Devoir surveillé 4

Partie I. Définition de $\zeta(p)$

Dans cette partie, on considère un entier $p \geqslant 2$ fixé. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose alors $S_n(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$.

1. Étudier la monotonie de la suite $(S_n(p))_{n\geqslant 1}$.
2. a. Prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^p} \leqslant \frac{1}{k^p}$.
   b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_n(p) - 1 \leqslant \displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^p} \leqslant \frac{1}{p-1}$.
   c. Conclure alors à la convergence de la suite $(S_n(p))_{n\geqslant 1}$.

Dans toute la suite, pour p entier supérieur ou égal à 2, on note $\zeta(p) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(p)$.

Partie II. Nombres de Bernoulli

3. Soit f une fonction définie et continue sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles.
   Montrer qu'il existe une unique fonction $F : [0,\pi] \to \mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que :
$$F' = f \text{ et } \int_0^{\pi} F(t)\,dt = 0.$$
4. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on considère les fonctions $B_p : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ définies par :
$$B_0 = 1 \text{ et } \forall p \in \mathbf{N},\ B'_{p+1} = B_p \text{ et } \int_0^{\pi} B_{p+1}(t)\,dt = 0.$$
   a. Déterminer explicitement les fonctions B_1 et B_2.
   b. Montrer que pour tout $p \geqslant 2$, $B_p(0) = B_p(\pi)$.
5. a. Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(\beta_p)_{p\in\mathbf{N}}$ telle que $\beta_0 = 1$ et $\forall p \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \beta_{p-k} = 0$.
   b. Calculer $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et β_4.
6. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on définit une fonction $\widehat{B_p} : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ par :
$$\forall t \in [0,\pi],\ \widehat{B_p}(t) = \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \beta_{p-k}\pi^{p-k}t^k.$$
   a. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \widehat{B_p}(t)\,dt$ et observer que pour tout $p \geqslant 1$, $\widehat{B_p}'(t) = \widehat{B_{p-1}}(t)$.
   b. En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $B_p = \widehat{B}_p$.
   c. Que vaut $B_p(0)$?

Partie III. Calcul de $\zeta(2p)$

7. Calculer, pour $t \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$, puis déterminer une constante λ telle que
$$\forall t \in]0,\pi[,\ \frac{\sin((2n+1)t)}{2\sin t} = \sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) + \lambda.$$
8. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour toute fonction $f : [0,\pi] \to \mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin((2n+1)t)\,dt = 0.$$

9. Pour $(p,k) \in \mathbf{N}^2$, on pose $I_{p,k} = \displaystyle\int_0^{\pi} B_{2p}(t)\cos(2kt)\,dt$.

   a. À l'aide d'intégrations par parties, calculer $I_{1,k}$.

   b. Pour $p \geqslant 2$, donner une relation liant $I_{p,k}$ et $I_{p-1,k}$.

   c. En déduire l'expression de $I_{p,k}$ en fonction de p et de k.

10. Pour $p \in \mathbf{N}^*$ on définit une fonction φ_p sur $[0,\pi]$ en posant

$$\forall t \in [0,\pi],\ \varphi_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \text{ ou } t = \pi \\ \dfrac{B_{2p}(t) - B_{2p}(0)}{\sin t} & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases}$$

   Nous **admettons** que φ_p est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

   a. Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$, exprimer $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,dt$ en fonction de p, de n et de $B_{2p}(0)$.

   b. En déduire la valeur de $\zeta(2p)$ en fonction de p et de $B_{2p}(0)$.

11. Donner les valeurs de $\zeta(2)$ et de $\zeta(4)$.

12. Prouver que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\pi^{-2p}\zeta(2p) \in \mathbf{Q}$.

Partie IV. Irrationalité de $\zeta(2)$

Dans cette partie, pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $f_n : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!} \end{array}\right.$

13. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

   a. Montrer qu'il existe $(e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n}) \in \mathbf{Z}^n$ tels que $\forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e_k x^k$.

   b. Prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$, f_n est k fois dérivable et que $f_n^{(k)}(0) \in \mathbf{Z}$.

   c. En remarquant que pour tout réel x, $f_n(x) = f_n(1-x)$, prouver que $f_n^{(k)}(1)$ est également un entier relatif, pour tout entier naturel k.

On souhaite à présent prouver que π^2 est irrationnel. On raisonne par l'absurde, et on suppose dans toute la suite que $\pi^2 \in \mathbf{Q}$, autrement dit qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$. Dans toute la suite, a et b désignent deux tels entiers.

14. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose $F_n(x) = b^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x)$.

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

   b. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et x réel : $g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x)$.
   Montrer que, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et x réel : $g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$.

   c. Établir que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $A_n = \pi \displaystyle\int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\,dx \in \mathbf{Z}$.

