TD 1 : Rappels et compléments calculatoires

▸ Précisions sur le fonctionnement des TD

Tout au long de l'année, les exercices de TD seront accompagnés d'une lettre indiquant leur niveau de difficulté :

F Facile **PD** Peu difficile **AD** Assez difficile **D** Difficile **TD** Très difficile.

Une étoile ($\star$) indique une question plus difficile que le reste de l'exercice, et qui peut être laissée de côté dans un premier temps. N'oubliez pas **de lire les questions en entier**, et notamment les éventuelles indications qu'elles peuvent contenir.

▸ Quelques révisions

Exercice 1.1 Simplifier au maximum les expressions suivantes, où x et y sont des réels non nuls et $n \in \mathbf{N}$. **F**

1. $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4$
2. $\dfrac{(xy^2)^3}{(-x)^{-2}y^3}$
3. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{12}\left(\dfrac{2}{9}\right)^5$
4. $\dfrac{32\times 8^{n-1}}{2^{2n+2}-4^n}$
5. $\dfrac{\sqrt{75}-1}{\sqrt{27}+\sqrt{36}}$

Exercice 1.2 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: **PD**

1. $2x = \sqrt{x^2+1}$
2. $2\sqrt{x}+1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3. $e^{2x}+2e^{1+x} = \dfrac{3}{e^{-2}}$
4. $\ln(x)^2-\ln(x)-10 = \dfrac{8}{\ln(x)}$

Exercice 1.3 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: **PD**

1. $\dfrac{3x+4}{x^2+1} \geqslant 5$
2. $\dfrac{x-2}{2x+1} \leqslant -1$.
3. $2x^4-9x^2+4 < 0$
4. $e^{2x}-e^x \leqslant 2$
5. $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1$

Exercice 1.4 Soient a, b, c, d des nombres réels vérifiant $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. **PD**
Montrer que si $a+c = b+d$, alors nécessairement $a = b$ et $c = d$.

Exercice 1.5 Prouver que : 1. pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{2x+1+\cos(2x)}{2-x^2} \leqslant 4$ **PD**

2. pour tout $x > 0$, $\dfrac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2-\ln(x)+1} \leqslant \dfrac{16e^{-2}}{3}$
3. ($\star$) pour tous x, y dans $[1,2]$, $\dfrac{2}{5} \leqslant \dfrac{x+y^2}{x^2+2y-y^2} \leqslant 6$

Exercice 1.6 **AD**

1. Montrer que pour tous réels a et b, $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.
2. En déduire que pour a et b strictement positifs, $\dfrac{ab}{a+b} \leqslant \dfrac{a+b}{4}$.
3. Montrer que pour x, y, z strictement positifs, $\dfrac{xy}{x+y}+\dfrac{xz}{x+z}+\dfrac{yz}{y+z} \leqslant \dfrac{x+y+z}{2}$.

Exercice 1.7 Vrai ou Faux ? **PD**
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier votre réponse (a, b et x sont trois réels).

1. si $\lfloor a\rfloor = \lfloor b\rfloor$, alors $|a-b| < 1$.
2. si $|a-b| < 1$ alors $\lfloor a\rfloor = \lfloor b\rfloor$.
3. si $a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$.
4. $|a| \leqslant |a+b|$.
5. $a+|a| = 0 \Leftrightarrow a \leqslant 0$
6. $|a+b| = |a| \Rightarrow b = 0$.
7. $|\lfloor x\rfloor| = \lfloor |x|\rfloor$.
8. $\left\lfloor \dfrac{x}{2}\right\rfloor = \dfrac{\lfloor x\rfloor}{2}$

Exercice 1.8 Soient x, y, z trois réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2} \geqslant \dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}$. **D**

À quelle(s) condition(s) cet inégalité est-elle une égalité ?

▸ Valeur absolue

Exercice 1.9 Résoudre les équations suivantes : **PD**

1. $x + |x| = \dfrac{4}{x}$.
2. $x|x| = 3x + 2$.
3. $|x^2 - 3x - 7| = 3$

Exercice 1.10 Résoudre l'équation $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$. PD

Exercice 1.11 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: PD

1. $|x+2| < |x^2 - 4|$
2. $|x+5| \geqslant |x^2 - 25|$
3. $\left|\lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor + 1\right| \leqslant 2$.
4. $\left|\dfrac{1}{x+1}\right| > 2$
5. $x^2 - 4|x| + 3 > 0$

Exercice 1.12 Soient a, b deux nombres réels. Montrer que $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$. AD

► Partie entière

Exercice 1.13 Résoudre l'inéquation $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor > 2$. PD

Exercice 1.14 Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbf{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ PD

Exercice 1.15 Montrer que pour $n \in \mathbf{N}$, $\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n + 1$. AD

Exercice 1.16 Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 - x + 2} \right\rfloor = 2$. PD

Exercice 1.17 Soient x et y deux nombres réels. PD

1. Montrer que si $x \leqslant y$, alors $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$. Est-ce qu'inversement, si $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$ alors nécessairement $x \leqslant y$?
2. A-t-on toujours $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$? Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 1.18 Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer les relations suivantes : D

1. $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. *On pourra distinguer deux cas, suivant que $x - \lfloor x \rfloor < \dfrac{1}{2}$ ou non.*
2. $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 1.19 Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $n = \lfloor x \rfloor$. D

1. Exprimer $\lfloor x - 4 \rfloor$ et $\lfloor 2x - 1 \rfloor$ en fonction de n. *On pourra si besoin distinguer plusieurs cas.*
2. Résoudre l'équation $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor$.

Exercice 1.20 (Oral Polytechnique) TD

On considère une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie de la manière suivante :

$$u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = 2,\ u_4 = u_5 = u_6 = 3,\ u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4, \dots$$

Autrement dit, il s'agit d'une suite d'entiers croissante, et telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, exactement k termes de la suite soient égaux à k. En utilisant la fonction partie entière, donner une expression de u_n en fonction de n.

► Inégalités diverses

Exercice 1.21 Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. PD

Exercice 1.22 PD

1. Soient a et b deux réels. Montrer que $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$. *Indication : développer* $(|a| - |b|)^2$.
2. Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.

