sont toujours cocycliques.
4. Prouver que trois points A, B, C deux à deux distincts et alignés ne sont pas cocycliques.
5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient a, b deux complexes avec $b \neq 0$. Montrer que les solutions de l'équation $(z + a)^n = b$ sont cocycliques.
6. Soient a, b, c trois complexes deux à deux distincts. On suppose que a, b et c ne sont pas alignés, et le but de cette question est de prouver qu'alors ils sont cocycliques.
   a. Soient u, v, w, u', v', w' des complexes tels que $u'v - uv' \neq 0$.
   Montrer alors que le système linéaire $\begin{cases} ux + vy = w \\ u'x + v'y = w' \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{C}^2$ possède pour solution le couple $\left(\dfrac{wv' - vw'}{uv' - u'v}, \dfrac{uw' - wu'}{uv' - u'v}\right)$.
   b. Pour $z \in \mathbf{C}$, écrire la proposition «z est équidistant de a, b et c» sous forme d'un système linéaire de deux équations d'inconnues z et $\overline{z}$.
   c. Conclure.

Partie II : birapport de quatre points

Si a, b, c, d sont quatre complexes deux à deux distincts, on appelle **birapport de** a, b, c, d et on note $[a, b, c, d]$ le complexe défini par

$$[a, b, c, d] = \frac{(c - a)(d - b)}{(d - a)(c - b)}.$$

On dit qu'une fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ préserve le birapport si pour tout quadruplet (a, b, c, d) de complexes deux à deux distincts, $f(a), f(b), f(c)$ et $f(d)$ sont deux à deux distincts et que

$$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d].$$

7. Soient a, b, c, d quatre points distincts avec a, b, c alignés. Prouver que a, b, c, d sont alignés si et seulement si $[a, b, c, d] \in \mathbf{R}$.
8. Démontrer qu'une similitude directe $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \lambda z + \mu \end{array}\right.$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ préserve le birapport.
9. Dans cette question, on considère trois réels α, β, γ et un complexe $z \in \mathbf{C}$. On suppose que les points $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}$ et z sont deux à deux distincts.

a. Montrer l'égalité : $\mathrm{Im}\left([e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z]\right) = \dfrac{\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}} \times \dfrac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2}$.

b. En déduire que $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z] \in \mathbf{R}$ si et seulement si $z \in \mathbf{U}$.

10. Soient a, b, c, d quatre complexes deux à deux distincts, avec a, b, c non alignés. En utilisant les questions précédentes, et notamment les questions 2, 8 et 9, prouver que a, b, c et d sont cocycliques si et seulement si $[a, b, c, d] \in \mathbf{R}$.

11. Prouver que quatre complexes distincts a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si $[a, b, c, d] \in \mathbf{R}$.

Partie III : inversions circulaires

Soit $\mathscr{C}$ un cercle, de centre Ω (d'affixe ω) et de rayon R.

On appelle inversion de cercle $\mathscr{C}$ l'application $f_{\mathscr{C}}$ qui à tout point M distinct de Ω, associe le point M' tel que Ω, M et M' soient alignés et $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = R^2$.

12. Dans cette question, et uniquement dans cette question, on suppose que $\mathscr{C} = \mathbf{U}$, le cercle trigonométrique.

a. Montrer que si $M \neq O$ est le point d'affixe $re^{i\theta}$, alors l'affixe de $M' = f_{\mathscr{C}}(M)$ est $\dfrac{1}{r}e^{i\theta}$.
En déduire que pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, $f_{\mathbf{U}}(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

b. Montrer que $f_{\mathbf{U}}$ est involutive, c'est-à-dire que $\forall z \in \mathbf{C}^*$, $(f_{\mathbf{U}} \circ f_{\mathbf{U}})(z) = z$.

c. Quel est l'ensemble des points fixes de $f_{\mathbf{U}}$?

d. Prouver que si a, b, c, d sont quatre complexes non nuls distincts, alors leurs images par $f_{\mathbf{U}}$ sont encore distinctes, et donner une relation liant $[f_{\mathbf{U}}(a), f_{\mathbf{U}}(b), f_{\mathbf{U}}(c), f_{\mathbf{U}}(d)]$ et $[a, b, c, d]$.

13. On revient, dans cette question et les suivantes, au cas général, et $\mathscr{C}$ désigne un cercle quelconque du plan, de centre ω et de rayon R.

a. Montrer que $\sigma_{\mathscr{C}}^{\star} \circ f_{\mathbf{U}} \circ \sigma_{\mathscr{C}} = f_{\mathscr{C}}$, où $\sigma_{\mathscr{C}}$ est la similitude directe définie à la question 2.
En déduire, pour $z \neq \omega$, l'expression de $f_{\mathscr{C}}(z)$ en fonction de z.

b. Prouver que $f_{\mathscr{C}}$ est involutive, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{\omega\}$, $(f_{\mathscr{C}} \circ f_{\mathscr{C}})(z) = z$.
Quels sont les points fixes de $f_{\mathscr{C}}$?

14. À l'aide des questions 11,12.d et 13, prouver que l'image par $f_{\mathscr{C}}$ d'une droite ou d'un cercle ne passant pas par Ω est une droite ou un cercle ne passant pas par Ω.
Question subsidiaire : en utilisant éventuellement des arguments géométriques, prouver que l'image d'une droite ou d'un cercle ne passant pas par Ω est toujours un cercle.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 3

PROBLÈME 1

Partie I. La formule de Machin

1. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. On a alors $\tan(2x) = \tan(x+x) = \frac{\tan x + \tan x}{1-\tan^2 x} = \boxed{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$.
En particulier, pour $x = \frac{\pi}{8}$, il vient $\tan(2x) = \tan\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.
Soit encore $1 - \tan^2\frac{\pi}{8} = 2\tan\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1 = 0$.
Mais le polynôme $t^2 + 2t - 1$, qui a pour discriminant 8 possède pour racines $\sqrt{2}-1$ et $-1-\sqrt{2}$.
Puisque $\tan\frac{\pi}{8} \geqslant 0$, on en déduit que $\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1.}$
Ensuite, comme $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et puisque $-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{8}$ sont dans le même intervalle, il vient
$$-\frac{\pi}{8} \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \leqslant \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \leqslant \tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right) \leqslant \tan\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \leqslant \frac{1}{5} \leqslant \sqrt{2}-1.$$
Il est évident que $\frac{1}{5} \geqslant 1-\sqrt{2}$ il reste donc à vérifier la seconde inégalité. Mais
$$\frac{1}{5} \leqslant \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \frac{6}{5} \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{36}{25} \leqslant 2$$
ce qui est vrai. Et donc on en déduit que $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$.

