

TD 2 : FONCTIONS NUMÉRIQUES

► Généralités sur les fonctions, dérivées

EXERCICE 2.1 Étudier la parité de la fonction $x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$.

F

EXERCICE 2.2 Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation.

PD

- la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
- la somme de deux fonctions monotones est monotone.
- le produit de deux fonctions monotones est monotone.
- le produit de deux fonctions croissantes et positives est croissant.
- si f est T -périodique, alors pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, $g : x \mapsto f(\alpha x)$ est périodique.
- si f et g sont périodiques, alors $g \circ f$ est périodique.
- si $g \circ f$ est bornée, alors g est bornée.
- f est paire si et seulement si $-f$ est impaire.

EXERCICE 2.3 Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \begin{cases} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

AD

- Déterminer les points fixes de f .
- Montrer que $f \circ f$ est bien définie et que $f \circ f = f$.

EXERCICE 2.4 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

PD

EXERCICE 2.5 Fonctions périodiques

PD

- Montrer que pour $k \in \mathbf{N}^*$, $f_k : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{k}$ est k -périodique.
- Que dire d'une fonction périodique et croissante ?

EXERCICE 2.6 Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}_+^* par $f(x) = (2x + 1 + \frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$.

AD

- Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur \mathbf{R}_+ . Étudier la dérivabilité de ce prolongement.
- Déterminer les asymptotes au graphe de f .

EXERCICE 2.7 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble \mathcal{D} sur lequel elle est dérivable, et calculer sa dérivée.

F

- $f : x \mapsto \frac{\ln \sqrt{3e^x - 1}}{4 - x^2}$
- $g : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
- $h : x \mapsto \frac{2^{x-\frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$.

EXERCICE 2.8 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa dérivée $n^{\text{ème}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ (on admettra que ces dérivées $n^{\text{èmes}}$ existent). Indication : on pourra commencer par conjecturer une formule, et la prouver par récurrence sur n .

AD

- $f : x \mapsto \ln(x)$
- $g : x \mapsto \frac{2}{1+3x}$
- $h : x \mapsto e^{ax+b}$, $a \neq 0$
- \sin
- (★) $p : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$.
- $k : x \mapsto 3^x$.

Pour la fonction p , on commencera par déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $p(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

EXERCICE 2.9 Dérivées successives d'une fonction polynomiale

AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit f une fonction de la forme $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, calculer $f^{(k)}(0)$.

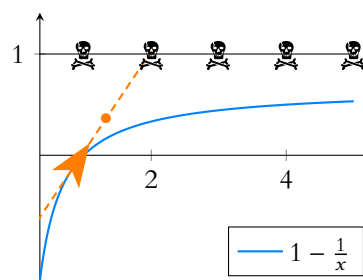
EXERCICE 2.10

PD

Dans un (vieux) jeu vidéo, un vaisseau spatial se déplace sur la courbe \mathcal{C} d'équation $y = 1 - \frac{1}{x}$.

Lorsqu'il tire un missile, celui-ci part en ligne droite suivant la tangente à \mathcal{C} .

Quelle doit être la position du vaisseau au moment où il tire son $k^{\text{ème}}$ missile pour atteindre le $k^{\text{ème}}$ ennemi, situé au point de coordonnées $(k, 1)$?



EXERCICE 2.11 Soit $a > 0$, et soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$. Prouver que f est périodique.

D

EXERCICE 2.12 Une équation fonctionnelle (Oral Polytechnique)

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et telles que pour tous réels strictement positifs x et $y : f(xf(y)) = yf(x) \quad (\mathcal{R})$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution du problème posé.
2. Prouver que si f est une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé, alors le seul éventuel point fixe de f est 1.
3. En déduire que g est la seule solution au problème posé.

► Fonctions usuelles

EXERCICE 2.13

1. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Étudier les variations de $x \mapsto a^x$.
2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

EXERCICE 2.14 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

1. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
2. $3x^2 = 11x^5$
3. $(\star) \pi^{\sin^2(x)} = \cos(\pi x)$

EXERCICE 2.15 Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Montrer que

1. $\text{ch}(x + y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$
2. $\text{sh}(x + y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y)$
3. $\text{ch}(x) = \sqrt{\frac{\text{ch}(2x) + 1}{2}}$
4. $(\star) \text{sh}(x) = \frac{2\text{th}(\frac{x}{2})}{1 - \text{th}^2(\frac{x}{2})}$.

EXERCICE 2.16 Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

EXERCICE 2.17 Nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

EXERCICE 2.18 Soient a, b, c trois réels strictement positifs.

Discuter, suivant les valeurs de a et b , le nombre de solutions de l'équation $a \text{ch}(x) + b \text{sh}(x) = c$, et déterminer ces solutions.

► Bijections

EXERCICE 2.19 Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{3\} & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \frac{2x+1}{x-3} \end{cases}$ réalise une bijection de $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ sur un ensemble

à préciser. Déterminer alors f^{-1} .

EXERCICE 2.20

1. Montrer que l'équation $x^2 \ln(x) = 1$ possède une unique solution.
2. (\star) Déterminer le nombre de points fixes de $f : x \mapsto (x+1)e^{-x}$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la fonction $x \mapsto \cos^k(x)$ possède un unique point fixe.

EXERCICE 2.21 Déterminer le nombre de racines (réelles) des fonctions polynomiales suivantes, où $\lambda \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$:

1. $f : x \mapsto x^5 - x^3 + 1$
2. $g : x \mapsto 3x^5 + 10x^3 - 45x + \lambda$
3. $h : x \mapsto x^{n+2} - (n+2)x^2 + 1$

EXERCICE 2.22 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\text{ch}(x) = \frac{1}{\cos(y)}$.

Vérifier qu'alors $\text{sh}(x) = \tan(y)$.

EXERCICE 2.23 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $y \in \mathbf{R}$ pour que l'équation $xe^x = y$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ possède exactement une solution. Même question mais pour deux solutions.

EXERCICE 2.24 Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et que pour tout $x \in J \setminus \{1\}$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

EXERCICE 2.25 Soit $f :]-a, a[\rightarrow I$ une fonction bijective et impaire.