Exercice 1.23 AD

1. Déterminer le maximum de la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x(1-x)$.
2. Soient a, b, c trois réels de $[0, 1]$. Montrer que l'un au moins des nombres $a(1-c)$, $b(1-a)$, $c(1-b)$ est inférieur à $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 1.24 Montrer par récurrence que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $1 - nt \leqslant (1-t)^n \leqslant \dfrac{1}{1+nt}$. AD

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 1

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.1

1. $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^2\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18.$

2. $\dfrac{(xy^2)^3}{(-x)^{-2}y^3} = \dfrac{x^3y^6}{y^3}(-x)^2 = x^3x^2\dfrac{y^6}{y^3} = x^5y^3.$

3. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{12}\left(\dfrac{2}{9}\right)^5 = \left(\dfrac{3}{2^2}\right)^{12}\left(\dfrac{2}{3^2}\right)^5 = \dfrac{3^12}{2^{24}}\dfrac{2^5}{3^{10}} = \dfrac{3^2}{2^{19}}.$

4. $\dfrac{32\times 8^{n-1}}{2^{2n+2}-4^n} = \dfrac{2^5\times 8^n\times 8^{-1}}{4^{n+1}-4^n} = \dfrac{2^2\times 8^n}{4^n(4-1)} = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{8}{4}\right)^n = \dfrac{2^{n+2}}{3}.$

5. Notons que $75 = 5\times 15 = 5^2\times 3$ et $27 = 3^2\times 3$ donc

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{75}-1}{\sqrt{27}+\sqrt{36}} &= \frac{5\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}+6}\\ &= \frac{1}{3}\frac{5\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2} = \frac{1}{3}\frac{(5\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}\\ &= \frac{1}{3}\frac{17-11\sqrt{3}}{3-4} = \frac{11}{3}\sqrt{3}-\frac{17}{3}.\end{aligned}$$

> **Astuce**
> On fait apparaître la quantité conjugée (au dénominateur, et donc également au numérateur).

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.2

1. Notons que x^2+1 est toujours positif, donc $\sqrt{x^2+1}$ est toujours bien défini.
Une racine étant toujours positive, toute solution doit vérifier $x \geqslant 0$. Et alors pour $x \geqslant 0$,

$$2x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 4x^2 = x^2+1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc l'équation possède une unique solution qui est $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

> **Remarque**
> La dernière équivalence n'en est une que parce que x est supposé positif.

> **Dénominateur**
> $\sqrt{x}$ est défini pour $x \geqslant 0$, mais si $x = 0$, alors il y a une division par 0, ce qui n'est pas possible !

2. L'équation n'a de sens que pour $x > 0$.
Et alors, pour $x > 0$, on a, après multiplication par $\sqrt{x}$

$$2\sqrt{x}+1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}-1 = 0.$$

En posant $X = \sqrt{x}$, on a donc $2X^2+X-1 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1+8 = 9$, donc les racines en sont
$X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{4} = -1$ et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{4} = \dfrac{1}{2}$.
Puisque $\sqrt{x} = -1$ n'a pas de solution, l'unique solution est $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

3. Puisque $e^{1+x} = e^1e^x$ et $e^{2x} = (e^x)^2$, en posant $X = e^x$, l'équation s'écrit encore

$$X^2+2eX-\frac{3}{e^{-2}} = 0.$$

Le discriminant est alors $\Delta = 4e^2+\dfrac{12}{e^{-2}} = 4e^2+12e^2 = 16e^2 > 0$.
Donc les racines sont $X_1 = \dfrac{-2e+4e}{2} = e$ et $X_2 = -3e$.
Puisque $e^x = -3e$ n'a pas de solution[1] et que $e^x = e = e^1 \Leftrightarrow x = 1$, la seule solution de l'équation est 1.

[1] Une exponentielle est toujours positive.

4. Notons que l'équation de départ n'a de sens que si $\ln(x)$ est défini et non nul, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 1$.
On a alors, en multipliant par $\ln(x)$,

$$\ln(x)^2-\ln(x)-10 = \frac{8}{\ln(x)} \Leftrightarrow (\ln x)^3-\ln(x)^2-10\ln(x)-8 = 0.$$

Donc en posant $X = \ln(x)$, il vient $X^3 - X^2 - 10X - 8 = 0$.
Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 3, cherchons une racine «évidente».
On constate que -2 convient car $(-2)^3 - (-2)^2 - 10 \times (-2) - 8 = -8 - 4 + 20 - 8 = 0$.
Donc le polynôme se factorise par $X - (-2)$:

$$X^3 - X^2 - 10X - 8 = (X + 2)(X^2 - 3X - 4).$$

Méthode
Une racine dite «évidente» est une racine «petite», généralement dans $[\![-2, 2]\!]$.

Les racines de $X^2 - 3X - 4$ sont -1 et 4.
Or on a $X = \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, $\ln(x) = 4 \Leftrightarrow x = e^4$ et $\ln(x) = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{e^{-2}, e^{-1}, e^4\}$.

Solution de l'exercice 1.3

1. Puisque $x^2 + 1$ est toujours positif, on peut sans précautions multiplier les deux membres de l'inégalité par $x^2 + 1$, le sens de l'inégalité ne s'en trouvera pas changé.
On a donc
$$\frac{3x+4}{x^2+1} \geqslant 5 \Leftrightarrow 3x + 4 \geqslant 5x^2 + 5 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 1 \leqslant 0.$$
Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 5 = -11 < 0$.
Donc il ne possède pas de racines, et par conséquent est de signe constant, strictement positif car son coefficient en x^2 est positif.
Donc l'inéquation ne possède pas de solutions.

2. Commençons par remarquer que l'inéquation n'a de sens que si $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$.
On ne peut alors pas procéder comme à la question précédente, en multipliant par $2x + 1$, car celui-ci n'est pas de signe constant...
En revanche, on a
$$\frac{x-2}{2x+1} \leqslant -1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2x+1} + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2x+1} \leqslant 0.$$
Et alors, un tableau de signe permet de conclure facilement

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3x-1}{2x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$.

3. Posons $X = x^2$ et commençons par résoudre $2X^2 - 9X + 4 < 0$.
Les racines du polynôme $2X^2 - 9X + 4$ sont $\frac{1}{2}$ et 4, et donc $2X^2 - 9X + 4 < 0$ si et seulement si $X \in \left]\frac{1}{2}, 4\right[$.
Il ne reste donc plus qu'à résoudre $\frac{1}{2} < x^2 < 4$.
En prenant la racine carrée, qui préserve les inégalités car elle est croissante sur $\mathbf{R}_+$, et même les inégalités strictes car elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 2$.
Et donc
$$2x^4 - 9x^2 + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right[.$$

Intervalle ouvert
On a exclu les racines de cet intervalle, puisqu'on souhaite avoir une inégalité stricte. Or en les racines, le polynôme est **égal** à 0.