15. On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

   a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n < \dfrac{1}{2}$.

   b. Monter que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

   c. Dresser le tableau de variations de f_n sur $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$.

   d. En déduire alors que, pour tout $n \geqslant n_0$, $A_n \in]0,1[$. En déduire que π^2 et $\zeta(2)$ sont irrationnels.

   e. Peut-on déduire de ce qui précède l'irrationalité de π ? L'irrationalité de $\zeta(4)$?

Calculs (1h)

Nom | | Note :

Vous ne ferez figurer sur votre copie que les résultats de vos calculs, dans les emplacement prévus à cet effet.
Vous veillez à simplifier autant que possible les résultats obtenus.

▸ **Question 1 :** L'ensemble des solutions de l'équation $z^2 - iz + 1 + 3i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ est :

▸ **Question 2 :** la dérivée de $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$ est :

▸ **Question 3 :** calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\operatorname{ch}(x)\,dx$.

▸ **Question 4 :** à l'aide d'un changement de variable, déterminer les primitives de la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

▸ **Question 5 :** soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner sous forme factorisée la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\frac{2k-1}{n}$.

▸ **Question 6 :** déterminer l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -2x - 3y + 3z = 2 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{C}^3$.

► **Question 7 :** déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - \ln(x)y = x^x$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

► **Question 8 :** déterminer l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ -x - y + 2z = 4 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

► **Question 9** : on considère la fraction rationnelle $R(X) = \dfrac{4X^2 - 3X + 1}{X^3 - X - 6}$.
La factorisation du dénominateur de R en produit de facteurs irréductibles est :

La décomposition en éléments simples de R est :

Une primitive de $x \mapsto R(x)$ sur $]2, +\infty[$ est :

► **Question 10** : on considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = 3e^x + 4$.
Les solutions (réelles) de l'équation homogène sont :

L'ensemble des solutions (réelles) de (E) est :

L'unique solution y de E telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est :

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 4

CALCULS

Les résultats sont livrés sans les détails, les méthodes nécessaires se trouvent dans le cours, si vous n'avez pas le même résultat que moi, keep trying ...

1. Les solutions de l'équation $z^2 - iz + 1 + 3i = 0$ sont $1 - i$ et $-1 + 2i$.

2. La dérivée de $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$ est $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}\,(2+x^2)}$.

3. Une intégration par parties nous donne $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\operatorname{ch}(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(e - 3e^{-1}\right) + 1$.

4. Le changement de variable $t = \sqrt{t}$ nous donne

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = 4\ln\left(\sqrt{x}+1\right) - 2\sqrt{x} + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Méthode
Ne pas oublier de repasser à la variable de départ (ici x) après changement de variable.

5. On a $S_n = \dfrac{(n+1)(4n-1)}{6}$.

6. L'ensemble des solutions du système est $\{(-1+3z, -z, z),\ z \in \mathbf{C}\}$.

7. Les solutions de l'équation $y' - \ln(x)y = x^x$ sont les $x \mapsto x^x + \lambda x^x e^{-x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

8. Le système possède une unique solution qui est $(1, -1, 2)$.

9. La factorisation du dénominateur en produit de facteurs irréductibles est

$$X^3 - X - 6 = (X-2)(X^2+2X+3).$$

La décomposition en éléments simples de R est

$$\frac{4X^2 - 3X + 1}{X^3 - X - 6} = \frac{1}{X-2} + \frac{3X+1}{X^2+2X+3}.$$

On en déduit qu'une primitive de R est

$$x \mapsto \ln(x-2) + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) - \sqrt{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

10. Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Une solution particulière[1] est $x \mapsto xe^x - 2$.
Et donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x} + xe^x - 2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

La solution au problème de Cauchy posé est

$$x \mapsto \frac{4}{3}e^x + xe^x + \frac{2}{3}e^{-2x} - 2.$$

[1] Obtenue par le principe de superposition.

PROBLÈME : POLYNÔMES ET NOMBRES DE BERNOULLI, $\zeta(2)$ ET IRRATIONALITÉ DE π.

Partie I. Définition de $\zeta(p)$.

1. Notons qu'on travaille bien à p fixé, et que notre suite dépend donc de n.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$S_{n+1}(p) - S_n(p) = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^p} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p} = \frac{1}{(n+1)^p} \geqslant 0.$$

On en déduit que $S_{n+1}(p) \geqslant S_n(p)$ et donc $\boxed{(S_n(p))_{n\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$

2.a. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Alors la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^p}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, de sorte que $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^p} \leqslant \dfrac{1}{t^p} \leqslant \dfrac{1}{k^p}$.
Par croissance de l'intégrale, il vient donc

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k^p}.$$

Or, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^p} = \frac{1}{(k+1)^p}\int_k^{k+1} dt = \frac{1}{(k+1)^p}$ et de même, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{k^p} = \frac{1}{k^p}$.