Montrer que f^{-1} est encore impaire. Que dire si f est paire ?

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 2

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.1

Commençons par nous intéresser au domaine de définition de f , puisque la notion de parité n'aura de sens que si celui-ci est symétrique.

On a $\sqrt{x^2+1}+x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x$.

Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2+1 > x^2$ et donc $\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{x^2} \geq |x| \geq -x$.

Donc f est définie sur \mathbf{R} .

Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Il est clair que pour $x \neq 0$, ceci n'est pas égal à $f(x)$, donc f n'est pas paire.

Nous serions tentés de dire que ce n'est pas égal à $-f(x) = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$, mais ce n'est pas parce qu'on ne voit pas que c'est égal que ça ne l'est pas...

En effet, on a

$$-f(x) = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right).$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2} = \sqrt{x^2+1}-x.$$

Et donc en composant par \ln , $f(-x) = -f(x)$, de sorte que f est impaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.2

- Vrai.** Soient f et g deux fonctions croissantes. Alors si $x \leq y$, alors $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$, donc $f(x)+g(x) \leq f(y)+g(y)$: $f+g$ est croissante.
- Faux.** Soit $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto -x^3$. Alors f est croissante et g est décroissante sur \mathbf{R} . En revanche, on a $(f+g)'(x) = 1-2x^2$, qui n'est pas de signe constant sur \mathbf{R} . Donc $f+g$ n'est pas monotone.
- Faux.** La fonction $f : x \mapsto x$ est croissante sur \mathbf{R} , pourtant $f \times f$ est la fonction carré, qui n'est pas monotone sur \mathbf{R} .
- Vrai.** Soient f et g deux fonctions croissantes et positives. Alors pour $x \leq y$, on a $0 \leq f(x) \leq f(y)$ et $0 \leq g(x) \leq g(y)$, donc en multipliant ces inégalités, $0 \leq f(x)g(x) \leq f(y)g(y)$: la fonction fg est croissante.
- Vrai.** Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a $g\left(x + \frac{T}{\alpha}\right) = f(\alpha x + T) = f(\alpha x) = g(x)$.
Donc g est $\frac{T}{\alpha}$ -périodique.
- Vrai.** Il n'y a même pas besoin que g soit périodique : si T est une période de f , alors pour $x \in \mathcal{D}_f$, $(g \circ f)(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.
Donc $g \circ f$ est T -périodique.
- Faux.** Si g est la fonction $x \mapsto x^2$ et f est la fonction cosinus, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = \cos^2(x) \in [-1, 1]$. Donc $g \circ f$ est bornée, pourtant la fonction g n'est pas majorée (donc pas bornée).
- Faux.** Si f est paire, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-f(-x) = -f(x) = (-f)(x)$.
Donc $-f$ est encore paire, et n'est donc pas impaire... sauf si f est constante¹.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.3

- Il est clair que 0 n'est pas un point fixe de f , et pour $x \in]0, 1]$, alors x est un point fixe de f si et seulement si

$$f(x) = x \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 1.$$

Et donc l'ensemble des points fixes de f est $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$.

Astuce

$|x|$ est toujours à la fois supérieur à x et à $-x$, puisque c'est le plus grand des deux.

Danger !

Sans l'hypothèse de positivité, on ne peut plus multiplier les inégalités (cf question précédente).

¹ Mais il existe des fonctions paires non constantes, comme la fonction carré.

2. Pour prouver que $f \circ f$ est bien définie, il s'agit de prouver que f est à valeurs dans $[0, 1]$.
Si $x = 0$, alors $f(x) = 1 \in [0, 1]$.
Et si $x \in]0, 1]$, alors, par définition de la partie entière,

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \underbrace{1-x}_{\geq 0} < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1.$$

Et donc $f(x) \in [0, 1]$. Ainsi, $f \circ f$ est bien définie.

Soit $x \in [0, 1]$.

Alors, prouver que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(f(x)) = f(x)$ revient à prouver que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x)$ est un point fixe de f .

Soit encore, d'après la question 1, que $f(x) \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$.

Soit donc $x \in [0, 1]$.

► Si $x = 0$, on a $f(x) = 1$ qui est un point fixe de f .

► Si $x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$, alors $f(x) = x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$.

► Si $x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$, alors nous avons déjà prouvé à la question 1 que $1-x < f(x) \leq 1$.

Or, $x \leq \frac{1}{2}$ et donc $1-x \geq \frac{1}{2}$, de sorte que $1-x < f(x) \Rightarrow \frac{1}{2} < f(x)$.

Et donc $f(x) \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$.

Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$, et donc $f(f(x)) = f(x)$.

On en déduit que $f \circ f = f$.

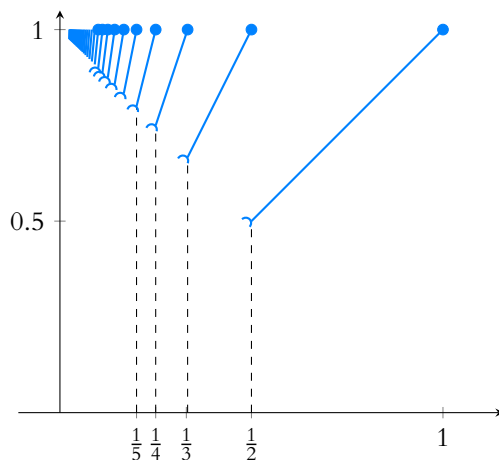


FIGURE 2.1 – Le graphe de f . Les points fixes y sont bien visibles : pour $x > \frac{1}{2}$, le graphe de f coïncide avec la première bissectrice.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.4

Procédons à un raisonnement par l'absurde en supposant que f ne soit pas strictement décroissante.

Cela signifie qu'il existe donc deux réels x et y vérifiant $x < y$ et $f(x) \leq f(y)$.

Mais alors, en appliquant $f \circ f$ à cette inégalité, il vient

$$(f \circ f)(f(x)) \leq (f \circ f)(f(y)) \Leftrightarrow (f \circ f \circ f)(x) \leq (f \circ f \circ f)(y).$$

Mais ceci contredit la stricte décroissance de $f \circ f \circ f$. En effet, puisque $x < y$, nécessairement $(f \circ f \circ f)(x) > (f \circ f \circ f)(y)$.