4. On a $e^{2x} - e^x \leqslant 2 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 2 \leqslant 0$, donc en posant $X = e^x$, on en arrive à $X^2 - X - 2 \leqslant 0$.
Le discriminant du polynôme $X^2 - X - 2$ est $\Delta = 9$, donc les deux racines sont $X_1 = 2$ et $X_2 = -1$.
Ainsi, x est solution de l'inéquation si et seulement si $e^x \in [-1, 2]$.
Une exponentielle étant toujours positive, $e^x \geqslant -1$ est toujours réalisé, et $e^x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \ln(2)$.

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty, \ln(2)]$.

Croissance
On a bien une équivalence car la fonction ln est **strictement** croissante.
Si elle n'était que croissance, on devrait se contenter d'une implication ($\Rightarrow$).

5. Notons que l'inéquation n'a de sens que pour $x \neq \pm 1$.
Pour un tel x, on a $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x^2-1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+6-x^2}{x^2-1} \geqslant 0$.
Pour étudier le signe du trinôme $-x^2+x+6$, calculons son discriminant, qui vaut $\Delta = 1 - 4\times 6 \times (-1) = 25$.
Ses racines sont donc $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{-2} = 3$ et $x_2 = -2$.
Donc $-x^2+x+6 \geqslant 0$ si et seulement si $-2 \leqslant x \leqslant 3$.
D'autre part, on a $x^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$.

Rappel
Un polynôme de degré 2 est du signe de son coefficient dominant (ici négatif) à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines.

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
$-x^2+x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+x+6}{x^2-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-2,-1[\cup]1,3]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.4

Si l'une des deux inégalités $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ était une inégalité stricte[2], alors la somme des deux inégalités serait une inégalité stricte (quand bien même l'autre inégalité serait une égalité !).
Autrement dit, on aurait $a+c < b+d$, ce qui n'est pas le cas.
On en déduit que $a = b$ et $c = d$.

[2] C'est-à-dire si on avait $a \neq b$ ou $c \neq d$.

Classique
Le raisonnement que nous venons de tenir s'appelle un raisonnement par l'absurde : on suppose que la conclusion est fausse, et on en déduit une contradiction (ici que $a+c \neq b+d$).
Nécessairement, cela impose que la conclusion est vraie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.5

1. Nous savons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
Et donc $0 \leqslant 2x \leqslant 2x + 1 + \cos(2x) \leqslant 2x + 2 \leqslant 4$.
D'autre part, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, donc $1 \leqslant 2 - x^2 \leqslant 2$.
En passant à l'inverse, on a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2-x^2} \leqslant 1$.
Et donc en multipliant les deux inégalités[3] ainsi obtenues,
$$0 \leqslant \frac{2x+1+\cos(2x)}{2-x^2} \leqslant 4.$$

[3] Toutes formées de nombres positifs.

2. Notons φ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $\varphi(t) = t^2 e^{-t}$, de sorte que $xe^{-\sqrt{x}} = \varphi(\sqrt{x})$.
Alors φ est dérivable, de dérivée $\varphi' : t \mapsto t(2-t)e^{-t}$.
Il est alors aisé d'en dresser le tableau de variations, et de constater que φ possède un maximum en $t = 2$, égal à $\varphi(2) = 4e^{-2}$.
Donc déjà, pour $x > 0$, $xe^{-\sqrt{x}} \leqslant 4e^{-2}$.

De même, soit $\psi : t \mapsto t^2 - t + 1$. Il s'agit alors d'un polynôme de degré 2, dont on sait que le minimum est atteint[4] en $\frac{1}{2}$, et vaut $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.
Et donc pour tout $x > 0$, $\ln(x)^2 - \ln(x) + 1 = \psi(\ln(x)) \geqslant \frac{3}{4}$.
En passant à l'inverse, on a donc $\dfrac{1}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leqslant \dfrac{4}{3}$.
Il ne reste alors qu'à multiplier les inégalités pour conclure : pour $x > 0$, $\dfrac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leqslant \dfrac{16e^{-2}}{3}$.

[4] Inutile de dériver : il existe une formule pour trouver l'abscisse du sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$: c'est $-\frac{b}{2a}$.

3. Essayons d'adopter une approche similaire à celle employée à la question précédente : $1 \leqslant y^2 \leqslant 4$ et donc $3 \leqslant 2x + y^2 \leqslant 6$.
De même, $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$, $2 \leqslant 2y \leqslant 4$ et $-4 \leqslant -y^2 \leqslant -1$.
On en déduit que $-1 \leqslant x^2 + 2y - y^2 \leqslant 7$.
On réalise alors que notre majoration est minoration est trop «brutale», puisqu'on souhaiterait n'avoir que des nombres positifs à la fin.
Essayons d'être plus subtils en étudiant la fonction f définie sur $[1,2]$ par $f(y) = 2y - y^2$.

Sa dérivée est $f'(y) = 2 - 2y = 2(1 - y) \leqslant 0$. Donc f est décroissante sur $[1, 2]$ et admet donc un maximum en 1, qui vaut $f(1) = 1$ et un minimum en 2 qui vaut $f(2) = 0$.
Donc pour tout $y \in [1, 2]$, $0 \leqslant 2y - y^2 \leqslant 1$.

On en déduit que $1 \leqslant x^2 + 2y - y^2 \leqslant 5$ et donc $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x^2 + 2y - y^2} \leqslant 1$.

Enfin, en multipliant par l'encadrement du numérateur précédemment obtenu,

$$\frac{2}{5} \leqslant \frac{x + y^2}{x^2 + 2y - y^2} \leqslant 6.$$

Remarque
Cet encadrement est à comparer avec celui obtenu précédemment :

$$-2 \leqslant 2y - y^2 \leqslant 3.$$

Solution de l'exercice 1.6

1. On a

$$(a + b)^2 \geqslant 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geqslant 0.$$

Puisque cette dernière inégalité est trivialement vérifiée[5], on a bien $(a + b)^2 \geqslant 4ab$.

2. Puisque $(a + b)^2 \geqslant 4ab$, alors

$$\frac{(a + b)(a + b)}{4} \geqslant ab \Leftrightarrow \frac{a + b}{4} \geqslant \frac{ab}{a + b}.$$

3. En appliquant trois fois le résultat de la question précédente,

$$\frac{xy}{x + y} \leqslant \frac{x + y}{4}, \frac{xz}{x + z} \leqslant \frac{x + z}{4}, \frac{yz}{y + z} \leqslant \frac{y + z}{4}.$$

En sommant ces trois inégalités, il vient

$$\frac{xy}{x + y} + \frac{xz}{x + z} + \frac{yz}{y + z} \leqslant \frac{x + y}{4} + \frac{x + z}{4} + \frac{y + z}{4} \leqslant \frac{2x + 2y + 2z}{4} \leqslant \frac{x + y + z}{2}.$$

[5] Un carré est toujours positif.