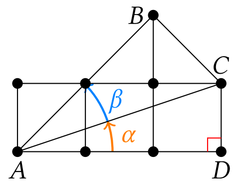
2. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$, en appliquant deux fois la formule de la question précédente, il vient
$$\tan(4x) = \tan(2(2x)) = \frac{2\tan(2x)}{1-\tan^2(2x)} = \frac{\frac{4\tan(x)}{1-\tan^2 x}}{1 - \frac{4\tan^2 x}{(1-\tan^2 x)^2}}$$
$$= \frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}\frac{(1-\tan^2 x)^2}{(1-\tan^2 x)^2 - 4\tan^2 x} = \boxed{\frac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}}.$$

3. En appliquant ce qui précède à $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$, il vient donc
$$\tan\left(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right) = \frac{4\times\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)}{1-6\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^4} = \frac{4}{5}\frac{24}{25}\frac{1}{\frac{5^4-6\times 25+1}{5^4}} = \frac{20\times 24}{476} = \frac{20}{119}.$$
Et alors il vient
$$\tan\left(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}\right) = \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\frac{1}{239}} = \frac{\frac{120\times 239-119}{119\times 239}}{\frac{119\times 239+120}{119\times 239}} = \frac{120\times 239-120+1}{119\times 239+119+1}$$
$$= \frac{120\times 238+1}{119\times 240+1} = \frac{120\times 2\times 119+1}{119\times 2\times 120+1} = 1.$$
Puisque $0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \leqslant \frac{\pi}{8}$ et que $0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}$, on en déduit que
$$-\frac{\pi}{2} < 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}.$$
Et donc
$$\tan\left(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}\right) = 1 \Leftrightarrow \boxed{4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}.}$$

Remarque
Nous avons bien prouvé à la question 1 que $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$ est dans $\left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$.

⚠ Attention !
Ne pas affirmer trop vite que $\tan(\alpha) = X \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{Arctan}(x)$, ceci n'est vrai que pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
C'est bien ce que nous venons de vérifier.

Partie II. D'autres formules du type Machin

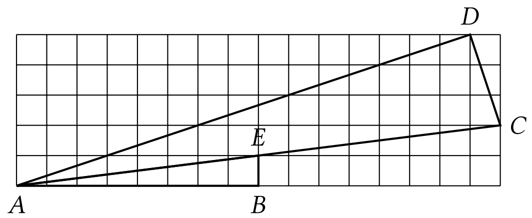


4.a. Nommons les points de la figure : $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(3,1)$ et $D(3,0)$.
Posons alors $\alpha = \widehat{DAC}$ et $\beta = \widehat{CAB}$.
Alors ADC est clairement rectangle en D de sorte que $\tan\alpha = \tan\widehat{DAC} = \dfrac{DC}{DA} = \dfrac{1}{3}$.
Puisque $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, on a donc $\alpha = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3}$.
De même, ACB est rectangle en B et donc $\tan\beta = \tan\widehat{CAB} = \dfrac{CB}{AB} = \dfrac{1}{2}$, de sorte que $\beta = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2}$.
Enfin, on a clairement[1] $\widehat{DAB} = \dfrac{\pi}{4}$. Puisque $\widehat{DAB} = \alpha + \beta$, on a donc bien prouvé que

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}.}$$

[1] Diagonale d'un carré.

4.b. Sur le même principe, nommons les points comme sur la figure ci-dessous.
Alors ABE est rectangle en B, et ACD l'est en D.



L'angle $\widehat{BAD}$ est le même[2] que l'angle α de la question précédente, donc vaut $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3}$.
D'autre part, $\tan\widehat{BAE} = \dfrac{1}{8}$, donc $\widehat{BAE} = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{8}$.
Et on constate aisément qu'on peut reporter 5 fois la longueur CD dans le segment AD, et donc $\tan\widehat{CAD} = \dfrac{1}{5}$, donc $\widehat{CAD} = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5}$.
Il vient donc $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3} = \widehat{BAD} = \widehat{BAE} + \widehat{EAD} = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{8}$.
On en déduit que $\boxed{\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{8}}$, qui est bien une formule du type Machin à trois termes.

[2] C'est la même pente.

5.a. On a $|z| = \sqrt{1+x^2}$. Et donc si $\theta \in]-\pi,\pi]$ désigne l'argument principal de z, on a donc

$$z = \sqrt{1+x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + i\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \sqrt{1+x^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

Et en particulier, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{x}$.
Si $x > 0$, alors $\operatorname{Re}(z) > 0$, de sorte que $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et donc $\theta = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} = \alpha$. La forme exponentielle de z est donc $z = \sqrt{1+x^2}e^{i\alpha}$.
En revanche, si $x < 0$, alors $\operatorname{Re}(z) < 0$ et $\operatorname{Im}(z) > 0$, de sorte que $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$. Donc $\theta - \pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, avec $\tan(\theta-\pi) = \tan\theta = \dfrac{1}{x}$.
Donc $\theta - \pi = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}$, et donc $\theta = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} + \pi = \alpha + \pi$.
Dans ce cas, la forme exponentielle de z est $z = \sqrt{1+x^2}e^{i(\alpha+\pi)}$.

5.b. Soient $x, y \in \mathbf{R}^*$ et $m \in \mathbf{N}^*$. En utilisant deux fois la question précédente, nous savons que $\arg(x+i) \equiv \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}\ [\pi]$ et $\arg(y+i) \equiv \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{y}\ [\pi]$.
Et donc $\arg\left[(x+i)^m\right] \equiv m\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}\ [\pi]$.

Par conséquent, $\arg\left[(x+i)^m(y+i)e^{-i\frac{\pi}{4}}\right] \equiv m\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{y} - \frac{\pi}{4}\quad[\pi]$.
Or, un complexe est réel si et seulement si ses arguments sont nuls modulo π.
Ainsi, on a bien

$$(x+i)^m(y+i)e^{-i\frac{\pi}{4}} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow m\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{y}-\frac{\pi}{4} \equiv 0 \quad [\pi] \Leftrightarrow \boxed{m\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{y} \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\pi].}$$

Plus précisément
Son argument est nul modulo 2π si c'est un réel positif et congru à π modulo 2π si c'est un réel négatif.

5.c. On a

$$(2+i)^2(-7+i)e^{-i\frac{\pi}{4}} = (3+4i)(-7+i)\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-25-25i)(1-i) = \frac{25\sqrt{2}}{2}(1-i)(1+i) = \frac{25\sqrt{2}}{2}|1+i|^2 \in \mathbf{R}.$$

Et donc on en déduit par la question précédente que $2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \equiv \frac{\pi}{4}\quad[\pi]$.
Puisque $0 \leqslant 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \leqslant 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} \leqslant 2\operatorname{Arctan}1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a bien

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}.}$$

5.d. Sur le même principe, on a

$$\begin{aligned}(5+i)^4(-239+i)e^{-i\frac{\pi}{4}} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(5^4+4\times 5^3 i - 6\times 5^2 - 4\times 5i + 1)(-239+i)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(625+500i-150-20i+1)(-239+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(476+480i)(-239+i)\\ &= \sqrt{2}(238+240i)(-239+i)(1-i) = \sqrt{2}(238+240i)(240i-238) = -\sqrt{2}(238+240i)\overline{(238+240i)}\\ &= -\sqrt{2}|238+240i|^2 \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Binôme de Newton.