C'est donc que notre hypothèse de départ est fautive, et donc f est strictement décroissante.

Méthode

Pour prouver que deux fonctions f et g sont égales, il faut prouver :

- qu'elles ont le même ensemble de définition \mathcal{D} (si ce n'est pas évident)
- qu'en tout $x \in \mathcal{D}$ elles prennent la même valeur, i.e. que $f(x) = g(x)$.

⚠ Attention !

La négation de f est strictement décroissante n'est ni « f est strictement croissante », ni « f est croissante » !

Inégalités

Le sens de l'inégalité ne change pas en appliquant $f \circ f$, car il s'agit d'une fonction croissante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.5

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x+k) = \left\lfloor \frac{x+k}{k} \right\rfloor - \frac{[x+k]}{k} = \left\lfloor \frac{x}{k} + 1 \right\rfloor - \frac{[x+k]}{k}.$$

Or nous savons que pour tout réel x et tout entier n , $[x+n] = [x] + n$.

Donc en particulier, $\left\lfloor \frac{x}{k} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + 1$ et $[x+k] = [x] + k$.

On en déduit que $f(x+k) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + 1 - \frac{[x]+k}{k} = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{[x]}{k} = f(x)$.

Et donc f est bien k -périodique.

2. Une fonction périodique et croissante ne peut qu'être constante.

Supposons qu'il existe une fonction f , T -périodique et croissante qui ne soit pas constante.

Alors il existe deux réels x et y vérifiant $x < y$ et $f(x) < f(y)$.

Or, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x + kT > y$.

Et donc $f(x + kT) = f(x) < f(y)$.

Mais ceci contredit alors la croissance de f , d'où une contradiction.

Ainsi, toute fonction périodique et croissante est constante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.6

1. Il s'agit de prouver que f possède une limite finie en 0.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+1)e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

En revanche, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$ est une forme indéterminée.

Mais le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ nous donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X}$.

Il est alors connu² que cette limite est nulle et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Donc la fonction f se prolonge par continuité en 0 en une fonction \tilde{f} définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a alors, pour $x > 0$,

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Comme précédemment, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = 0$, de sorte que \tilde{f} est dérivable en 0, et $\tilde{f}'(0) = 0$.

2. On a $\frac{f(x)}{x} = \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$.

Donc si Γ_f possède une asymptote en $+\infty$, elle a 2 pour coefficient directeur.

Et alors

$$f(x) - 2x = 2x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Il est facile³ de constater que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 1$.

Pour l'autre partie, procédons au changement de variable $X = \frac{1}{x}$, de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} 2 \frac{e^{-X} - e^{-0}}{X}.$$

Nous reconnaissons là le taux d'accroissement en 0 de $x \mapsto e^{-x}$, dont la dérivée en 0 vaut -1 .

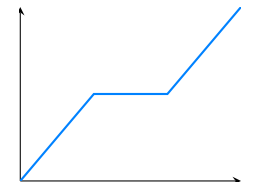
Et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -1$, de sorte que la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à Γ_f au voisinage de $+\infty$.

Intuition

Essayez de tracer une fonction à la fois périodique et croissante, vous vous en convaincrez vite !

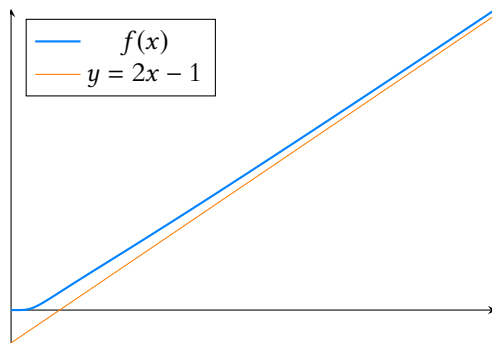
⚠ Attention !

Une fonction croissante qui n'est pas constante n'est pas nécessairement strictement croissante. Par exemple :



² Et ce sera reprobé plus tard.

³ Il n'y a pas de forme indéterminée.



SOLUTION DE L'EXERCICE 2.7

1. On a $3e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > -\ln(3)$.

Or, la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur \mathbf{R}_+^* , à valeurs dans \mathbf{R}_+^* et de même, \ln est dérivable sur \mathbf{R}_+^* .

Donc en notant $f_1 : x \mapsto 3e^x - 1$, $f_2 : t \mapsto \sqrt{t}$ et $f_3 : y \mapsto \ln(y)$, $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ est définie et dérivable⁴ sur $]-\ln(3), +\infty[$.

Pour calculer sa dérivée, notons que $\ln \sqrt{3e^x - 1} = \frac{1}{2} \ln(3e^x - 1)$. Et alors la dérivée de $x \mapsto \ln \sqrt{3e^x - 1} = \frac{1}{2} \ln(f_1)$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2} \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{1}{2} \frac{3e^x}{3e^x - 1}.$$

De plus, $4 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \{-2, 2\}$.

Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{4 - x^2}$ est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Par produit, on en déduit que f est dérivable sur $]-\ln(3), 2[\cup]2, +\infty[$ et que pour x dans cet ensemble,

$$f'(x) = \frac{\frac{3e^x}{6e^x - 2}(4 - x^2) + 2x \ln(\sqrt{3e^x - 1})}{(4 - x^2)^2}.$$

2. Puisque $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est dérivable que sur \mathbf{R}_+^* (bien qu'elle soit définie sur \mathbf{R}_+), il nous faut déterminer à quelle condition $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

Un tableau de signe nous permet de répondre facilement :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+x$		-	0	+
$1-x$		+	+	0
$\frac{1+x}{1-x}$		-	0	+

Donc g est dérivable sur $]-1, 1[$.

Notons alors $g_1 : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ et $h(x) = \sqrt{x}$. Alors $g_1'(x) = \frac{1-x + (1+x)}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$.