On a donc bien prouvé que $\boxed{\dfrac{1}{(k+1)^p} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^p} \leqslant \frac{1}{k^p}.}$

2.b. Soit $n \geqslant 2$. Sommons les inégalités précédemment obtenues pour k allant de 1 à $n-1$. Il vient donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \\
\Longleftrightarrow &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \\
\Longleftrightarrow &\sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell^p} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t^p} \leqslant S_{n-1}(p) \\
\Longleftrightarrow &S_n(p) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t^p} \leqslant S_{n-1}(p).
\end{aligned}$$

Relation de Chasles.

Chgt d'indice
$\ell = k+1$.

Or, cette dernière intégrale vaut

$$\int_1^n \frac{dt}{t^p} = \left[-\frac{1}{p-1}\frac{1}{t^{p-1}}\right]_1^n = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^p}\right) \leqslant \frac{1}{p-1}.$$

On a donc bien prouvé que $\boxed{S_{n-1}(p) \leqslant \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^p} \leqslant \frac{1}{p-1}.}$

2.c. Puisque p est fixé, l'inégalité $S_n(p) \leqslant 1 + \dfrac{1}{p-1}$ prouve que la suite $(S_n(p))_{n\geqslant 1}$ est majorée.
Et donc étant croissante, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge.}}$

Partie II. Nombres de Bernoulli.

3. Il s'agit donc de prouver qu'il existe une unique primitive de f dont l'intégrale entre 0 et π s'annule.
Nous savons, puisque f est continue, qu'elle admet au moins une primitive G.
Et alors toute primitive de f est de la forme $G + \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Montrons qu'il existe alors un unique $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^\pi (G(t)+\lambda)\,dt = 0$.
Mais on a $\displaystyle\int_0^\pi (G(t)+\lambda)\,dt = \int_0^\pi G(t)\,dt + \lambda\pi$, et donc

$$\int_0^\pi (G(t)+\lambda)\,dt = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi G(t)\,dt.$$

Ainsi, il existe bien un et un seul λ tel que $G + \lambda$ soit d'intégrale nulle entre 0 et π.
Et donc il existe une unique primitive de f d'intégrale nulle entre 0 et π.

4.a. Une primitive de B_0 est $G_0 : t \mapsto t$. Et alors, la preuve de la question précédente prouve que l'unique primitive de B_0 qui est d'intégrale nulle entre 0 et π est

$$B_1 : t \mapsto B_0(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi G_0(t)\,dt = t - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \boxed{t - \frac{\pi}{2}.}$$

De même, une primitive de B_1 est $G_1 : t \mapsto \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{\pi}{2}t$.
L'unique primitive B_2 d'intégrale nulle entre 0 et π est donc

$$B_2 : t \mapsto G_1(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi G_1(t)\,dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}t\right)dt = \boxed{\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi^2}{12}.}$$

4.b. Pour $p \geqslant 2$, on a $B_p(\pi) - B_p(0) = \displaystyle\int_0^\pi B_p'(t)\,dt = \int_0^\pi B_{p-1}(t)\,dt = 0$.

Et donc $\boxed{B_p(0) = B_p(\pi).}$.

5.a. L'idée est qu'une suite vérifiant $\forall p \geqslant 2, \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k} = 0$ vérifie

$$2\beta_1 + \beta_0 = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = -\frac{1}{2}\beta_0$$

puis

$$3\beta_2 + 3\beta_1 + \beta_0 = 0 \Leftrightarrow \beta_2 = -\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_0$$

et ainsi, de suite : la connaissance des termes précédents détermine uniquement β_k, pour tout k. Et donc en particulier, une telle suite est uniquement déterminée par son premier terme.
Plus rigoureusement, notons que pour tout $p \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\binom{p}{1}}_{=p}\beta_{p-1} + \sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k} = 0 \Leftrightarrow \beta_{p-1} = -\frac{1}{p}\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k}.$$

Alors la suite définie par $\beta_0 = 1$ et $\forall p \geqslant 1$, $\beta_p = -\dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=2}^{p+1}\binom{p+1}{k}\beta_{p+1-k}$ satisfait les conditions requises.
Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux suites (u_p) et (v_p) telles que $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall p \geqslant 2, \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}u_{p-k} = \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}v_{p-k} = 0$.
Prouvons alors par récurrence forte[2] sur n que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_p = v_p$.
Pour $p = 0$, c'est dans nos hypothèses, donc la récurrence est initialisée.
Supposons que pour tout $k \leqslant p$, $u_p = v_p$.
Alors $v_{p+1} = -\dfrac{1}{p+2}\displaystyle\sum_{k=2}^{p+2}\binom{p+2}{k}v_{p+2-k} = -\dfrac{1}{p+2}\sum_{k=2}^{p+2}\binom{p+2}{k}u_{p+2-k} = u_{p+1}$.
Et donc par le principe de récurrence forte, $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbf{N},\ u_p = v_p.}$

[2] Car à chaque étape, on va utiliser le fait que tous les termes précédents sont égaux.