On en déduit que $4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} \equiv \frac{\pi}{4}\quad[\pi]$.
Mais, comme à la question 3, $0 \leqslant 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.}$

6.a. On a

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{p+r}\right) = \frac{\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+r}}{1-\frac{1}{p+q}\frac{1}{p+r}} = \frac{2p+r+q}{(p+q)(p+r)-1} = \frac{2p+r+q}{p^2+p(q+r)+qr-1} = \frac{2p+r+q}{p^2+p(q+r)+p^2} = \frac{1}{p}.$$

Or, $\operatorname{Arctan}\frac{1}{p+q}$ et $\operatorname{Arctan}\frac{1}{p+r}$ sont tous deux dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puisque $p+q$ et $p+r$ sont positifs.
Donc $\operatorname{Arctan}\frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{p+q} \in [0, \pi[$.
S'il était dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, sa tangente serait négative, ce qui n'est pas le cas[3].
Donc $\operatorname{Arctan}\frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{p+r} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Et par conséquent,

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{p} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{p+r}.}$$

[3] Puisqu'elle vaut $\frac{1}{p}$.

Remarque
Sa tangente étant bien définie (nous l'avons calculée plus haut), on ne peut avoir

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{p+r}$$

qui vaut $\frac{\pi}{2}$.

6.b. Prenons $p=2$, de sorte que $1+2^2 = 5 = 5\times 1$.
Alors en appliquant la formule de Dogdson, il vient

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2+1} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{2+5} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}.$$

En réinjectant dans la formule ($\star$), on a donc

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}.$$

De même, en prenant $p = 3$, on a $1 + p^2 = 10 = 2 \times 5$ et donc

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{3+2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3+5} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}.$$

Et donc en réinjectant dans la formule précédemment obtenue,

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} + 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}.}$$

La formule de Gregory et le calcul effectif d'arctangentes.

7. Commençons par noter que S_n est dérivable, et que pour $t \in [0, 1]$,

$$S_n'(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}.$$

Détails

Il s'agit de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-t^2 \neq 1$.

Soit encore

$$S_n'(t) = \frac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{1+t^2} = S_n'(t) + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.}$$

8. Soit $x \in [0, 1]$. Intégrons la relation précédente entre 0 et x :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x S_n'(t)\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt = [S_n(t)]_0^x + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} = S_n(x) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Or, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^x = \operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(0) = \operatorname{Arctan}(x)$.

Et donc on a bien prouvé que

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x) = S_n(x) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.}$$

9.a. Soit $x \in [0, 1]$, et soit $n \in \mathbf{N}$.

9.a.i. Puisque pour tout $t \in [0, x]$, $\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$ et donc

$$\operatorname{Arctan}(x) - S_{2n+1}(x) = (-1)^{2n+2}\int_0^x \frac{t^{4n+4}}{1+t^2}\,dt \geqslant 0.$$

Par conséquent, $S_{2n+1}(x) \leqslant \operatorname{Arctan}(x)$.

De même, $S_{2n}(x) - \operatorname{Arctan}(x) = (-1)^{2n+1}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{4n+2}}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$. Et donc $\operatorname{Arctan}(x) \leqslant S_{2n}(x)$.

9.a.ii. Puisque $|\operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)| = \left|(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right|$, et que cette dernière intégrale est clairement positive, il vient

$$|\operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)| = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^x t^{2n+2}\,dt \leqslant \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^x \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

9.b. À x fixé, on a donc $0 \leqslant |\operatorname{Arctan} x - S_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$.

Et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} |\operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) - S_n(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \operatorname{Arctan}(x).}$$

Remarque

Cette formule est également valable pour $x = 1$, donc nous donne un moyen d'approximer $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}(1)$. Malheureusement, $S_n(1)$ tend beaucoup trop lentement vers $\frac{\pi}{4}$ pour que cette formule soit exploitable. Par exemple, pour avoir les 8 premières décimales de π, il faut n autour de 25 millions.

10. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, par la question précédente, $S_n\left(\dfrac{1}{b_i}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{b_i}$.

Et donc par somme de limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{m} a_i S_n\left(\frac{1}{b_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i \operatorname{Arctan} b_i = \frac{\pi}{4}$.

Et donc après multiplication par 4, $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi.}$

En particulier, en utilisant 9.a, il vient

$$|v_n - \pi| \leqslant 4\sum_{i=1}^m |a_i| \left|S_n\left(\frac{1}{b_i}\right)\right| \leqslant 4\sum_{i=1}^m |a_i| \frac{1}{b_i^{2n+3}(2n+3)} \leqslant \frac{1}{b_1^{2n+3}(2n+3)}\sum_{i=1}^m |a_i|.$$

Et donc plus b_1 est grand, plus $\dfrac{1}{b_1^{2n+3}(2n+3)}$ tend rapidement vers 0, permettant de garantir que $|v_n - \pi|$ tend rapidement vers 0.

Remarque *: nous avons ici une majoration de l'erreur, autrement dit une minoration de la vitesse de convergence : v_n tend vers π au moins aussi rapidement que $\dfrac{1}{b_1^{2n+3}(2n+3)}$ tend vers 0.*

Rien ne permet d'exclure que même avec b_1 «petit», v_n tend déjà rapidement vers 0, mais si c'est le cas, nos calculs ne nous permettent pas de l'affirmer.

11. L'idée est de calculer v_n, pour n suffisamment grand pour que $|v_n - \pi| \leqslant 10^{-p}$.

Pour cela, notons que $|v_n - \pi| = \left|\sum_{i=1}^m 4a_i\left(S_n\left(\frac{1}{b_i}\right) - \operatorname{Arctan}\frac{1}{b_i}\right)\right|$.

Par l'inégalité triangulaire, on a donc

$$\begin{aligned}|v_n - \pi| &\leqslant \sum_{i=1}^m |4a_i| \left|\operatorname{Arctan}\frac{1}{b_i} - S_n\left(\frac{1}{b_i}\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^m |4a_i| \left|\frac{1}{(2n+3)b_i^{2n+3}}\right|.\end{aligned}$$

Puisque les b_i sont dans l'ordre croissant, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\left|\dfrac{1}{(2n+3)b_i^{2n+3}}\right| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)b_1^{2n+3}}$.

Notons alors $K = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |4ai|$, de sorte que $|v_n - \pi| \leqslant K\sum_{i=1}^m \dfrac{1}{(2n+3)b_i^{2n+3}} \leqslant Km\dfrac{1}{(2n+3)b_1^{2n+3}}$.