Signe
Notons que le sens des inégalités n'est pas changé car $a + b > 0$.

Solution de l'exercice 1.7

1. **Vrai.** En effet, si $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = n$, alors $n \leqslant a < n + 1$ et $n \leqslant b < n + 1$.
Donc $-1 - n < -b \leqslant -n$ et alors en sommant les inégalités,

$$-1 < a - b < 1 \Rightarrow |a - b| < 1.$$

2. **Faux.** Par exemple si $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$, alors $|a - b| = \frac{1}{2}$ mais $\lfloor a \rfloor = 0$ et $\lfloor b \rfloor = 1$.
3. **Faux.** On a $-2 \leqslant 1$ et $(-2)^2 > 1^2$.
4. **Faux.** Si $a = 2$ et $b = -1$, alors $|a| = 2$ et $|a + b| = 1$.
5. **Vrai.** Si $a \leqslant 0$, alors $|a| = -a$, de sorte que $a + |a| = 0$.
En revanche, si $a > 0$, alors $|a| = a$ de sorte que $a + |a| = 2a \neq 0$.
Et donc on a bien[6] $a + |a| = 0 \Leftrightarrow a \leqslant 0$.
6. **Faux.** Si $a \neq 0$ et $b = -2a$, alors $|a + | = | - a| = |a|$ alors que $b \neq 0$.
7. **Faux.** Si $x = -\frac{1}{2}$, alors $|\lfloor x \rfloor| = | - 1| = 1$, alors que $\lfloor |x| \rfloor = 0$.
On notera en revanche que la formule est vraie si $x \geqslant 0$, mais aussi si x est un entier naturel[7]
8. **Faux.** Par exemple si $x = 1$, $\lfloor x \rfloor = 1$, donc $\frac{\lfloor x \rfloor}{2} = \frac{1}{2}$, qui ne peut pas être une partie entière puisque ce n'est pas un entier.

[6] Car on a traité tous les cas : a est soit négatif ou nul, soit strictement positif.

[7] Positif ou négatif.

Solution de l'exercice 1.8

Soit x, y et z trois réels strictement positifs.

Remarquons que $\frac{x}{z} = \frac{x}{y}\frac{y}{z}$ et donc $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{z} + \frac{y^2}{z^2}$.
Et de même en permutant les rôles de x, y et z. Il vient alors

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \\ \Leftrightarrow &2\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{y^2}{z^2} + 2\frac{z^2}{x^2} \geqslant 2\frac{x}{z} + 2\frac{y}{x} + 2\frac{z}{y} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{z} + \frac{y^2}{z^2}\right) + \left(\frac{y^2}{z^2} - 2\frac{y}{x} + \frac{z^2}{x^2}\right) + \left(\frac{z^2}{x^2} - 2\frac{z}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \geqslant 0.$$

Cette dernière inégalité est triviale[8].
De plus, il y a égalité dans l'inégalité de départ si et seulement si

[8] Une somme de carrés est toujours positive.

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 = 0.$$

Or une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, donc si et seulement si

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}, \frac{y}{z} = \frac{z}{x}, \frac{z}{x} = \frac{x}{y}.$$

Soit encore si et seulement si $x^2 = yz$, $y^2 = xz$ et $z^2 = xy$.
Il vient alors $z = \dfrac{x^2}{y}$, donc en substituant dans $y^2 = xz$, il vient $y^2 = \dfrac{x^3}{y} \Leftrightarrow x^3 = y^3$. Et donc $x = y$.
On prouve de même que $y = z$, et donc $x = y = z$.
Inversement, il est clair que si $x = y = z$, alors l'inégalité de départ est une égalité.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.9

1. Notons que le membre de droite de l'équation n'est défini que si $x \neq 0$, on résout donc l'équation sur $\mathbf{R}^*$.
Si $x > 0$, alors $|x| = x$, de sorte que l'équation s'écrit encore $2x = \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.
Et si $x < 0$, alors $|x| = -x$, de sorte que $x + |x| = x + (-x) = 0$, et donc l'équation ne possède pas de solution dans $\mathbf{R}_-^*$.
Ainsi, l'équation $x + |x| = \dfrac{4}{x}$ possède $\sqrt{2}$ comme unique solution.

Signe
L'équation $x^2 = 2$ possède également $x = -\sqrt{2}$ comme solution, mais puisque nous travaillons avec $x > 0$, cette solution n'est pas pertinente ici.

Méthode
Afin de manipuler les valeurs absolues, le plus simple est souvent (mais pas toujours) de revenir à la définition :

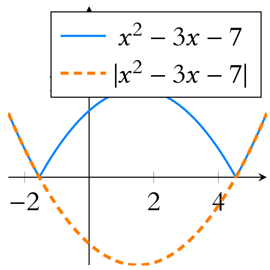
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Distinguons les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$, et donc $x|x| = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.
Le polynôme $x^2 - 3x - 2$ possède un discriminant égal à $\Delta = 3^2 - 4(-2) = 17$, et a donc pour racines $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2} < 0$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2} > 0$.
Donc la seule solution dans $\mathbf{R}_+$ de $x|x| = 3x + 2$ est $\dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$.
Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et donc

$$x|x| = 3x + 2 \Leftrightarrow -x^2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Or le polynôme $x^2 + 3x + 2$ possède un discriminant égal à $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1$, de sorte qu'il possède pour racines $x_3 = \dfrac{-3 - 1}{2} = -2$ et $x_4 = \dfrac{-3 + 1}{2} = -1$.
Ces deux solutions sont bien des nombres négatifs.
Et donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-2, -1, \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}\right\}$.

3. On a $|x^2 - 3x - 7| = 3$ si et seulement si $x^2 - 3x - 7$ vaut soit 3 soit -3.
Or $x^2 - 3x - 7 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$, dont les solutions sont -2 et 5.
De même, $x^2 - 3x - 7 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$, équation dont les solutions sont -1 et 4.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $\{-2, -1, 4, 5\}$.



Bien que ce ne soit pas nécessaire pour répondre à la question, je laisse ces deux graphiques ici et vous laisse comprendre en quoi ils se ressemblent et pourquoi.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.10

Commençons par noter que tous les termes de cette équation sont bien définis si et seulement si $\begin{cases} |x| \neq 0 \\ |x+1| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$
On a alors, pour $x \notin \{0, -1\}$,

$$\ln|x| + \ln|x+1| = 0 \Leftrightarrow \ln|x(x+1)| = 0 \Leftrightarrow |x(x+1)| = 1.$$

Soit encore $x(x+1)=1 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$ **ou** $x(x+1)=-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$.