5.b. On a donc $\beta_1 = -\dfrac{1}{2}\beta_0 = \boxed{-\dfrac{1}{2}.}$ Puis $\beta_2 = -\dfrac{1}{3}(3\beta_1 + \beta_0) = \boxed{\dfrac{1}{6}.}$

Donc $\beta_3 = -\dfrac{1}{4}(6\beta_2 + 4\beta_1 + \beta_0) = \boxed{0}$ et enfin $\beta_4 = -\dfrac{1}{5}(10\beta_3 + 10\beta_2 + 5\beta_1 + \beta_0) = \boxed{-\dfrac{1}{30}.}$

6.a. On a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \widehat{B_p(t)}\,dt &= \int_0^\pi \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k}\pi^{p-k}t^k\,dt = \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k}\pi^{p-k}\int_0^\pi t^k\,dt \\ &= \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\beta_{p-k}\pi^{p-k}\frac{\pi^{k+1}}{k+1} = \frac{\pi^{p+1}}{p!}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k+1}\binom{p}{k}\beta_{p-k} \\ &= \frac{\pi}{p!}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{k+1}\beta_{p-k} \\ &= \frac{\pi^{p+1}}{(p+1)!}\sum_{i=1}^{p+1}\binom{p+1}{i}\beta_{p+1-i} = \boxed{0.}\end{aligned}$$

Linéarité de l'intégrale.

Rappel
Pour $0 \leqslant k \leqslant n$,
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

D'autre part, on a alors, pour $t \in [0,\pi]$,

$$\widehat{B_p}'(t) = \frac{1}{p!}\sum_{k=1}^{p} k\binom{p}{k}\beta_{p-k}\pi^{p-k}t^{k-1} = \frac{1}{p!}\sum_{k=1}^{p} p\binom{p-1}{k-1}\beta_{p-k}\pi^{p-k}t^{k-1}$$
$$= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p-1}{j}\beta_{p-1-j}\pi^{p-1-j}t^j = \boxed{\widehat{B_{p-1}}(t).}$$

Même formule que ci-dessus.

Chgt d'indice
$j = k-1$.

6.b. Prouvons par récurrence sur p que $B_p = \widehat{B_p}$.
Pour $p = 0$, il suffit de constater que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\widehat{B_0}(t) = \frac{1}{0!}\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{0}\beta_{0-k}\pi^{0-k}t^k = 1 = B_0(t).$$

Supposons donc que $\widehat{B_p} = B_p$.
Alors $\widehat{B_{p+1}}' = \widehat{B_p} = B_p$. Donc $\widehat{B_{p+1}}$ est une primitive de B_p. Puisque de plus $\int_0^\pi \widehat{B_{p+1}}(t)\,dt = 0$, $\widehat{B_{p+1}}$ est l'unique primitive de B_p d'intégrale nulle entre 0 et π : c'est B_{p+1}.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbf{N}, \widehat{B_p} = B_p.}$

6.c. On a donc $\boxed{B_p(0) = \widehat{B_p}(0) = \frac{\pi^p}{p!}\beta_p.}$

Partie III. Calcul de $\zeta(2p)$.

7. Soit $t \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Puisque $\cos(2kt) = \mathrm{Re}\left(e^{2ikt}\right)$, on a[3]

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{2ikt}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{2ikt}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(e^{2it}\right)^k\right).$$

[3] La partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles.

Mais nous reconnaissons là les termes d'une suite géométrique de raison $e^{2it} \neq 1$ car $t \not\equiv 0$ $[\pi]$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{2it}\right)^k = e^{2it}\frac{1-e^{2int}}{1-e^{2it}} = e^{2it}\frac{e^{int}\left(e^{-int}-e^{int}\right)}{e^{it}\left(e^{-it}-e^{it}\right)} = e^{i(n+1)t}\frac{\sin(nt)}{\sin t}.$$

Et donc en prenant la partie réelle, il vient $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt) = \cos((n+1)t)\frac{\sin(nt)}{\sin t}.}$

Notons que $\cos((n+1)t)\sin(nt) = \frac{1}{2}(\sin(2n+1)t) + \sin(t))$ et donc pour $t \neq \pi$,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt) = \frac{\sin((2n+1)t)}{2\sin(t)} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt) - \frac{1}{2} = \frac{\sin((2n+1)t)}{2\sin(t)}.}$$