Et donc, pour avoir $|v_n - \pi| \leqslant 10^{-p}$, il suffit d'avoir

$$Km\frac{1}{(2n+3)b_1^{2n}3} \leqslant 10^{-p} \Leftrightarrow (2n+3)b_1^{2n+3} \geqslant Km10^p.$$

Une boucle **while** peut nous aider à trouver un tel n.

```
def S(x,n) : #une fonction pour calculer S_n(x)
        s = 0
        for i in range(n+1) :
                s += (-1)**i*x**(2*i+1)/(2*i+1)
        return(s)

def Machin(A,B,p) :
        m = len(A)
        K = abs(A[1])
        for l in A :
                if abs(l)>K :
                        K = abs(l)
        K = 4*K
        n = 0
        while (2*n+3)*B[0]**(2*n+3)<K*m*10**p :
                n+=1
        approx = 0
        for i in range(m) :
                approx += 4*A[i]*S(1/B[i],n)
        return(approx)
```

Un essai rapide avec la formule de Machin, et un appel à `Machin([4,-1],[5,239],10)` nous)renvoie `3.141592653623555` qui est bien une approximation de π à 10^{-10} près.

Vérification
On peut comparer le résultat précédent à `math.pi`

PROBLÈME 2 : BIRAPPORT ET INVERSIONS CIRCULAIRES.

Préliminaire : autour des similitudes directes

1. Procédons par analyse-synthèse, et supposons que qu'il existe une similitude directe $f^\star$, de la forme $z \mapsto cz + d$ telle que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f^\star(f(z)) = z$.
Alors pour tout $z \in \mathbf{C}$, $c(az+b)+d = z \Leftrightarrow (ac-1)z + cb + d = 0$.
En particulier, pour $z = 0$, il vient $d = -cb$. Et pour $z = 1$, il vient $ac - 1 = 0 \Leftrightarrow ac = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{a}$, et donc $d = -\frac{b}{a}$.
Ainsi, si une telle similitude existe, c'est nécessairement $z \mapsto \frac{1}{a}(z-b)$.

Inversement[4], si on définit $f^\star : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{a}(z-b) \end{array} \right.$, alors pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$f^\star(f(z)) = \frac{1}{a}(f(z)-b) = \frac{1}{a}az = z.$$

Et donc il existe bien une unique similitude directe $f^\star$, qui est $z \mapsto \frac{1}{a}(z-b)$ telle que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f^\star(f(z)) = z$.

[4] C'est la synthèse.

2. Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors

$$z \in \mathscr{C} \Leftrightarrow |z-\omega| = R \Leftrightarrow \left|\frac{1}{R}(z-\omega)\right| = 1 \Leftrightarrow |\sigma_{\mathscr{C}}(z)| = 1 \Leftrightarrow \sigma_{\mathscr{C}}(z) \in \mathbf{U}.$$

Si $R \neq 1$, alors $\sigma_{\mathscr{C}}$ est une homothétie de rapport $\frac{1}{R}$ et son centre en est son unique point fixe, d'affixe $\frac{\omega}{R-1}$.
Et si $R = 1$, alors $\sigma_{\mathscr{C}}$ est la translation de vecteur $-\omega$, c'est-à-dire celle qui envoie ω sur 0.

Remarque

Il serait facile de vérifier que $\sigma_{\mathscr{C}}$ est l'unique homothétie de rapport positif qui envoie $\mathscr{C}$ sur $\mathbf{U}$. C'est également l'unique homothétie de rapport $\frac{1}{R}$ qui envoie ω (centre de $\mathscr{C}$) sur 0 (centre de $\mathbf{U}$).

Partie I : cocyclicité.

3. Deux points distincts A et B sont toujours situés sur le cercle de diamètre $[AB]$, c'est-à-dire celui dont le centre est le milieu de $[AB]$ et le rayon est $\frac{AB}{2}$.
4. Si A, B et C sont alignés, alors ils sont situés sur une même droite $\mathscr{D}$. Et ne peuvent donc pas être situés sur un même cercle, puisque l'intersection d'une droite et d'un cercle contient au maximum deux points.
C'est «évident», néanmoins, donnons-en une preuve si vous avez besoin d'être convaincus.
Notons $ax+by = c$ une équation de $\mathscr{D}$. Soit alors $\mathscr{C}$ un cercle, d'équation $(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2 = r^2$.
Alors $(x,y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ si et seulement si $\begin{cases} ax+by = c \\ (x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 = r^2 \end{cases}$

▸ Si $b \neq 0$, c'est-à-dire si $\mathscr{D}$ n'est pas une droite verticale on a $y = \frac{c-ax}{b}$, et donc en réinjectant dans la seconde équation, il vient

$$(x-\lambda)^2 + \left(\frac{c-ax}{b} - \mu\right)^2 = r^2$$

qui est un équation polynomiale de degré 2 en x. Elle possède donc au plus deux solutions, donc au plus deux abscisses peuvent convenir, et à chaque abscisse x correspond une unique ordonnée $y = \frac{c-ax}{b}$, de sorte qu'il y a au plus deux solutions.

▸ Si $b = 0$, alors $x = \frac{c}{a}$, et donc la seconde équation est

$$\left(\frac{c}{a} - \lambda\right)^2 + (y-\mu)^2 = r^2$$

qu est une équation de degré 2 en y et possède au plus deux solutions, de sorte qu'il y a au plus deux points dans $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$.

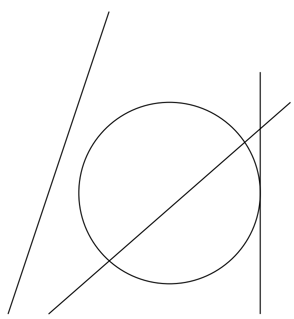


FIGURE 0.1– Une droite rencontre un cercle en au plus deux points.

5. Soit z une solution de $(z+a)^n = b$. Alors $|z-(-a)|^n = |b| \Leftrightarrow |z-(-a)| = |b|^{1/n}$.
Et donc z est sur le cercle de centre $-a$ et de rayon $|b|^{1/n}$.
Ceci étant vrai pour toutes les solutions[5] de $(z+a)^n = b$, $\boxed{\text{elles sont cocycliques.}}$

[5] Qui rappelons-le, sont au nombre de n.

6.a. Il suffit tout simplement de remplacer :

$$u\frac{wv'-vw'}{uv'-u'v}+v\frac{uw'-wu'}{uv'-u'v}=\frac{uwv'-vwu'}{uv'-u'v}=w\frac{u'v-uv'}{u'v-uv'}=w.$$

Et de même,

$$u'\frac{wv'-vw'}{uv'-u'v}+v'\frac{uw'-wu'}{uv'-u'v}=\frac{v'uw'-u'vw'}{uv'-u'v}=w'\frac{u'v-uv'}{u'v-uv'}=w'.$$

Et donc $\boxed{\text{le couple annoncé est bien solution.}}$

6.b. La proposition annoncée est $|z-a|=|z-b|=|z-c|$.
Soit encore[6] $|z-a|^2=|z-b|^2=|z-c|^2$.