D'autre part, $g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Et donc par dérivation d'une composée,

$$g'(x) = (g_2 \circ g_1)(x) = g_1'(x)g_2'(g_1(x)) = \frac{2}{(x-1)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{x+1}}.$$

3. Notons que $2^{x-\frac{1}{x}} = \exp\left(\left(x - \frac{1}{x}\right)\ln(2)\right)$ est dérivable sur \mathbf{R}^* et que sa dérivée est

$$x \mapsto \ln(2) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) 2^{x-\frac{1}{x}}.$$

⁴ Car composée de fonctions dérivables.

D'autre part, $x^2 - 1$ est non nul si et seulement si $x \neq \pm 1$, donc h est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup] -1, 0[\cup] 0, 1[\cup] 1, +\infty[$ et sa dérivée est

$$h' : x \mapsto \frac{\ln(2) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) 2^{x-\frac{1}{x}} (x^2 + 1) - 2x 2^{x-\frac{1}{x}}}{(x^2 - 1)^2} = \frac{1}{x^2(x^2 - 1)^2} 2^{x-\frac{1}{x}} (\ln(2)(x^4 - 1) - 2x^3).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.8

1. On a $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$, $f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5}$.

Il est donc raisonnable de conjecturer que pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.
Prouvons le par récurrence. Plus précisément, pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « f est n fois dérivable et quel que soit $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ ».

Pour $n = 1$, la propriété est vraie.

Supposons que $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Alors $f^{(n)}$ est dérivable puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ l'est, et on a

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{-n}{x^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} = (-1)^{n+1-1} \frac{(n+1-1)!}{x^{n+1}}.$$

Donc la propriété est encore vraie au rang $n+1$, de sorte que par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

2. Commençons par noter que l'ensemble de définition de g est $\mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\} = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

On a alors, pour $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$,

$$g'(x) = -\frac{2 \times 3}{(1+3x)^2}, g''(x) = \frac{2 \times 2 \times 3^2}{(1+3x)^3}, g^{(3)}(x) = -\frac{2 \times 2 \times 3 \times 3^3}{(1+3)^4}, \text{ etc}$$

Prouvons donc par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n 2 \times 3^n \times n!}{(1+3x)^{n+1}}$.

Pour $n = 1$, on a $g'(x) = -\frac{6}{(1+3x)^2} = \frac{(-1)^1 2 \times 3^1 \times 1!}{(1+3x)^{1+1}}$.

Donc la récurrence est initialisée.

Supposons que $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n 2 \times 3^n \times n!}{(1+3x)^{n+1}}$.

Alors $g^{(n)}$ est dérivable car quotient de deux fonctions dérivables, et

$$g^{(n+1)}(x) = (-1)^n 2 \times 3^n \times n! \frac{-3(n+1)}{(1+3x)^{n+2}} = (-1)^{n+1} 2 \times 3^{n+1} \times (n+1)! \frac{1}{(1+3x)^{n+2}}.$$

Et donc la propriété est encore vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n 2 \times 3^n \times n!}{(1+3x)^{n+1}}$.

3. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h'(x) = ae^{ax+b} = ah(x)$.
Donc $h''(x) = ah'(x) = a^2h(x)$, puis $h^{(3)}(x) = a^2h'(x) = a^3h(x)$.
Une récurrence rapide prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h^{(n)}(x) = a^n h(x) = a^n e^{ax+b}.$$

4. Les premières dérivées de \sin sont $\cos, -\sin, -\cos, \sin$. Puis les suivantes sur $\cos, -\sin, -\cos, \sin$ etc.

Et donc une certaine périodicité revient dans les dérivées : dès que l'on dérive 4 fois, on retombe sur \sin .

Nous pouvons donc distinguer 4 cas :

- Si n est de la forme $4k$, $k \in \mathbf{N}$ (autrement dit si n est divisible par 4) : alors $\sin^{(n)} = \sin$.

Dérivabilité

Notons que, contrairement à ce que demandait l'énoncé, nous avons ici prouvé l'existence des dérivées $n^{\text{èmes}}$. Les preuves sont similaires pour les autres fonctions, et nous les omettons (nous aurons bientôt des outils plus puissants pour prouver sans efforts l'existence de ces dérivées).

Méthode

Pour conjecturer la bonne formule, mieux vaut essayer de comprendre ce qui se passe à chaque fois qu'on dérive (ici c'est le numérateur qui pose problème). Lorsqu'on dérive $g^{(n-1)}$, il y a un 3 qui apparaît au numérateur (qui est la dérivée de $1+3x$), mais également un $-n$ (qui vient de la dérivée de la puissance n au dénominateur). Et comme il y avait également un 2 au numérateur au départ, on le garde.

- Si n est de la forme $4k + 1$, $k \in \mathbf{N}$: alors $\sin^{(n)} = \cos$.
- Si n est de la forme $4k + 2$, $k \in \mathbf{N}$: alors $\sin^{(n)} = -\sin$.
- Si n est de la forme $4k + 3$, $k \in \mathbf{N}$: alors $\sin^{(n)} = -\cos$.

Autrement dit

◀ Ce cas correspond à n pair mais non divisible par 4.

Notons que si l'on voulait être totalement convaincant, on pourrait faire une récurrence rapide pour prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\sin^{(4k)} = \sin$.

Et alors $\sin^{(4k+1)} = (\sin^{(4k)})' = \sin' = \cos$, puis $\sin^{(4k+2)} = (\sin^{(4k+1)})' = -\sin$, etc.

Alternative : il existe un moyen plus simple de décrire les dérivées successives de \cos , et qui consiste à remarquer que $-\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Donc $\cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Donc $\cos''(x) = \cos'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \pi\right)$.

On prouve alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(k)(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.

Une formule analogue existe pour le sinus.

5. Notons que p est définie sur \mathbf{R} privé de -1 et 1 .

Suivons l'indication donnée, et commençons par chercher deux réels a et b tels que pour

tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $p(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$.

Pour a et b réels, et $x \neq \pm 1$, on a

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + b(x+1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x + (b-a)}{x^2-1}.$$

Donc en particulier, cette quantité vaut $p(x)$ si pour tout $x \neq \pm 1$, $(a+b)x + (b-a) = 1$.

Or deux polynôme sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients, ce qui est le

cas si et seulement si $\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $p(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$.