8. Procédons par intégration par parties, ce qui est légitime puisque f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, de même que la fonction $t \mapsto -\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)t)$. Alors

$$\int_0^\pi f(t)\sin((2n+1)t)\,dt = \left[-\frac{1}{2n+1}\cos((2n+1)t)f(t)\right]_0^\pi + \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi \cos((2n+1)t)f'(t)\,dt$$
$$= \frac{f(\pi)+f(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi \cos((2n+1)t)f'(t)\,dt.$$

Rédaction ✎
Pour appliquer la formule d'intégration par parties, il faut que les deux fonctions u et v soient $\mathscr{C}^1$. Et pas u et v'. D'où le fait que je mentionne ici le cosinus, et non le sinus qui se trouve dans l'intégrale de départ.

Détails
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $2n+1$ étant impair, $\cos((2n+1)\pi) = -1$.

Il est clair que $\frac{f(0)+f(\pi)}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Prouvons donc que $\frac{1}{2n+1}\int_0^\pi \cos((2n+1)t)f'(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a, pour tout $t \in [0,\pi]$, $|\cos((2n+1)t)f'(t)| = |\cos((2n+1)t)| \cdot |f'(t)| \leqslant |f'(t)|$.

Soit encore $-|f'(t)| \leqslant \cos((2n+1)t)f'(t) \leqslant |f'(t)|$.
Et donc par croissance de l'intégrale

$$-\frac{1}{2n+1}\int_0^\pi |f'(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi \cos((2n+1)t)f'(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi |f'(t)|\,dt.$$

Remarque
Notons que f' est continue, donc $|f'|$ l'est aussi par composition de fonction continues. Il est donc légitime de s'intéresser à son intégrale.

Mais $\int_0^\pi |f'(t)|\,dt$ est une constante, et donc les deux termes extrémaux de cette inégalité tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi \cos((2n+1)t)f'(t)\,dt = 0$.
Et donc enfin $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\pi \sin((2n+1)t)f(t)\,dt = 0.}$

9.a. Pour $k=0$, notons que $I_{1,k} = \int_0^\pi B_2(t)\,dt = 0$.
Et pour $k \in \mathbf{N}^*$, on a par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} I_{1,k} &= \int_0^\pi B_2(t)\cos(2kt)\,dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi^2}{12}\right)\cos(2kt)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\cos(2kt)\,dt - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi t\cos(2kt)\,dt + \frac{\pi^2}{12}\int_0^\pi \cos(2kt)\,dt. \end{aligned}$$

Mais $\int_0^\pi \cos(2kt)\,dt = \left[\frac{1}{2k}\sin(2kt)\right]_0^\pi = 0$. Et en procédant par intégrations par parties,

$$\int_0^\pi t\cos(2kt)\,dt = \underbrace{\left[\frac{t}{2k}\sin(2kt)\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{2k}\int_0^\pi \sin(2kt)\,dt = \frac{1}{2k}\left[\frac{1}{2k}\cos(2kt)\right]_0^\pi = 0.$$

Et de même, à l'aide de deux intégrations par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t^2\cos(2kt)\,dt &= \underbrace{\left[\frac{1}{2k}t^2\sin(2kt)\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^\pi t\sin(2kt)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{(2k)^2}t\cos(2kt)\right]_0^\pi - \frac{1}{2k^2}\underbrace{\int_0^\pi \cos(2kt)\,dt}_{=0} = \frac{\pi}{2k^2}. \end{aligned}$$

Donc au final, $\boxed{I_{1,k} = \frac{\pi}{4k^2}.}$

9.b. Procédons par intégrations par parties en nous souvenant que pour tout $p \geqslant 1$, $B_p' = B_p$.
On a alors

$$\begin{aligned} I_{p,k} &= \int_0^\pi B_{2p}(t)\cos(2kt)\,dt = \underbrace{\left[\frac{1}{2k}B_{2p}(t)\sin(2kt)\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{2k}\int_0^\pi B_{2p-1}(t)\sin(2kt)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{4k^2}B_{2p-1}(t)\cos(2kt)\right]_0^\pi - \frac{1}{4k^2}\int_0^\pi B_{2p-2}(t)\sin(2kt)\,dt \\ &= \frac{B_{2p-1}(\pi) - B_{2p-1}(0)}{4k^2} - \frac{1}{4k^2}I_{p-1,k} = \boxed{-\frac{1}{4k^2}I_{p-1,k}.} \end{aligned}$$

Détails
Le crochet est nul car $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$.

On a prouvé à la question 4.b que $B_{2p-1}(\pi) = B_{2p-1}(0)$.