Ceci s'écrit encore sous forme d'un système : $\begin{cases}|z-a|^2=|z-b|^2\\ |z-b|^2=|z-c|^2\end{cases}$

Toutefois, rien n'indique qu'il s'agisse là d'un système linéaire en $z,\overline{z}$. Pour cela, rappelons-nous que $|z-a|^2=(z-a)\left(\overline{z}-\overline{a}\right)$. De sorte que notre système s'écrit encore

$$\begin{cases}(z-a)\left(\overline{z}-\overline{a}\right)=(z-b)\left(\overline{z}-\overline{b}\right)\\ (z-a)\left(\overline{z}-\overline{a}\right)=(z-c)\left(\overline{z}-\overline{c}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|z|^2-a\overline{z}-\overline{a}z+|a|^2=|z|^2-b\overline{z}-\overline{b}z+|b|^2\\ |z|^2-a\overline{z}-\overline{a}z+|a|^2=|z|^2-c\overline{z}-\overline{c}z+|c|^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-a\overline{z}-\overline{a}z+|a|^2=-b\overline{z}-\overline{b}z+|b|^2\\ -a\overline{z}-\overline{a}z+|a|^2=-c\overline{z}-\overline{c}z+|c|^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\overline{b}-\overline{a}\right)z+(b-a)\overline{z}=|b|^2-|a|^2\\ \left(\overline{c}-\overline{a}\right)z+(c-a)\overline{z}=|c|^2-|a|^2\end{cases}$$

Et il s'agit bien là, comme demandé, d'un système linéaire de deux équations en les inconnues z et $\overline{z}$.

[6] Un module est positif donc on ne change rien en élevant au carré.

6.c. Montrons que le système obtenu à la question précédente satisfait bien à la condition[7] de la question 6.a.

Plus exactement, considérons le système $(\mathscr{S})$: $\begin{cases}\left(\overline{b}-\overline{a}\right)x+(b-a)y=|b|^2-|a|^2\\ \left(\overline{c}-\overline{a}\right)x+(c-a)y=|c|^2-|a|^2\end{cases}$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbf{C}^2$. On a alors

$$\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(c-a)-\left(\overline{c}-\overline{a}\right)(b-a)=\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(c-a)-\overline{\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(c-a)}=2i\,\mathrm{Im}\left(\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(c-a)\right).$$

Cette partie imaginaire est nulle, si et seulement si $\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(c-a)$ est un réel.
Or, $\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(c-a)=|b-a|^2\dfrac{c-a}{b-a}$, qui est réel si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ l'est.
Soit si et seulement si un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ est nul modulo π.
Puisque cet argument est $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, il est nul modulo π si et seulement si A,B et C sont alignés, ce qui n'est pas le cas. Et donc le système $(\mathscr{S})$ satisfait bien à la condition de 6.a, et possède donc pour solution :

$$x=\frac{\left(|b|^2-|a|^2\right)(c-a)-(b-a)\left(|c|^2-|a|^2\right)}{\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(c-a)-\left(\overline{c}-\overline{a}\right)(b-a)}=\frac{\left(|b|^2-|a|^2\right)(c-a)-(b-a)\left(|c|^2-|a|^2\right)}{2i\,\mathrm{Im}\left(\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(c-a)\right)}$$

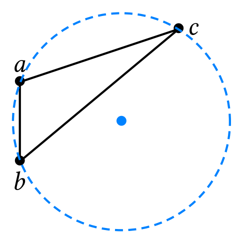
$$y=\frac{\left(\overline{b}-\overline{a}\right)\left(|c|^2-|a|^2\right)-\left(|b|^2-|a|^2\right)\left(\overline{c}-\overline{a}\right)}{2i\,\mathrm{Im}\left(\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(b-a)\right)}.$$

On a alors $\overline{y}=\dfrac{(b-a)\left(|c|^2-|a|^2\right)-\left(|b|^2-|a|^2\right)(c-a)}{-2i\,\mathrm{Im}\left(\left(\overline{b}-\overline{a}\right)(b-a)\right)}=x$.
Ainsi, le système en $(z,\overline{z})$ de la question 6.b possède une solution, et donc il existe un $z\in\mathbf{C}$ tel que $|z-a|=|z-b|=|z-c|$.
Et alors, si $\mathscr{C}$ est le cercle de centre z et de rayon $|z-a|$, alors a,b et c sont sur ce cercle, et donc sont cocycliques.

[7] Que vous avez peut-être reconnue : il s'agit de dire que le déterminant du système est non nul.

L'avez-vous reconnu ?

Le point z que nous venons de trouver n'est autre que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, cercle dont nous venons de (re)prouver l'existence.



Partie II : birapport de quatre points

7. Si a, b et c sont alignés, alors $\dfrac{c-a}{c-b}$ est un réel. Et donc $[a,b,c,d] = \dfrac{c-a}{c-b}\dfrac{d-b}{d-a}$ est réel si et seulement si $\dfrac{d-b}{d-a}$ est réel. Soit si et seulement si a, b et d sont alignés.
Puisque a, b et c sont déjà alignés, on en déduit que
$\boxed{[a,b,c,d] \in \mathbf{R} \text{ si et seulement si } a, b, c \text{ et } d \text{ sont alignés.}}$

8. Soient a, b, c, d quatre complexes deux à deux distincts, et soit $f : z \mapsto \lambda z + \mu$ une similitude directe, avec $\lambda \neq 0$. Alors on a $f(a) = f(b) \Leftrightarrow \lambda a + \mu = \lambda b + \mu \Leftrightarrow a = b$.
Donc $f(a)$ et $f(b)$ sont distincts, et on prouve sur le même principe que $f(a), f(b), f(c)$ et $f(d)$ sont deux à deux distincts. Il vient alors

$$[f(a), f(b), f(c), f(d)] = \frac{(f(c)-f(a))(f(d)-f(b))}{(f(d)-f(a))(f(c)-f(b))} = \frac{(\lambda c-\lambda a)(\lambda d-\lambda b)}{(\lambda d-\lambda a)(\lambda c-\lambda b)} = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)} = [a,b,c,d].$$

Donc $\boxed{f \text{ préserve le birapport.}}$

9.a. Par définition, $\left[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z\right] = \dfrac{\left(e^{i\gamma}-e^{i\alpha}\right)\left(z-e^{i\beta}\right)}{\left(z-e^{i\alpha}\right)\left(e^{i\gamma}-e^{i\beta}\right)}$.
Dans un premier temps, on a

$$\frac{z-e^{i\beta}}{z-e^{i\alpha}} = \frac{\left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right)}{|z-e^{i\alpha}|^2} = \frac{|z|^2 - e^{i\beta}\overline{z} - e^{-i\alpha}z + e^{i(\beta-\alpha)}}{|z-e^{i\alpha}|^2}.$$

D'autre part,

$$\frac{e^{i\gamma}-e^{i\alpha}}{e^{i\gamma}-e^{i\beta}} = \frac{e^{i(\gamma+\alpha)/2}}{e^{i(\gamma+\beta)/2}}\frac{e^{i(\gamma-\alpha)/2}-e^{i(\alpha-\gamma)/2}}{e^{i(\gamma-\beta)/2}-e^{i(\beta-\gamma)/2}} = e^{i(\alpha-\beta)/2}\frac{\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}}.$$

> **Méthode**
> Pour simplifier une somme ou une différence d'exponentielles complexes, penser à la factorisation par l'angle moitié qui permettra d'utiliser les formules d'Euler.