Il nous faut donc calculer les dérivées successives de $p_1 : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x-1}$.

Ces deux cas se traitant de la même manière, calculons directement les dérivées successives de $f_c : x \mapsto \frac{1}{x+c}$.

On a alors $f_c'(x) = -\frac{1}{(x+c)^2}$, $f_c''(x) = \frac{2}{(x+c)^3}$, $f_c^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+c)^4}$.

Et alors une récurrence rapide, similaire à celle de la question 2 prouve que pour tout

$n \in \mathbf{N}^*$, $f_c^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+c)^{n+1}}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \neq \pm 1$,

$$p^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right).$$

6. Rappelons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $3^x = e^{x \ln 3}$.

Et donc $k'(x) = (\ln 3)e^{x \ln 3}$, $k''(x) = (\ln 3)^2 e^{x \ln 3}$, etc, et donc une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$k^{(n)}(x) = (\ln 3)^n e^{x \ln 3} = (\ln 3)^n 3^x.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.9

Pour $k = 0$, on a $f^{(0)}(0) = f(0) = a_0$.

Pour $k = 1$, $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$ et donc $f^{(1)}(0) = f'(0) = a_1$.

Pour $k = 2$, on a $f''(x) = 2a_2 + 3 \times 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}$ et donc $f^{(2)}(0) = 2a_2$.

En dérivant encore une fois, $f^{(3)}(x) = 3 \times 2a_3 + 4 \times 3 \times 2a_4x + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$ et donc $f^{(3)}(0) = 6a_3$.

Prouvons par récurrence sur $k \leq n$ que

$$f^{(k)}(x) = k(k-1) \dots 1a_k + (k+1)k \dots 2a_{k+1}x + \dots + n(n-1) \dots (n-k+1)a_nx^{n-k}$$

$$= k!a_k + (k+1)!a_{k+1}x + \dots + \frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k}.$$

La récurrence a été largement initialisée ci-dessus.

Supposons donc la propriété vraie pour k , et supposons que $k+1 \leq n$.

Alors en dérivant $f^{(k)}$, on obtient

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (k+1)!a_{k+1} + \frac{(k+2)!}{(k+2-k)!}2a_{k+2}x + \dots + \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)a_n x^{n-k-1} \\ &= (k+1)!a_{k+1} + (k+2)!a_{k+2}x + \dots + \frac{n!}{(n-k-1)!}a_n x^{n-(k+1)} \\ &= (k+1)!a_{k+1} + (k+2)!a_{k+2}x + \dots + \frac{n!}{(n-(k+1))!}a_n x^{n-(k+1)}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

En particulier, pour $k \leq n$, on a $f^{(k)}(0) = k!a_k$.

Enfin, puisque $f^{(n)}$ est constante (égale à $n!a_n$), $f^{(n+1)}$ est nulle, de même que toutes les dérivées suivantes.

Et donc pour $k > n$, $f^{(k)}(0) = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.10

La fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbf{R}_+^* , avec $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.

Donc au point de \mathcal{C} d'abscisse a , la tangente à \mathcal{C} est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \frac{1}{a^2}(x-a) + 1 - \frac{1}{a}$.

Et donc le point $(k, 1)$ appartient à cette tangente si et seulement si

$$1 = \frac{1}{a^2}(k-a) + 1 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{k}{a^2} = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a = \frac{k}{2}.$$

Par conséquent le joueur doit tirer son $k^{\text{ème}}$ missile lorsque son vaisseau se trouve au point de coordonnée $\left(\frac{k}{2}, \frac{k-2}{k}\right)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.11

Notons que l'équation implique que nécessairement $f(x)$ est toujours compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 (car $f(x) - f(x)^2 \geq 0$ si et seulement si $f(x) \in [0, 1]$).

On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+2a) &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f(x+a)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - f(x)^2} - f(x) + f(x)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$f(x) - \frac{1}{2} \geq 0.$$

Et donc ceci prouve que f est $2a$ -périodique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.12

1. Il est bien connu que g tend bien vers 0 en $+\infty$.

De plus, pour deux réels strictement positifs x et y , on a

$$g(xg(y)) = \frac{1}{xg(y)} = \frac{1}{x \frac{1}{y}} = \frac{y}{x} \text{ et } yg(x) = \frac{y}{x}.$$

Donc g est bien solution du problème posé.

Remarque

L'hypothèse de récurrence semble plus forte que le résultat que l'on souhaite au final.

C'est pourtant indispensable, car la connaissance de la valeur de $f^{(k)}(0)$ ne peut pas suffire à déterminer la valeur de $f^{(k+1)}(0)$: la valeur d'une fonction en un point ne suffit pas à déterminer la valeur de sa dérivée en ce même point. Penser par exemple aux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$, qui valent toutes deux 0 en 0, mais n'ont pas le même nombre dérivé en 0.

2. Si f est une solution, et si α est un point fixe de f , alors $f(\alpha) = \alpha$.
 Alors⁵, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x\alpha) = \alpha f(x)$.
 Donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x\alpha^2) = f((x\alpha)\alpha) = \alpha f(x\alpha) = \alpha^2 f(x)$.
 Puis de même, $f(x\alpha^3) = \alpha f(x\alpha^2) = \alpha^3 f(x)$.
 Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x\alpha^n) = \alpha^n f(x)$.
 Notons que si $\alpha = 1$, cette relation ne nous apprend pas grand chose : $f(x) = f(x)$...
 ► En revanche, supposons que $\alpha > 1$. Alors $x\alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et donc par hypothèse,
 $f(x\alpha^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 Mais $f(x\alpha^n) = \alpha^n f(x)$. Or, f étant supposée à valeurs dans \mathbf{R}_+^* , $f(x)$ est non nul, et donc
 $\alpha^n f(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, d'où une contradiction.
 Donc déjà, on ne peut pas avoir $\alpha > 1$.

► Supposons à présent $\alpha < 1$. On a toujours $f(x\alpha^n) = \alpha^n f(x)$, mais cette fois, $\alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui ne nous avance pas beaucoup...

Remarquons alors que $f(1) = f\left(\alpha \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \alpha = 1$.