9.c. On en déduit de proche en proche[4] que

$$\begin{aligned} I_{p,k} &= -\frac{1}{4k^2}I_{p-1,k} = (-1)^2\frac{1}{4k^2}\frac{1}{4k^2}I_{p-2,k} = \cdots (-1)^{p-1}\underbrace{\frac{1}{4k^2}\frac{1}{4k^2}\cdots\frac{1}{4k^2}}_{(p-1)\text{ termes}}I_{1,k} \\ &= (-1)^{p-1}\frac{1}{4^{p-1}k^{2p-2}}\frac{\pi}{4k^2} = \boxed{\frac{(-1)^{p-1}\pi}{4^pk^{2p}}.} \end{aligned}$$

[4] Souvent un bon moyen de masquer une récurrence facile...

10.a. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\int_0^\pi \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,dt = \int_0^\pi \frac{B_{2p}(t)-B_{2p}(0)}{\sin t}\sin((2n+1)t)\,dt.$$

Mais nous savons par la question 7 que pour $t \in [0,\pi]$, $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} = 2\sum_{k=1}^n \cos(2kt)+1$,

et donc

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,dt &= 2\sum_{k=1}^n \int_0^\pi (B_{2p}(t)-B_{2p}(0))\cos(2kt)\,dt + \int_0^\pi \left(B_{2p}(t)-B_{2p}(0)\right)\,dt\\ &= 2\sum_{k=1}^n \int_0^\pi B_{2p}(t)\cos(2kt)\,dt - 2B_{2p}(0)\underbrace{\int_0^\pi \cos(2kt)\,dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^\pi B_{2p}(t)\,dt}_{=0} -\pi B_{2p}(0)\\ &= 2\sum_{k=1}^n I_{p,k} - \pi B_{2p}(0) = \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{p-1}\pi}{2^{2p-1}k^{2p}} - \pi B_{2p}(0).}\end{aligned}$$

10.b. Puisque φ_p est de classe $\mathscr{C}^1$, le résultat de la question 8 s'applique : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,dt = 0$. Et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{p-1}\pi}{2^{2p-1}k^{2p}} - \pi B_{2p}(0) = 0 \Leftrightarrow \zeta(2p) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2p}} = \boxed{(-1)^{p-1}B_{2p}(0)2^{2p-1}.}$$

11. En réutilisant les valeurs de $B_p(0)$ obtenues à la question 6.c, on a donc $\zeta(2) = 2B_2(0) = \pi^2\beta_2 = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}.$ Et de même, $\zeta(4) = -B_4(0)2^3 = -\dfrac{8\pi^4\beta_4}{4!} = \boxed{\frac{\pi^4}{90}}.$

12. Plus généralement, pour $p \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\zeta(2p) = (-1)^{p-1}B_{2p}(0)2^{2p-1} = (-1)^{p-1}\frac{\pi^{2p}}{(2p)!}\beta_{2p}2^{2p-1}.$$

Mais les formules prouvées lors de la question 5.a : $\beta_p = -\dfrac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}\beta_{p+1-k}$ permettent de prouver par récurrence[5] que les β_p sont des rationnels.

Et donc que $\boxed{\pi^{-2p}\zeta(2p) = (-1)^{p-1}\frac{1}{(2p)!}\beta_{2p}2^{2p-1} \in \mathbf{Q}.}$

[5] Forte, mais facile.

Remarque

Comme de plus il est clair que $\zeta(2p) \geqslant 0$, cela prouve au passage que β_{2p} est du signe de $(-1)^{p-1}$.

Partie IV. Irrationalité de $\zeta(2)$.

13.a. Il s'agit d'utiliser la formule du binôme de Newton : pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}(1-x)^n = \frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-1)^k x^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-1)^k x^{n+k}.$$

Et alors un changement d'indice $i = n+k$ nous donne $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n}\binom{n}{i-n}(-1)^{i-n}x^i$.

Ainsi, en posant, pour $i \in [\![n, 2n]\!]$, $e_i = \binom{n}{i-n}(-1)^{i-n}$, qui est bien un entier, on a le résultat souhaité.

13.b. Par linéarité de la dérivation, il nous suffit de prouver que les $g_i : t \mapsto t^i$ sont k fois dérivables pour tout k afin d'établir que f_n est k fois dérivable.
Mais une récurrence facile prouve que pour tout entier i et tout entier k g_i est k fois dérivable et que

$$g_i^{(k)} : t \mapsto \begin{cases} i(i-1)\cdots i(i-k+1)t^{i-k} & \text{si } k \leqslant i\\ 0 & \text{si } k > i\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{i!}{(i-k)!}t^{i-k} & \text{si } k \leqslant i\\ 0 & \text{si } k > i\end{cases}$$

Donc par somme de fonctions k fois dérivables, f_n est k fois dérivable et alors :

►si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f_n^{(k)}(t) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \dfrac{i!}{(i-k)!} t^{k-i}$ de sorte que $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbf{Z}$.