La première équation possède un discriminant égal à 5 et possède $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ comme solutions.

La seconde équation possède un discriminant strictement négatif, et donc n'a pas de solutions.

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Solution de l'exercice 1.11

1. Notons que $x^2-4=(x+2)(x-2)$, et donc $|x^2-4|=|x+2|\cdot|x-2|$.
Et donc il vient

$$|x+2|<|x^2-4| \Leftrightarrow |x+2|<|x+2|\cdot|x-2| \Leftrightarrow 0<|x+2|\left(|x-2|-1\right).$$

Il est clair que $x=-2$ n'est pas solution car alors $|x+2|=0$.
Et pour $x\neq -2$, $|x+2|>0$, de sorte que

$$0<|x+2|\left(|x-2|-1\right) \Leftrightarrow |x-2|-1>0 \Leftrightarrow |x-2|>1.$$

Or, $|x-2|>1 \Leftrightarrow x-2>1$ **ou** $x-2<-1$.
Soit encore $x>3$ **ou** $x<1$.
Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty,-2[\cup]-2,1[\cup]3,+\infty[$.

2. Notons que $x^2-25=(x+5)(x-5)$ et donc $|x^2-25|=|x+5|\cdot|x-5|$.
Et donc l'inéquation s'écrit encore $|x+5|\geqslant|x+5|\cdot|x-5|$.
Pour $x\neq -5$ l'inéquation est donc équivalente à $|x-5|\leqslant 1$
Soit encore $-1\leqslant x-5\leqslant 1 \Leftrightarrow 4\leqslant x\leqslant 6$.
Enfin, -5 est solution de l'inéquation, donc l'ensemble des solutions est $\{-5\}\cup[4,6]$.

> **⚠ Attention !**
> Si on souhaite diviser par $|x+5|$, il faut d'abord s'assurer que celui-ci n'est pas nul !

3. On a

$$\begin{aligned}\left|\lfloor x^2-4x-3\rfloor+1\right|\leqslant 2 &\Leftrightarrow -2\leqslant\lfloor x^2-4x-3\rfloor+1\leqslant 2\\ &\Leftrightarrow -3\leqslant\lfloor x^2-4x-3\rfloor\leqslant 1\\ &\Leftrightarrow -3\leqslant x^2-4x-3<2.\end{aligned}$$

> **☠ Danger !**
> Si pour $n\in\mathbf{Z}$, on a clairement
> $$\lfloor x\rfloor\geqslant n \Leftrightarrow x\geqslant n,$$
> il faut se méfier davantage des inégalités dans l'autre sens :
> $$\lfloor x\rfloor\leqslant n \Leftrightarrow x<n+1.$$

Or on a $x^2-4x-3<2 \Leftrightarrow x^2-4x-5<0$.
Le polynôme x^2-4x-5 possède un discriminant égal à $\Delta_1=16+20=36$. Ses racines sont donc $x_1=\dfrac{4+\sqrt{36}}{2}=5$ et $x_2=\dfrac{4-\sqrt{36}}{2}=-1$.
Et donc $x^2-4x-5<0 \Leftrightarrow x\in]-1,5[$.
De même, on a $x^2-4x-3\geqslant -3 \Leftrightarrow x^2-4x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,0]\cup[4,+\infty[$.

Ainsi, les deux conditions $-3\leqslant x^2-4x-3<2$ sont vérifiées simultanément si et seulement si $x\in]-1,0]\cup[4,5[$.

4. Notons que pour $x=-1$, l'inéquation n'a pas de sens[9].
Voici deux méthodes de résolution qui, si elles conduisent au même résultat[10] ne nécessitent pas la même quantité de calcul. Avant de se lancer, mieux vaut donc réfléchir aux outils dont on dispose et choisir ceux qui nous semblent le plus pertinents.

▶ **1ère méthode :** pour $x\neq -1$, on a $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|>2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}>2$ **ou** $\dfrac{1}{x+1}<-2$.

Or, $\dfrac{1}{x+1}>2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}-2>0 \Leftrightarrow \dfrac{-1-2x}{x+1}>0$.
Un tableau de signe nous permet alors de conclure :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-1-2x}{x+1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

[9] Division par zéro.
[10] Encore heureux !

Et de même, on a $\frac{1}{x+1} < -2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} < 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x+1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\frac{3}{2}, -1\right[\cup \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

▶ **2ème méthode :** pour $x \neq -1$, $|x+1| > 0$ et donc

$$\left|\frac{1}{x+1}\right| > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > |x+1| \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}.$$

Puisque -1 avait été d'office exclu de l'ensemble des solutions, on trouve donc comme ensemble de solutions $\left]-\frac{3}{2}, -1\right[\cup \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

5. Il serait possible de distinguer les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$, et de résoudre dans les deux cas une inéquation du second degré.
Mais notons plutôt que $x^2 = |x|^2$, et donc en posant $X = |x|$, l'inéquation de départ s'écrit $X^2 - 4X + 3 > 0$.
Mais le polynôme $X^2 - 4X + 3$ possède un discriminant égal à 4 et possède donc pour racines 1 et 3. Ainsi $X^2 - 4X + 3 > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.
Puisque d'autre part, $|x| \geqslant 0$, on a donc

$$x^2 - 4|x| + 3 > 0 \Leftrightarrow |x| \in [0, 1[\cup]3, +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 1[\cup]3, +\infty[.$$

Rappel
Un polynôme du second degré possédant deux racines est du signe du coefficient de degré 2 à l'extérieur des racines et du signe opposé en dehors des racines.

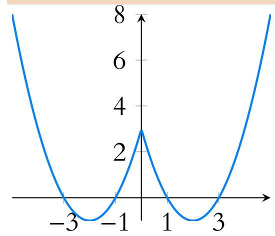


Figure 1.1– La fonction $x \mapsto x^2 - 4|x| + 3$.

Solution de l'exercice 1.12

Commençons par noter que

$$\frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} = \frac{|a|(1+|b|) + |b|(1+|a|)}{(1+|a|)(1+|b|)} = \frac{|a|+|b|+2|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|}.$$

Et donc il vient

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|+2|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|}$$
$$\Leftrightarrow |a+b|\,(1+|a|+|b|+|ab|) \leqslant (1+|a+b|)\,(|a|+|b|+2|ab|)$$
$$\Leftrightarrow |a+b| + |a|\cdot|a+b| + |b|\cdot|a+b| + |ab|\cdot|a+b| \leqslant |a|+|b|+2|ab| + |a|\cdot|a+b| + |b|\cdot|a+b| + 2|ab|\cdot|a+b|$$
$$\Leftrightarrow |a+b| \leqslant |a|+|b|+|ab|\cdot|a+b| + 2|ab|.$$

Signes !
Notons que ce que nous venons de faire est bien licite car nous avons muliplié par des nombres **positifs**, ce qui préserve le sens de l'inégalité.