Et alors $1 = f(1) = f\left(\frac{1}{\alpha} \alpha\right) = \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ de sorte que $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$.

Et donc $\frac{1}{\alpha}$ est également un point fixe de f .

Or, $\frac{1}{\alpha} > 1$, et nous avons déjà dit qu'il ne pouvait y avoir de points fixes supérieurs strictement à 1.

Donc il n'y a pas non plus de points fixes de f dans $]0, 1[$, de sorte que le seul point fixe éventuel de f est 1.

3. Nous n'avons pas encore dit qu'une fonction f solution au problème posé possède un point fixe ! Mais notons que si $x \in \mathbf{R}_+^*$, alors en prenant $y = x$ dans la relation (\mathcal{R}) , on a $f(xf(x)) = xf(x)$.
 Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $xf(x)$ est un point fixe de f , qui possède donc au moins un point fixe.
 Et d'après la question précédente, ce point fixe ne peut être que 1.
 Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $xf(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x} = g(x)$.
 Et donc g est la seule fonction qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.13

1. Notons $f_a : x \mapsto a^x$. Alors f_a est dérivable sur \mathbf{R} et

$$f_a'(x) = \ln(a)e^{x \ln a} = \ln(a)a^x.$$

En particulier, f_a' est du signe de $\ln(a)$.

Donc si $a = 1$, f_a est constante, si $a > 1$, f_a est strictement croissante et si $a < 1$, alors f_a est strictement décroissante.

2. Il est évident que $x = 1$ est une solution de l'équation.
 La fonction $f : x \mapsto 2^x + 3^x$ est strictement croissante car somme de deux fonctions strictement croissantes.
 Et donc si $x > 1$, $f(x) > f(1) = 5$, et donc x n'est pas solution de l'équation de départ.
 De même, si $x < 1$, alors $f(x) < 5$, et donc x n'est pas solution.
 On en déduit que l'équation $2^x + 3^x = 5$ possède une unique solution, qui vaut 1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.14

1. Notons que l'équation n'a de sens que pour $x \geq 0$, et que 0 est clairement solution.
 Pour $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x} \ln(x)} = e^{x \ln(\sqrt{x})} \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln(x) = x \ln(x^{1/2}) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln(x) = \frac{x}{2} \ln(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow 4x = x^2 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Donc 0 et 4 sont les seules solutions de l'équation.

⁵ En prenant $y = \alpha$ dans la relation (\mathcal{R}) .

Détails

Nous avons utilisé deux fois la relation (\mathcal{R}) : une fois avec $x = \frac{1}{\alpha}$ et $y = \alpha$ et une autre fois avec $x = \alpha$ et $y = \frac{1}{\alpha}$.

Alternative

Une fonction strictement monotone ne peut prendre deux fois la même valeur. Or f prend la valeur 5 en 1, elle ne peut donc la prendre nulle part ailleurs.

Rappel

$0^0 = 1$.

⚠ Attention !

Bien que l'équation ait un sens pour $x = 0$, l'expression avec des \ln n'est valable que pour $x > 0$.

2. L'équation s'écrit encore $e^{x^2 \ln(3)} = e^{x^5 \ln(11)} \Leftrightarrow x^2 \ln(3) = x^5 \ln(11)$.
Il est clair que 0 est solution, et pour $x \neq 0$, cette équation équivaut à

$$x^3 = \frac{\ln(3)}{\ln(11)} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{\ln(3)}{\ln(11)}}.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{0, \sqrt[3]{\frac{\ln(3)}{\ln(11)}}\right\}$.

3. On a $\pi^{\sin^2(x)} = e^{\sin^2(x) \ln(\pi)} \geq e^0 = 1$.
D'autre part, $\cos(\pi x) \leq 1$.

Donc l'équation est satisfaite si et seulement si $\begin{cases} \cos(\pi x) = 1 \\ \pi \sin^2(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\pi x) = 1 \\ \sin^2(x) = 0 \end{cases}$

Or $\cos(\pi x) = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\pi x = 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k$.

Mais d'autre part, $\sin(x) = 0$ si et seulement si il existe $\ell \in \mathbf{Z}$ tel que $x = \ell\pi$.

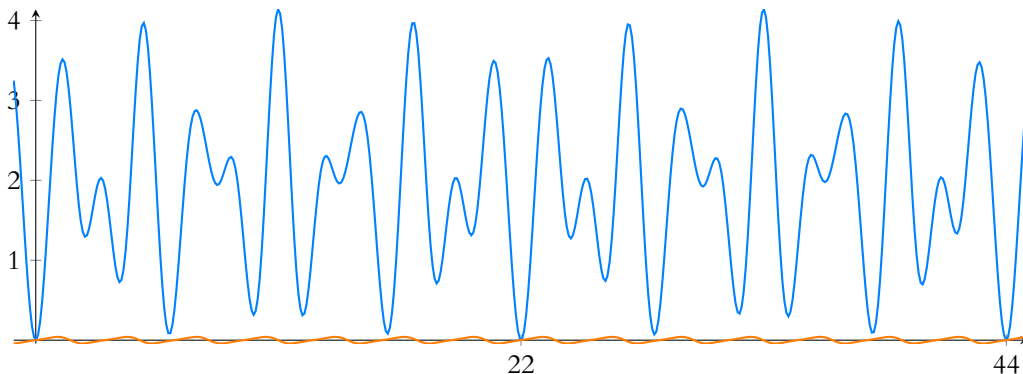
Il est clair que 0 est solution, et si $x \neq 0$ est une solution, avec $x = 2k = \ell\pi$, alors

$$\pi = \frac{2k}{\ell} \in \mathbf{Q}.$$

Puisque π est irrationnel, ceci est impossible, et donc 0 est l'unique solution de l'équation. J'en profite pour signaler un fait amusant, pour lequel je n'ai pas d'explication : en observant le graphique de $f : x \mapsto \pi \sin^2(x) - \cos(\pi x)$, on a de prime abord l'impression qu'il s'agit d'une fonction 22-périodique.