Et donc après multiplication, il vient

$$\left[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z\right] = \frac{\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}}\frac{1}{|z-e^{i\alpha}|^2}\left[|z|^2e^{i(\alpha-\beta)/2} + e^{i(\beta-\alpha)/2} - e^{-i(\alpha+\beta)/2}\overline{z} - e^{i(\alpha+\beta)/2}z\right].$$

Mais $e^{-i(\alpha+\beta)/2}\overline{z} + e^{i(\alpha+\beta)/2}z = e^{i(\alpha+\beta)/2}z + \overline{e^{i(\alpha+\beta)/2}z} = 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i(\alpha+\beta)/2}z\right) \in \mathbf{R}$, et donc possède une partie imaginaire nulle.
Et donc il reste

$$\mathrm{Im}\left[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z\right] = \frac{\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}}\frac{1}{|z-e^{i\alpha}|^2}\mathrm{Im}\left(e^{i(\alpha-\beta)/2}|z|^2 + e^{i(\beta-\alpha)/2}\right) = \frac{\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}}\frac{1}{|z-e^{i\alpha}|^2}\left(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}|z|^2 + \sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

Enfin, en utilisant l'imparité du sinus, on obtient finalement

$$\boxed{\mathrm{Im}\left[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z\right] = \frac{\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}} \times \frac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2}.}$$

9.b. Puisqu'un complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, on a donc

$$\left[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z\right] \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(|z|^2-1\right) = 0.$$

Puisque $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ sont distincts, $\alpha \not\equiv \beta\ [2\pi]$ et donc $\dfrac{\alpha-\beta}{2} \not\equiv 0\ [\pi]$, de sorte que $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$. Et de même, $\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2} \neq 0$.
Par conséquent, $\mathrm{Im}\left[e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, z\right] = 0 \Leftrightarrow |z|^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow \boxed{z \in \mathbf{U}.}$

10. Puisque a, b, c ne sont pas alignés, par la question 6, ils sont cocycliques. Soit donc $\mathscr{C}$ un[8] cercle auquel tous appartiennent, et soit $\sigma_{\mathscr{C}}$ la similitude directe définie à la question 2. Alors $\sigma_{\mathscr{C}}(a), \sigma_{\mathscr{C}}(b), \sigma_{\mathscr{C}}(c)$ sont dans $\mathbf{U}$: il existe trois réels α, β, γ tels que $\sigma_{\mathscr{C}}(a) = e^{i\alpha}$, $\sigma_{\mathscr{C}}(b) = e^{i\beta}$ et $\sigma_{\mathscr{C}}(c) = e^{i\gamma}$.
Puisque σ_U préserve le birapport, on a donc $[a, b, c, d] = [\sigma_{\mathscr{C}}(a), \sigma_{\mathscr{C}}(b), \sigma_{\mathscr{C}}(c), \sigma_{\mathscr{C}}(d)] = [e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, \sigma_{\mathscr{C}}(d)]$.
Par la question précédente, $[a, b, c, d] \in \mathbf{R}$ si et seulement si $\sigma_{\mathscr{C}}(d) \in \mathbf{U}$.
Mais $\sigma_{\mathscr{C}}(d) \in \mathbf{U} \Leftrightarrow d \in \mathscr{C}$, de sorte que $[a, b, c, d] \in \mathbf{R}$ si et seulement si $d \in \mathscr{C}$, soit si et seulement si $[a, b, c, d]$ sont cocycliques.

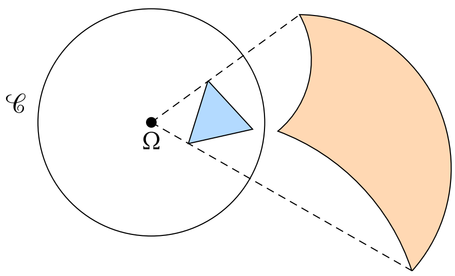
[8] Notons que nous n'avons jamais prouvé l'unicité d'un tel cercle, ce qui est pourtant le cas.

11. Si a, b, c sont alignés, alors ils ne sont pas cocycliques, et donc a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si ils sont alignés, ce qui d'après la question 7 est le cas si et seulement si $[a, b, c, d] \in \mathbf{R}$.
Si a, b, c ne sont pas alignés, alors ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si ils sont cocycliques, et donc d'après la question précédente c'est le cas si et seulement si $[a, b, c, d] \in \mathbf{R}$.
Ainsi, $\boxed{a, b, c, d \text{ sont cocycliques ou alignés si et seulement si } [a, b, c, d] \in \mathbf{R}.}$

Robin HARTSHORNE, célèbre géomètre américain écrit que bien qu'utilisant le birapport depuis de nombreuses années, il est toujours incapable d'en percevoir la signification géométrique. Il écrit même : «On peut y voir la puissance de l'algèbre, capable d'inventer cette quantité si utile mais qu'on ne peut visualiser géométriquement. Ou si on a une âme de géomètre, y voir une invention du diable et le détester toute sa vie.»

Partie III : inversions circulaires

Commençons par regarder sur un dessin à quoi correspond une inversion de cercle $\mathscr{C}$: les points à l'intérieur de $\mathscr{C}$ sont envoyés sur des points à l'extérieur et vice-versa. Et les points très proches de Ω sont envoyés très loin, alors que ceux proches du bord de $\mathscr{C}$ restent proches, la limite étant les points de $\mathscr{C}$ qui sont invariants par l'inversion.
Sur la figure ci-dessous, le triangle à l'intérieur de $\mathscr{C}$ est envoyé sur la figure à l'extérieur. On constate en particulier qu'il ne s'agit pas d'une similitude directe, car elle ne préserve par exemple pas l'alignement des points.