Mais par l'inégalité triangulaire, $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, de sorte que la dernière inégalité ci-dessus est vérifiée.
Et donc[11] l'inégalité de départ est vraie : $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

[11] Car on a raisonné par équivalences !

Solution de l'exercice 1.13

Notons que l'inéquation n'a de sens que pour $x \neq 0$.
Puisque $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ est un entier, on a $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor > 2 \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 3$.
Et alors, ceci est vrai si et seulement si $\frac{1}{x} \geqslant 3 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \frac{1}{3}$.

Quelques détails : le passage $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geqslant 3$ est suffisamment intuitif pour se passer de justification.
Si vous souhaitez tout de même une preuve, la voici.
Si $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 3$, alors $\frac{1}{x} \geqslant \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 3$. Donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 3 \Rightarrow \frac{1}{x} \geqslant 3$.
Inversement, supposons que $\frac{1}{x} \geqslant 3$. Alors 3 est un entier inférieur ou égal à $\frac{1}{x}$. Mais $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{1}{x}$, donc il est supérieur ou égal à 3.

Rappel
Un réel est toujours (par définition) supérieur à sa partie entière.

Solution de l'exercice 1.14

Supposons que $x \in \mathbf{Z}$. Alors $\lfloor x \rfloor = x$, et puisque de même, $-x \in \mathbf{Z}$, alors $\lfloor -x \rfloor = -x$.
Et par conséquent, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x + (-x) = 0$.

Supposons à présent que $x \notin \mathbf{Z}$. Alors on a $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$.
En multipliant cette inégalité par -1, il vient donc

$$\underbrace{-\lfloor x \rfloor - 1}_{\in \mathbf{Z}} < -x < \underbrace{-\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbf{Z}}.$$

On en déduit que $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.
Et donc on a $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = -1$.

Inégalité

Notons que la première inégalité est stricte : puisque x n'est pas entier, il ne peut être égal à sa partie entière.

Remarque

C'est en fait assez intuitif : prenez n'importe quelle nombre positif, non entier. Par exemple $x = 3,2$. Alors

$\lfloor -x \rfloor = -4 = -3-1 = -\lfloor x \rfloor - 1$.

Il est un peu moins évident que ceci reste vrai si $x < 0$.

Solution de l'exercice 1.15

Il s'agit donc de prouver que $4n+1 \leqslant \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 < 4n+2$.
Soit encore

$$4n+1 \leqslant n + 2\sqrt{n(n+1)} + n + 1 < 4n+2 \Leftrightarrow 2n \leqslant 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1.$$

Puisque $n \leqslant n+1$, alors $n^2 \leqslant n(n+1)$ et donc $n \leqslant \sqrt{n(n+1)}$, de sorte qu'on a bien $2n \leqslant 2\sqrt{n(n+1)}$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 &\Leftrightarrow 4n(n+1) < (2n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant trivialement vérifiée, on a donc bien $2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$, et donc

$$\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1.$$

Solution de l'exercice 1.16

Commençons par noter que le discriminant de $x^2 - x + 2$ est $-7 < 0$, de sorte que $x^2 - x + 2$ est de signe constant, positif.
Ceci nous garantit que l'équation a bien un sens pour tout $x \in \mathbf{R}$.
On a alors

$$\begin{aligned} \left\lfloor \sqrt{x^2 - x + 2} \right\rfloor = 2 &\Leftrightarrow 2 \leqslant \sqrt{x^2 - x + 2} < 3 \\ &\Leftrightarrow 4 \leqslant x^2 - x + 2 < 9 \end{aligned}$$

Signe

Un polynôme de degré 2 qui ne possède pas de racine (réelle) ne peut changer de signe, et donc est de signe constant.
C'est le signe du coefficient en x^2 qui détermine ce signe.

On alors $4 \leqslant x^2 - x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geqslant 0$.
Un calcul de discriminant nous informe alors que cette inéquation est vérifiée si et seulement si $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$.

De même, on a $x^2 - x + 2 < 9 \Leftrightarrow x^2 - x - 7 < 0$, ce qui est le cas si et seulement si $\dfrac{1-\sqrt{29}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$.
Puisque $\sqrt{29} > 3$, $\dfrac{1-\sqrt{29}}{2} < -1$, et de même $\dfrac{1+\sqrt{29}}{2} > 2$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left]\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}, -1\right] \cup \left[2, \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}\right[$.

Solution de l'exercice 1.17

1. Si $x \leqslant y$, alors on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant y$, et donc $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à y, il est donc inférieur[12] à $\lfloor y \rfloor$ (qui par définition est le plus grand entier inférieur à y).
   En revanche, la réciproque est fausse : $\left\lfloor \dfrac{1}{2} \right\rfloor \leqslant \lfloor 0 \rfloor$, mais on n'a pas $\dfrac{1}{2} \leqslant 0$.
   Notons que si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, alors on a

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor \Rightarrow x < y.$$

[12] Ou égal !

2. La réponse est non, puisque $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 + 0 \neq 1 = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
En revanche, on a toujours
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$
Ceci signifie donc que $\lfloor x + y \rfloor$ vaut soit $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, soit $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.18

1. ► Commençons par traiter le cas où $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire le cas où la partie «après la virgule[13]» de x est inférieure à $0,5$.
Alors on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$ et donc $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leqslant x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$.
Par conséquent, $\lfloor x \rfloor \leqslant x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$.
Et $\lfloor x \rfloor$ étant entier, c'est donc[14] la partie entière de $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
Ainsi, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.
Or, $2\lfloor x \rfloor \leqslant 2x < 2\lfloor x \rfloor + 1$, de sorte que $2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.
On a donc bien $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

► Traitons à présent le cas où $x - \lfloor x \rfloor \geqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire où $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Alors $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + \frac{3}{2} < \lfloor x \rfloor + 2$.
Puisque $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier, c'est donc la partie entière de $x + \frac{1}{2}$.
Et donc $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.
D'autre part, on a $2\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2$, donc $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.
Ceci prouve qu'on a bien la relation annoncée : pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

2. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Et donc après multiplication par $n > 0$,
$$n\lfloor x \rfloor \leqslant nx < n\lfloor x \rfloor + n.$$
Par conséquent, $n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor < n\lfloor x \rfloor + n$.
En divisant par n, il reste
$$\lfloor x \rfloor \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1.$$
Par définition d'une partie entière, on a donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

[13] Appelée partie fractionnaire.