Et de fait, si l'on essaie de superposer le graphique de f à celui de $x \mapsto f(x + 22)$, ils ont l'air de se superposer... jusqu'à ce qu'on zoome un peu.

Nous avons tracé ci-dessous le graphique de la fonction⁶ $g : x \mapsto f(x + 22) - f(x)$, et s'il est clair que celle-ci n'est pas nulle (et donc que f n'est pas 22-périodique), il est quand même troublant de constater que son amplitude ne dépasse pas le centième de celle de f .



Irrationnel
L'irrationalité de π a été mentionnée pour l'instant, mais n'a pas été prouvée (ce qui sera peut-être fait en devoir en cours d'année). Une «bonne» raison pour que π soit irrationnel est tout simplement que si π était égal à une fraction, on vous aurait déjà fait apprendre cette fraction !

⁶ Qui elle-même a presque l'air d'être 3-périodique...

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.15

1. Partons plutôt du membre de droite :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}) \\ &= \frac{1}{4} (2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}) \\ &= \operatorname{ch}(x+y). \end{aligned}$$

2. De même, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}) \\ &= \frac{1}{4} (2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) \\ &= \operatorname{sh}(x+y). \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2} &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left((e^x)^2 + (e^{-x})^2 + 2e^x e^{-x} \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 = \operatorname{ch}^2(x).\end{aligned}$$

Et donc puisque $\operatorname{ch}(x) \geq 0$, il vient $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(x)} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2}}$.

4. On a, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &= \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \operatorname{sh}\left(2\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sh}(x).\end{aligned}$$

Signe !

Il faut bien s'assurer de la positivité avant de passer à la racine carrée, sans cela nous pourrions juste affirmer que

$$|\operatorname{ch}(x)| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2}}.$$

C'est la formule de la question 2, dans le cas particulier où $x = y$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.16

L'inégalité proposée est équivalente, en appliquant le logarithme des deux côtés, à

$$x \ln(x) + (1 - x) \ln(1 - x) \geq -\ln(2).$$

Notons donc f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = x \ln(x) + (1 - x) \ln(1 - x)$. Alors f est dérivable sur \mathbf{R}_+^* car somme de produit de fonctions dérivables, et

$$f'(x) = \ln(x) + x \frac{1}{x} - (1 - x) \frac{1}{1 - x} - \ln(1 - x) = \ln\left(\frac{x}{1 - x}\right).$$

On a donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1 - x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 - x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Par conséquent, le tableau de variations de f est donné par :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	0	\searrow	$-\ln(2)$
		\nearrow	0

Donc la fonction f admet un minimum en $\frac{1}{2}$, et ce minimum vaut $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

Ainsi, pour tout $x \in]0, 1[$, on a bien $x \ln(x) + (1 - x) \ln(1 - x) \geq -\ln(2)$ et donc

$$x^x(1 - x)^{1 - x} \geq \frac{1}{2}.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $x = \frac{1}{2}$, car le minimum de f n'est atteint qu'en $x = \frac{1}{2}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.17

Notons k le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10. Alors

$$10^{k-1} \leq n < 10^k.$$

Signes

La seconde équivalence n'en est une que parce que $1 - x > 0$.

Et donc en passant au logarithme⁷,

$$(k-1)\ln(10) \leq \ln n < k\ln(10) \Leftrightarrow k-1 \leq \log_{10}(n) < k.$$

Et donc $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor = k-1 \Leftrightarrow k = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.18

On a

$$\begin{aligned} a \operatorname{ch}(x) + b \operatorname{sh}(x) = c &\Leftrightarrow a(e^x + e^{-x}) + b(e^x - e^{-x}) = 2c \\ &\Leftrightarrow (a+b)e^x + (a-b)e^{-x} = 2c \\ &\Leftrightarrow (a+b)e^{2x} - 2ce^x + (a-b) = 0. \end{aligned}$$

Posons donc $X = e^x$, de sorte que $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$.

Il s'agit d'un polynôme de degré 2 en X , dont le discriminant est $\Delta = 4c^2 - 4(a+b)(a-b) = 4(c^2 - (a^2 - b^2))$.

► Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow c^2 < a^2 - b^2$, alors l'équation ne possède pas de solution.

► Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2$, alors le polynôme possède une unique racine $X = \frac{c}{a+b}$.

Or, $X = \frac{c}{a+b} \Leftrightarrow e^x = \frac{c}{a+b} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{c}{a+b}\right)$.

Donc l'équation de départ possède $\ln\left(\frac{c}{a+b}\right)$ comme unique solution.

► Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow c^2 > a^2 - b^2$.

Alors le polynôme possède deux racines, qui sont

$$X_1 = \frac{2c + \sqrt{\Delta}}{2(a+b)} = \frac{c + \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}}{a+b} \text{ et } X_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}}{a+b}.$$

Il est évident que X_1 est strictement positif, et que $e^x = X_1 \Leftrightarrow x = \ln(X_1)$.

En revanche le signe de X_2 est moins évident.

Plus précisément, X_2 est du signe de $c - \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}$. Mais

$$\begin{aligned} c - \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)} > 0 &\Leftrightarrow c > \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)} \\ &\Leftrightarrow c^2 > c^2 - (a^2 - b^2) \\ &\Leftrightarrow a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b. \end{aligned}$$

Donc si $a > b$, l'équation de départ possède deux solutions qui sont $\ln(X_1)$ et $\ln(X_2)$, et si $a \leq b$ (tout en gardant $\Delta > 0$), alors l'équation ne possède qu'une solution, qui est $\ln(X_1)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.19

La fonction f est dérivable sur $] -\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$ car quotient de deux fonctions dérivables.

On a alors, pour $x \neq 3$,

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} = -\frac{7}{(x-3)^2} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$.

On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 2.$$

Et de même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 2$.

D'autre part, lorsque x tend vers 3 par valeurs inférieures, alors $2x+1 \rightarrow 6$ et $x-3 \rightarrow 0$, en restant négatif, de sorte que $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$.

Au contraire, lorsque x tend vers 3 par valeurs supérieures, alors $x-3 \rightarrow 0$ en restant positif et donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.