►si $n \leqslant k \leqslant 2n$, alors $f_n^{(k)}(t) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=k}^{2n} e_i \dfrac{i!}{(i-k)!} t^{k-i}$ et donc $f_n^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{n!} e_k = k(k-1)\cdots(k-n+1)e_k \in \mathbf{Z}$.

►si $k > 2n$, alors $f_n^{(k)}$ est nulle, et en particulier, $f_n(k)(0) = 0$.

13.c. En dérivant la relation $f_n(x) = f_n(1-x)$, on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_n'(x) = -f_n'(1-x)$.
Puis en dérivant de nouveau, $f_n''(x) = f_n''(1-x)$, et plus généralement[6], pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x)$.
Et en particulier, pour $x = 0$, on obtient, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f_n^{(k)}(0) = (-1)^k f_n^{(k)}(1)$, de sorte que $\boxed{f_n^{(k)}(1) = (-1)^k f_n^{(k)}(0) \in \mathbf{Z}.}$

[6] Une récurrence serait sans doute une bonne idée...

14.a. On a, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} F_n(0) &= b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(0) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a^{n-k}}{b^{n-k}} f_n^{(2k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^{n-k} b^k \underbrace{f_n^{(2k)}(0)}_{\in \mathbf{Z}} \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

$\pi^{2n-2k} = (\pi^2)^{n-k}$.

On prouve de la même manière que $F_n(1)$ est entier.

14.b. Il est clair que g_n est dérivable puisque produit de fonctions dérivable, et pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$g_n'(x) = F_n''(x)\sin(\pi x) + \cancel{\pi F_n'(x)\cos(\pi x)} - \cancel{\pi F_n'(x)\cos(\pi x)} + \pi^2 F_n(x)\sin(\pi x) = \sin(\pi x)\left(F_n''(x) + \pi^2 F_n(x)\right).$$

Mais par linéarité de la dérivation, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$F_n''(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k+2)}(x) = b^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k+2)}(x).$$

En effet, f_n étant une fonction polynomiale de degré $2n$, sa dérivée $(2n+1)^{\text{ème}}$ est nulle, de même que toutes les suivantes (et en particulier f_n^{2n+2}).
Procédons alors à un changement d'indice : $i = k+1$

$$F_n''(x) = b^n \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \pi^{2n-2i+2} f_n^{(2i)}(x).$$

Et donc

$$\begin{aligned} F_n''(x) + \pi^2 F_n(x) &= b^n \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \pi^{2n-2i+2} f_n^{(2i)}(x) + \pi^2 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x) \\ &= b^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) \\ &= b^n \pi^{2n} f_n(x) + b^n \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left((-1)^{k-1} + (-1)^k\right)}_{=0} \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) \\ &= b^n \pi^{2n} f_n(x). \end{aligned}$$

On en déduit donc que $g_n'(x) = \sin(\pi x) \underbrace{b^n \pi^{2n}}_{=a^n} f_n(x)$.

14.c. Nous venons donc de prouver que $A_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 g_n'(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\left(g_n(1) - g_n(0)\right)$.
Or, $g_n(1) = \pi F_n(1)$ et $g_n(0) = -\pi F_n(0)$.
Donc $\boxed{A_n = F_n(1) + F_n(0) \in \mathbf{Z}.}$

15.a. On a $u_n = \dfrac{a}{1}\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{n-1}\dfrac{a}{n}$.
Or, pour $k \geqslant \lfloor a \rfloor + 1$, on a $\dfrac{a}{k} < 1$. Et donc pour $n \geqslant \lfloor a \rfloor + 1$, on a

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{\lfloor a \rfloor + 1}\frac{a}{\lfloor a \rfloor + 2}\cdots\frac{a}{n} \leqslant \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{\lfloor a \rfloor + 1}\cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{a}{n}.$$

Or, $\dfrac{a}{1}\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{\lfloor a\rfloor+1}$ est une constante λ, et donc pour $n > 2\lambda a$, on a $\lambda\dfrac{a}{n} < \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, en posant $n_0 = \lfloor 2\lambda a\rfloor + 1$, on a bien, pour $n \geqslant n_0$, $\boxed{\dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{1}{2}.}$

15.b. Pour $x \in [0,1]$, on a $(1-x) \in [0,1]$ et donc $x^n(1-x)^n \in [0,1]$.