[14] C'est la définition de la partie entière !

Remarque
Cette relation $2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ n'est pas valable pour tout $x \in \mathbf{R}$, elle ne vaut que si la partie fractionnaire de x est inférieure strictement à 0.5. Par exemple elle est fausse pour $x = 0.5$ ou $x = 0.75$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.19

1. Puisque $-4 \in \mathbf{Z}$, $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4 = n - 4$.
De même, on a $2n - 1 \leqslant 2x - 1 < 2(n+1) - 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leqslant 2x - 1 < 2n + 1$.
► Si $x \in \left[n, n + \frac{1}{2}\right[$, alors $2n \leqslant 2x < 2n + 1$ et donc $2n - 1 \leqslant 2x - 1 < 2n$, de sorte que $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 2n - 1$.
► En revanche, si $x \in \left[n + \frac{1}{2}, n + 1\right[$, alors
$$2n + 1 \leqslant 2x < 2n + 2 \Leftrightarrow 2n \leqslant 2x - 1 < 2n + 1 \Rightarrow \lfloor 2x - 1 \rfloor = 2n.$$

2. Supposons que x soit une solution de l'équation, et soit donc $n = \lfloor x \rfloor$.
► Si $x \in \left[n, n + \frac{1}{2}\right[$, alors d'après ce qui précède, on a
$$n - 4 = 2n - 1 \Leftrightarrow n = -3.$$

Et donc $x \in [-3; -2,5[$.

► **Si** $x \in \left[n + \frac{1}{2}, n+1\right[$, alors

$$n - 4 = 2n \Leftrightarrow n = -4.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x-4 \rfloor$ est $[-3,5; -2,5[$.

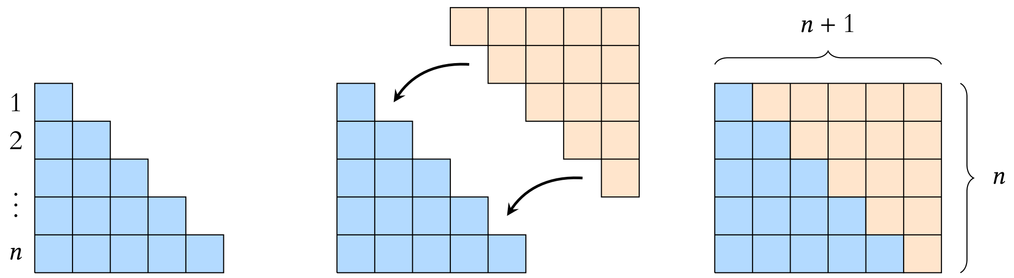
Solution de l'exercice 1.20

Si $u_n = k$ cela signifie que $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ ont pris au moins toutes les valeurs $1, 2, \dots, k-1$, les derniers termes avant u_n pouvant éventuellement être égaux à k.
Or, pour prendre toutes les valeurs $1, 2, \dots, k-1$, il a fallu au moins $1 + 2 + \dots + (k-1)$ termes, de sorte que $n \geqslant 1 + 2 + \dots + k - 1$.
Souvenons-nous alors d'une formule rencontrée en première : pour k entier naturel, $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.
La preuve que vous en avez sûrement donnée au lycée est assez simple : si on note S cette somme, alors on a à la fois $S = 1 + 2 + \dots + n - 1 + n$ et $S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$.
En sommant ces deux relations, il vient

$$2S = \underbrace{1+n}_{=n+1} + \underbrace{2+(n-1)}_{=n+1} + \dots + \underbrace{n-1+2}_{=n+1} + \underbrace{n+1}_{=n+1} = n(n+1).$$

Et donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$.
Encore plus simple est la preuve[15] géométrique suivante :

[15] Un dessin n'est pas une preuve !
Mais ce dessin suffit à lui tout seul à expliquer pourquoi on a envie de faire les calculs ci-dessus, ce dont je vous laisse vous convaincre.



Cette formule nous donne donc en particulier $1 + 2 + \dots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$.
Ceci signifie que le premier terme de la suite qui porte le numéro k est le terme d'indice $\frac{(k-1)k}{2} + 1$ et que le dernier portant le numéro k est le terme d'indice $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.
Ainsi, on a $u_n = k \Leftrightarrow \frac{(k-1)k}{2} + 1 \leqslant n < \frac{k(k+1)}{2} + 1$.
Or, $\frac{k(k+1)}{2} + 1 > n \Leftrightarrow k(k+1) + 2 > 2n \Leftrightarrow k^2 + k + 2 - 2n > 0$.
À n fixé, il s'agit ici d'une expression polynomiale en k, dont le discriminant est $8n-7$, et dont les racines sont $k_1 = \frac{-1-\sqrt{8n-7}}{2}$ et $k_2 = \frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}$.
Et donc $k^2 + k + 2 - 2n > 0$ si et seulement si $k > \frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}$.

Remarque
Nous avons délibérément ignoré k_1 car il est négatif, et nous ne intéressons ici qu'aux k positifs.

De même, on a $\frac{k(k-1)}{2} + 1 \leqslant n \Leftrightarrow k^2 - k + 2 - 2n \leqslant 0$ si et seulement si $k \leqslant \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$.
Or, $\frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2} = \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} - 1$.
Et donc $u_n = k$ si et seulement si $k \leqslant \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$ et $k + 1 > \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$.
Puisque k est entier, nous reconnaissons là la définition d'une partie entière :

$$u_n = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$

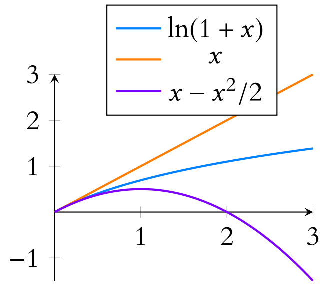
SOLUTION DE L'EXERCICE 1.21

Il s'agit de prouver séparément les deux inégalités $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$ et $\ln(1+x) \leqslant x$.

Pour la première définissons une fonction f sur $\mathbf{R}_+$ en posant $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

Alors f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x} = \dfrac{x^2}{1+x}$.
Et donc pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$, de sorte que f est croissante sur $[0, +\infty[$.
Puisque de plus, $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}.$$



Pour prouver l'autre inégalité, définissons une fonction g sur $\mathbf{R}_+$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.
Alors g est dérivable et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \leqslant 0$.
On en déduit que g est décroissante sur $\mathbf{R}_+$, et puisque $g(0) = 0$, il vient donc, pour tout $x \geqslant 0$,

$$g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leqslant x.$$

En résumé, on a bien, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.22

1. On a $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$. Mais

$$(|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2|a| \cdot |b| + |b|^2 = a^2 - 2|ab| + b^2.$$

Donc $a^2 - 2|ab| + b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2|ab| \leqslant a^2 + b^2 \Leftrightarrow |ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.