12.a. On a $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg \dfrac{\frac{1}{r}e^{i\theta} - 0}{re^{i\theta} - 0} = 0 \ [2\pi]$.
Donc non seulement, O, M et M' sont alignés, mais en plus $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont de même sens, de sorte que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = OM \cdot OM' = r\dfrac{1}{r} = 1$.
Et donc M' est bien l'image de M par $f_{\mathscr{C}}$.
Or, le conjugué de $re^{i\theta}$ est $re^{-i\theta}$ qui a pour inverse $\dfrac{1}{r}e^{i\theta}$, qui est l'affixe de M'.
Ainsi, pour tout $z \neq 0$, $\boxed{f_{\mathscr{C}}(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}.}$

12.b. Il suffit de faire le calcul : soit $z \in \mathbf{C}^*$. Alors

$$(f_U \circ f_U)(z) = f_U(f_U(z)) = \frac{1}{\overline{f_U(z)}} = \frac{1}{\overline{\frac{1}{\bar{z}}}} = \frac{1}{\frac{1}{z}} = \boxed{z.}$$

Remarque
Cette propriété signifie en fait que f_U est égale à sa propre bijection réciproque. Nous connaissons déjà d'autres involutions : les symétries (centrales ou axiales). En effet, appliquer deux fois de suite la même symétrie fait «revenir» un point à son point de départ.

12.c. Un complexe non nul z est un point fixe de f_U si et seulement si

$$z = f_U(z) \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}.$$

Donc $\boxed{\text{l'ensemble des points fixes de } f_U \text{ est } \mathbf{U}.}$

12.d. Il est clair que si a et b sont deux complexes distincts, alors $f_U(a) \neq f_U(b)$.
Un bon moyen de le voir[9] est d'utiliser la question 12.b : si $f_U(a) = f_U(b)$, alors $a = f_U(f_U(a)) = f_U(f_U(b)) = b$. Par contraposée : si $a \neq b$, alors $f_U(a) \neq f_U(b)$.
Et alors, si a, b, c, d sont quatre complexes deux à deux distincts, il vient

$$[f_U(a), f_U(b), f_U(c), f_U(d)] = \frac{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)} = \frac{\frac{(\overline{a}-\overline{c})(\overline{b}-\overline{d})}{abcd}}{\frac{(\overline{a}-\overline{d})(\overline{b}-\overline{c})}{abcd}} = \frac{(\overline{a}-\overline{c})\left(\overline{b}-\overline{d}\right)}{\left(\overline{a}-\overline{d}\right)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)} = \boxed{\overline{[a,b,c,d]}}.$$

[9] Si vous n'en êtes pas déjà convaincus.

13.a. Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{\omega\}$, et soit M le point d'affixe z.
Nous allons prouver que le point M' d'affixe $z' = (\sigma_{\mathscr{C}}^\star \circ f_U \circ \sigma_{\mathscr{C}})(z)$ est bien l'image de M par $f_{\mathscr{C}}$.
Par définition $\sigma_{\mathscr{C}}(z) = \dfrac{1}{R}(z-\omega)$. Donc $f_U(\sigma_{\mathscr{C}}(z)) = \dfrac{1}{\overline{\sigma_{\mathscr{C}}(z)}} = \dfrac{R}{\overline{z-\omega}}$.
D'autre part, les formules énoncées à la question 1 nous donnent, pour tout complexe x, $\sigma_{\mathscr{C}}^\star(x) = Rx + \omega$.
Et donc $z' = \dfrac{R^2}{\overline{z-\omega}} + \omega$.
Reste à vérifier qu'il s'agit bien là de l'affixe de $f_{\mathscr{C}}(M)$, donc en particulier, que Ω, M et M' sont alignés. Or,

Détails
$\sigma_{\mathscr{C}}$ est de la forme
$$z \mapsto az + b$$
avec $a = \frac{1}{R}$ et $b = \frac{-\omega}{R}$.
Et donc $\frac{1}{a} = R$ et $-\frac{b}{a} = \omega$.

$$\left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}\right) = \arg\frac{z-\omega}{z'-\omega} = \arg\frac{(z-\omega)\left(\overline{z-\omega}\right)}{R^2} = \arg\underbrace{|z-\omega|^2}_{\in\mathbf{R}_+} = 0.$$

Donc non seulement $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ sont colinéaires, mais en plus ils sont de même sens. Et par conséquent,

$$\overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{\Omega M'} = \Omega M \cdot \Omega M' = |z-\omega|\cdot|z'-\omega| = |z-\omega|\cdot\left|\frac{R^2}{\overline{z-\omega}}\right| = R^2\frac{|z-\omega|}{|\overline{z-\omega}|} = R^2.$$

Ainsi, $\boxed{M' \text{ est bien l'image de } M \text{ par l'inversion } f_{\mathscr{C}}.}$

13.b. Puisque $f_{\mathscr{C}} = \sigma_{\mathscr{C}}^\star \circ f_U \circ \sigma_{\mathscr{C}}$, on a donc

$$f_{\mathscr{C}} \circ f_{\mathscr{C}} = \sigma_{\mathscr{C}}^\star \circ f_U \circ \sigma_{\mathscr{C}} \circ \sigma_{\mathscr{C}}^\star \circ f_U \circ \sigma_{\mathscr{C}} = \sigma_{\mathscr{C}}^\star \circ f_U \circ f_U \circ \sigma_{\mathscr{C}} = \sigma_{\mathscr{C}}^\star \circ f_U \circ \sigma_{\mathscr{C}} = f_{\mathscr{C}}.$$

Donc $f_{\mathscr{C}}$ est involutive.
De plus, z est un point fixe de $f_{\mathscr{C}}$ si

$$f_{\mathscr{C}}(z) = z \Leftrightarrow \frac{R^2}{\overline{z-\omega}} + \omega = z \Leftrightarrow \frac{R^2}{\overline{z-\omega}} = z - \omega \Leftrightarrow |z-\omega|^2 = R^2.$$

Soit si et seulement si $z \in \mathscr{C}$. $\boxed{\text{Donc l'ensemble des points fixes de } f_{\mathscr{C}} \text{ est } \mathscr{C}.}$

14. Si a, b, c, d sont quatre points distincts et distincts de ω, alors

$$\begin{aligned}[f_{\mathscr{C}}(a), f_{\mathscr{C}}(b), f_{\mathscr{C}}(c), f_{\mathscr{C}}(d)] &= [\sigma_{\mathscr{C}}^\star(f_U(\sigma_{\mathscr{C}}(a))), \sigma_{\mathscr{C}}^\star(f_U(\sigma_{\mathscr{C}}(b))), \sigma_{\mathscr{C}}^\star(f_U(\sigma_{\mathscr{C}}(c))), \sigma_{\mathscr{C}}^\star(f_U(\sigma_{\mathscr{C}}(d)))] \\ &= [f_U(\sigma_{\mathscr{C}}(a)), f_U(\sigma_{\mathscr{C}}(b)), f_U(\sigma_{\mathscr{C}}(c)), f_U(\sigma_{\mathscr{C}}(d))] \\ &= \overline{[\sigma_{\mathscr{C}}(a), \sigma_{\mathscr{C}}(b), \sigma_{\mathscr{C}}(c), \sigma_{\mathscr{C}}(d)]} \\ &= \overline{[a,b,c,d]}\end{aligned}$$

Une similitude préserve le birapport.
Question 12.d
Encore une similitude.