Et donc $\boxed{0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}.}$

D'autre part, la fonction $\tau : x \mapsto x(1-x)$ est croissante sur $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$, avec $\tau\left(\dfrac{1}{4}\right) = \tau\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{16}$ et $\tau\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Mais $p_n : t \mapsto t^n$ étant croissante sur $\mathbf{R}$, $f_n = \dfrac{1}{n!}t_n \circ \tau$ a les mêmes variations que τ, et donc admet, sur $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$ un minimum qui vaut $\dfrac{3^n}{16^n n!}$ et un maximum qui vaut $\dfrac{1}{4^n n!}$.

> **Sans dériver !**
> Pour un polynôme de degré 2, vous connaissez une formule qui vous donne l'abscisse du sommet de la parabole (le fameux $-\frac{b}{2a}$), et donc vous pouvez trouver le tableau de variations sans le moindre calcul de dérivée (attention tout de même au signe du coefficient dominant).

15.c. Pour tout n, en utilisant l'encadrement de la question 15.b et par croissance de l'intégrale, on a

$$0 \leqslant \pi\int_0^1 a^n f_n(t)\sin(\pi t)\,dt \leqslant \frac{\pi a^n}{n!}\int_0^\pi \sin(\pi x)\,dx.$$

Mais $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}$.

Donc $A_n \leqslant \dfrac{a^n}{n!}$, de sorte que pour $n \geqslant n_0$, $A_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
D'autre part, la question précédente nous indique que

$$\int_{1/4}^{3/4} f_n(t)\sin(\pi t)\,dt \geqslant \int_{1/4}^{3/4}\frac{3^n}{16^n n!}\sin(\pi t)\,dt \geqslant \frac{3^n}{16^n n!}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_{1/4}^{3/4} \geqslant \frac{3^n\sqrt{2}}{16^n n!} > 0.$$

Et puisque pour tout $t \in [0,1]$, $f_n(t)\sin(\pi t) \geqslant 0$, on a donc

$$\int_0^1 f_n(t)\sin(\pi t)\,dt = \underbrace{\int_0^{1/4} f_n(t)\sin(\pi t)\,dt}_{\geqslant 0} + \int_{1/4}^{3/4} f_n(t)\sin(\pi t)\,dt + \underbrace{\int_{3/4}^{1} f_n(t)\sin(\pi t)\,dt}_{\geqslant 0} \geqslant \int_{1/4}^{3/4} f_n(t)\sin(\pi t)\,dt > 0.$$

Et donc $A_n > 0$. Nous venons donc de prouver que A_n est un entier de $]0,1[$, ce qui est absurde. On en déduit que notre hypothèse de départ est fausse, et donc que $\boxed{\pi^2 \text{ n'est pas rationnel.}}$

Par conséquent, $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ n'est pas non plus rationnel puisque sinon, on aurait $\pi^2 = 6\zeta(2) \in \mathbf{Q}$.

15.d. On en déduit que $\boxed{\pi \text{ est également irrationnel.}}$ En effet, s'il était rationnel, son carré serait rationnel, ce qui n'est pas le cas.
En revanche, on ne peut rien déduire quant à l'irrationalité de π^4 et donc de $\zeta(4)$, puisque le carré d'un irrationnel peut être rationnel, penser par exemple à $\sqrt{2}$...

Pour la culture *: on prouverait en fait que π^4 et donc $\zeta(4)$ sont irrationnels. Plus généralement, on prouve qu'aucune puissance de π n'est rationnelle (cela provient du fait que π est encore plus qu'irrationnel : il est transcendant, c'est-à-dire n'est racine d'aucun polynôme à coefficients rationnels, ce qui n'est pas le cas de tous les irrationnels, penser encore une fois à $\sqrt{2}$).*
Cela prouve donc que tous les $\zeta(2p)$ sont irrationnels.
En revanche, on sait très peu de choses des $\zeta(2p+1)$. Il a été prouvé dans les années 70 que $\zeta(3)$ est irrationnel, on suspecte les autres $\zeta(2p+1)$ de l'être aussi, mais rien n'est prouvé à ce jour. Les meilleurs résultats connus à ce jour ont été prouvés par Tanguy Rivoal de l'Université Joseph Fourier de Grenoble et affirment qu'une infinité des $\zeta(2p+1)$ sont irrationnels. Il a même été prouvé que l'un des quatre nombres $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$ et $\zeta(11)$ est irrationnel, mais on ne sait pas lequel...
Enfin, la fonction $p \mapsto \zeta(p)$ peut se prolonger en une fonction définie sur $\mathbf{C}\setminus\{1\}$, et une célèbre conjecture, la conjecture de Riemann, formulée en 1859 n'est toujours pas démontrée, et une récompense de un million de dollars sera offerte à qui la prouvera (ou la réfutera). Malheureusement, il vous faudra faire encore au moins deux ans de maths pour en comprendre l'énoncé précis et empocher le pactole.