2. On a

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}.$$

Or, d'après la question précédente

$$xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \geqslant \frac{2}{x^2+y^2}.$$

Et donc après multiplication par $x^2 + y^2$,

$$\frac{x^2+y^2}{xy} \geqslant \frac{2}{x^2+y^2}(x^2+y^2) \geqslant 2.$$

Danger !
Ne pas oublier de changer le sens de l'inégalité en passant à l'inverse ! Notons que ce passage à l'inverse est bien légitime car il s'agit d'une inégalité entre nombres positifs.

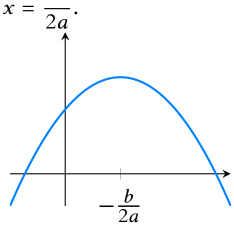
SOLUTION DE L'EXERCICE 1.23

1. Il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2, de coefficient en x^2 négatif : elle admet donc un maximum en $x = \dfrac{1}{2}$, et ce maximum vaut $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Rappel
Une fonction de la forme

$$ax^2 + bx + c, \ a < 0$$

admet un maximum en $x = \dfrac{-b}{2a}$.



2. Commençons par noter que puisque $a \geqslant 0$ et $1 - c \geqslant 0$, alors $a(1-c) \geqslant 0$. Et de même pour $b(1-a)$ et $c(1-b)$.
On a alors

$$a(1-c) \times b(1-a) \times c(1-b) = a(1-a)b(1-b)c(1-c).$$

Or d'après la question précédente, les trois nombres $a(1-a)$, $b(1-b)$ et $c(1-c)$ sont inférieurs à $\dfrac{1}{4}$.
Et donc, puisqu'ils sont positifs, leur produit est inférieur à $\dfrac{1}{4^3}$.

Supposons par l'absurde que les trois nombres $a(1-c)$, $b(1-a)$ et $c(1-b)$ soient supérieurs strictement à $\dfrac{1}{4}$.

Alors leur produit $a(1-a)b(1-b)c(1-c)$ est supérieur strictement à $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$, ce qui est absurde.

Donc nécessairement, l'un **au moins**[16] des trois réels $a(1-c)$, $b(1-a)$, $c(1-b)$ est inférieur à $\dfrac{1}{4}$.

[16] Il se peut tout à fait que deux d'entre eux, voire les trois soient inférieurs à $\frac{1}{4}$.

Solution de l'exercice 1.24

Comme indiqué, procédons par récurrence sur n.

Soit donc $\mathscr{P}(n)$ la propriété «$\forall t \in [0,1],\ 1-nt \leqslant (1-t)^n \leqslant \dfrac{1}{1+nt}$».

Pour $n=1$, on a, quel que soit $t\in[0,1]$, $(1-t)^1 = 1-t$ et $1-nt = 1-t$.
Donc l'inégalité $1-nt \leqslant (1-t)^n$ est évidemment vérifiée.

D'autre part, définissons une fonction f sur $[0,1]$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+t} - (1-t)$.

Alors f est dérivable, et $f'(t) = \dfrac{-1}{(1+t)^2} + 1 = \dfrac{2t+t^2}{(1+t^2)} \geqslant 0$, de sorte que f est croissante sur $[0,1]$.
Puisque $f(0)=0$, on en déduit que f est positive sur $[0,1]$, et donc que pour tout $t\in[0,1]$, $(1-t) \leqslant \dfrac{1}{1+t}$.
Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée, donc notre récurrence est initialisée.

Supposons à présent que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soit $t\in[0,1]$.
On a donc $(1-t)^n \geqslant 1-nt$, ce qui après multiplication par $1-t$ donne $(1-t)^{n+1} \geqslant (1-t)(1-nt)$. Mais

$$(1-t)(1-nt) = 1-(n+1)t + \underbrace{nt^2}_{\geqslant 0} \geqslant 1-(n+1)t.$$

Et donc $(1-t)^{n+1} \geqslant 1-(n+1)t$.
D'autre part, par hypothèse de récurrence, $(1-t)^n \leqslant \dfrac{1}{1+nt}$, ce qui, après multiplication par $1-t\geqslant 0$ donne $(1-t)^{n+1} \leqslant \dfrac{1-t}{1+nt}$.
Or, on a

$$\frac{1-t}{1+nt}\times(1+(n+1)t) = \frac{1+nt-(n+1)t^2}{1+nt} \leqslant \frac{1+nt}{1+nt} \leqslant 1.$$

Et donc $\dfrac{1-t}{1+nt} \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)t}$, de sorte que $(1-t)^{n+1} \leqslant \dfrac{1}{1+(n+1)t}$.
La proposition est donc vérifiée au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence, quel que soit $n\in\mathbf{N}^*$ et quel que soit $t\in[0,1]$,

$$1-nt \leqslant (1-t)^n \leqslant \frac{1}{1+nt}.$$

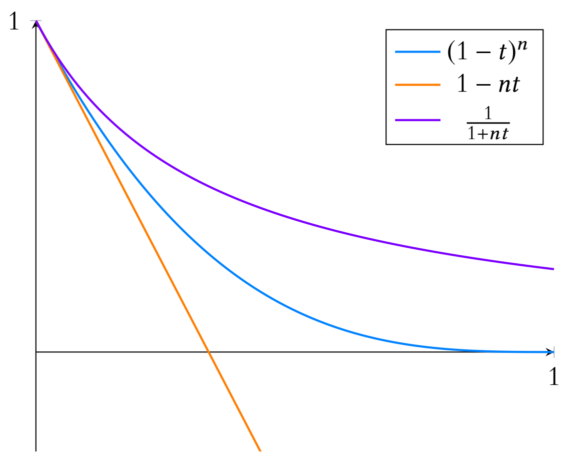


Figure 1.2 – Ici, $n=3$.

Détails

Notons que puisque $t\in[0,1]$, on a bien $1-t\geqslant 0$, et donc le sens de l'inégalité ne change pas après multiplication par $1-t$.

Méthode

Pour prouver $a \leqslant b$, où $b>0$, on peut essayer de prouver que $\frac{a}{b}\leqslant 1$.
Ici, on souhaite prouver que

$$\frac{1-t}{1+nt} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)t}.$$

Pour cela nous divisons donc le membre de gauche par $\frac{1}{1+(n+1)t}$, ce qui revient à le multiplier par $1+(n+1)t$.