En particulier, si a, b, c sont sur une même droite (resp. sur un même cercle) $\mathscr{D}$, alors un complexe d appartient à la droite (resp. au cercle) $\mathscr{D}$ si et seulement si $[a,b,c,d] \in \mathbf{R}$.
Soit si et seulement si $[f_{\mathscr{C}}(a), f_{\mathscr{C}}(b), f_{\mathscr{C}}(c), f_{\mathscr{C}}(d)]$ est encore réel, et donc si et seulement si $f_{\mathscr{C}}(a), f_{\mathscr{C}}(b), f_{\mathscr{C}}(c), f_{\mathscr{C}}(d)$ sont encore alignés ou cocycliques.
▸ **Si $f_{\mathscr{C}}(a), f_{\mathscr{C}}(b), f_{\mathscr{C}}(d)$ sont alignés**, alors $d \in \mathscr{D}$ si et seulement si $[f_{\mathscr{C}}(a), f_{\mathscr{C}}(b), f_{\mathscr{C}}(c), f_{\mathscr{C}}(d)] \in \mathbf{R}$, ce qui, par la question 11 est le cas si et seulement si $f_{\mathscr{C}}(a), f_{\mathscr{C}}(b), f_{\mathscr{C}}(c), f_{\mathscr{C}}(d)$ sont cocycliques ou alignés. Les trois premiers étant alignés, ils ne peuvent pas être cocycliques, donc tous sont alignés.
Et donc $d \in \mathscr{D}$ si et seulement si $f_{\mathscr{C}}(d)$ est sur la droite passant par $f_{\mathscr{C}}(a), f_{\mathscr{C}}(b)$ et $f_{\mathscr{C}}(c)$.

L'image de $\mathscr{D}$ est donc cette droite.

► **Si $f_{\mathscr{C}}(a), f_{\mathscr{C}}(b), f_{\mathscr{C}}(d)$ ne sont alignés**, on prouve de même que $d \in \mathscr{D}$ si et seulement si $f_{\mathscr{C}}(a), f_{\mathscr{C}}(b), f_{\mathscr{C}}(c), f_{\mathscr{C}}(d)$ sont cocycliques ou alignés. Mais ils ne peuvent être alignés car les trois premiers sont sur un cercle. Donc $d \in \mathscr{D}$ si et seulement si $f_{\mathscr{C}}(d)$ est sur le cercle[10] passant par $f_{\mathscr{C}}(a), f_{\mathscr{C}}(b), f_{\mathscr{C}}(c)$.
Et donc l'image de $\mathscr{D}$ par $f_{\mathscr{C}}$ est ce cercle.

[10] Dont on pourrait prouver l'unicité, ce que nous n'avons pas fait dans ce sujet...

Dans tous les cas, $\boxed{\text{l'image d'une droite ou d'un cercle est encore une droite ou un cercle.}}$

Remarquons que l'inversion $f_{\mathscr{C}}$ envoie les points intérieurs à $\mathscr{C}$ à l'extérieur de $\mathscr{C}$ et vice-versa.
Donc une droite ne rencontrant pas $\mathscr{C}$ est entièrement à l'extérieur de $\mathscr{C}$, et donc son image est entièrement à l'intérieur de $\mathscr{C}$. Cette image ne peut donc pas être une droite : c'est un cercle.
Une droite $\mathscr{D}$ qui rencontre $\mathscr{C}$ le rencontre en deux points A et B, qui sont donc des points fixes de $f_{\mathscr{C}}$. Si l'image de $\mathscr{D}$ par $f_{\mathscr{C}}$ est une droite, celle-ci passe par A et par B, donc est égale à $(AB) = \mathscr{D}$. Or le milieu de $[AB]$ est envoyé par $f_{\mathscr{C}}$ sur un point qui est encore sur la médiatrice de $[AB]$ (celle-ci passe par Ω) et qui est extérieur au cercle, donc qui n'est pas sur $\mathscr{D}$.
Enfin, une droite qui ne rencontre $\mathscr{C}$ qu'en un point est entièrement à l'extérieur[11] de $\mathscr{C}$ et donc son image est entièrement à l'intérieur de $\mathscr{C}$, ce qui est pas possible.

[11] Au sens large.

Sur le même principe, un cercle à l'extérieur de $\mathscr{C}$ ou tangent à $\mathscr{C}$ ne peut pas être envoyé sur une droite, qui serait alors entièrement à l'intérieur de $\mathscr{C}$.
Si $\mathscr{D}$ est un cercle qui intersecte $\mathscr{C}$ en deux points A et B, alors A et B sont fixes.
Supposons que l'image de $\mathscr{D}$ par $f_{\mathscr{C}}$ est une droite, c'est la droite $[AB]$. Or, la médiatrice Δ de $[AB]$, qui passe par Ω, intersecte $\mathscr{D}$ en deux points.
Or, l'image de ces deux points doit encore[12] être sur Δ car elle passe par Ω, et doit être sur (AB). Or, l'intersection de (AB) et Δ est réduite à un point, et deux points ne peuvent avoir même image de $f_{\mathscr{C}}$.
D'où une contradiction. On en déduit que l'image de $\mathscr{C}$ par $f_{\mathscr{C}}$ est un cercle.

[12] Un point, son image et Ω sont toujours alignés.

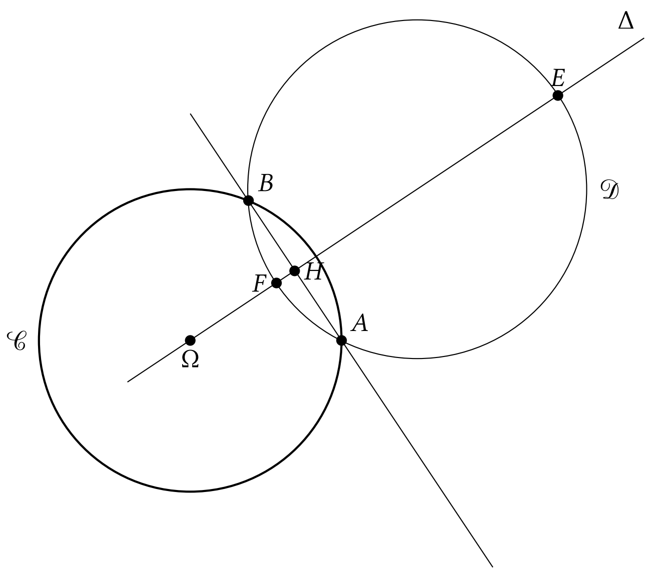


FIGURE 0.2 – Si l'image de $\mathscr{D}$ est une droite, alors les points E et F doivent être envoyés sur le même point H.