En appliquant le théorème de la bijection sur $] -\infty, 3[$, où f est continue⁸ et strictement décroissante, f réalise une bijection de $] -\infty, 3[$ sur $] -\infty, 2[$.

⁷ Ce qui préserve le sens des inégalités puisque le \ln est strictement croissant.

Détails

On a multiplié l'égalité par $e^x \neq 0$.

Le passage au carré est bien une équivalence puisque c est positif.

⚠ Danger !

On n'en déduit pas directement que f est décroissante sur son domaine de définition, car celui-ci n'est pas un intervalle !

⁸ Car quotient de deux fonctions continues.

De même, en appliquant le théorème de la bijection sur $]3, +\infty[$, on montre que f réalise une bijection de $]3, +\infty[$ sur $]2, +\infty[$.

Autrement dit, un réel strictement inférieur à 2 possède un unique antécédent par f dans $] - \infty, 3[$ et aucun dans $]3, +\infty[$.

Inversement, tout réel strictement supérieur à 2 possède un unique antécédent dans $]3, +\infty[$ et aucun dans $] - \infty, 3[$.

Donc tout réel différent de 2 possède un unique antécédent par f dans $\mathbf{R} \setminus \{2\}$.

Ainsi, f réalise une bijection de $] - \infty, 3[\cup]3, +\infty[$ sur $] - \infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

Pour déterminer sa bijection réciproque, considérons un réel $y \neq 2$, et résolvons l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x .

On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-3} = y \\ &\Leftrightarrow 2x+1 = y(x-3) \\ &\Leftrightarrow x(2-y) = -3y-1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1+3y}{y-2}. \end{aligned}$$

Et donc la bijection réciproque de f est $f^{-1} : \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \setminus \{3\} \\ y & \longmapsto & \frac{1+3y}{y-2}. \end{cases}$

Remarque : montrer que l'équation $f(x) = y$ possède une et une seule solution suffit à prouver que f est bijective... mais pour cela il faut déjà savoir sur quel ensemble elle est bijective (ce pour quoi nous avons utilisé le théorème de la bijection).

Cela dit, en essayant de résoudre $f(x) = y$, on réalise rapidement qu'il y a une et une seule solution si $y \neq 2$, et aucune si $y = 2$, donc on retrouve ainsi le fait que l'ensemble image soit $\mathbf{R} \setminus \{2\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.20

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \ln(x) \end{cases}$. Alors f est dérivable sur \mathbf{R}_+^* car produit de fonctions dérivables, et

$$f'(x) = 2x \ln(x) + \frac{x^2}{x} = x(2 \ln(x) + 1).$$

Et donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \ln(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{-1/2}$.

Enfin, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Le tableau de variations de f est donc donné par

x	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	0	$-\frac{e^{-1}}{2}$	$+\infty$

Il est donc clair⁹ que f prend des valeurs négatives sur $]0, e^{-1/2}[$, et donc cet intervalle ne saurait contenir de solution à l'équation $f(x) = 1$.

En revanche, sur $]e^{-1/2}, +\infty[$, f est dérivable, elle y est strictement croissante, et donc par le théorème de la bijection, réalise une bijection de $]e^{-1/2}, +\infty[$ sur $]-\frac{e^{-1}}{2}, +\infty[$.

Et par conséquent, il existe un unique $x \in]-\frac{e^{-1}}{2}, +\infty[$ vérifiant $f(x) = 1$.

2. Pour $x \in \mathbf{R}$, posons $g(x) = f(x) - x$, de sorte que x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$.

Alors g est dérivable sur \mathbf{R} car somme et produit de fonctions qui le sont, et on a, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = -(x+1)e^{-x} + e^{-x} - 1 = -xe^{-x} - 1.$$

Monotonie

Nous avons là un exemple de bijection qui n'est pas monotone.

Limite

Notons que la limite de f en 0 fait apparaître une forme indéterminée $0 \times -\infty$, et nous ne pouvons conclure qu'à l'aide des résultats de croissances comparées du cours.

⁹ Bien entendu, un tableau de variations n'est pas une preuve, mais a-t-on vraiment besoin de tout écrire ? Ici, l'argument clé est que f est décroissante sur $]0, e^{-1/2}[$, et puisque f tend vers 0 en 0, elle prend donc des valeurs négatives sur $]0, e^{-1/2}[$. Mais tout le monde doit pouvoir le comprendre sur le tableau de variation.

Le signe de g' n'est pas évident, donc dérivons une fois de plus : g' est dérivable et pour $x \in \mathbf{R}$, $g''(x) = (x-1)e^{-x}$.

Donc le tableau de variations de g' est donné par

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$+\infty$	$-e^{-1} - 1$	-1

En appliquant le théorème de la bijection à g' , sur $] -\infty, 1]$, on prouve qu'il existe un unique $\alpha \in] -\infty, 1[$ tel que $g'(\alpha) = 0$.

On peut même, bien que ce ne soit pas utile ici, être plus précis : $g'(-1) = e - 1 > 0$, donc $\alpha > -1$.

De même, $g'(0) = -1$, donc $\alpha \in] -1, 0[$.

Nous pouvons donc désormais dresser le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$g(\alpha)$	$-\infty$

Notons que la valeur exacte de $g(\alpha)$ n'est pas connue, mais puisque $g(0) = 1$, $g(\alpha) \geq g(0) > 0$. Et donc g est dérivable et strictement croissante sur $] -\infty, \alpha[$: elle réalise une bijection de $] -\infty, \alpha[$ sur $] -\infty, g(\alpha)[$.

En particulier, il existe¹⁰ un unique $x_0 \in] -\infty, \alpha[$ tel que $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

De même, g réalise une bijection de $] \alpha, +\infty[$ sur $] -\infty, g(\alpha)[$, et donc il existe un unique $x_2 \in] \alpha, +\infty[$ tel que $g(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = x_2$.

Au final, f possède deux points fixes, qui sont x_1 et x_2 .

3. Il s'agit de prouver qu'il existe un unique $x \in \mathbf{R}$ tel que $\cos^k(x) = x$.

Notons dès à présent que $-1 \leq \cos^k(x) \leq 1$, et donc que l'équation $\cos^k(x) = x$ ne possède pas de solution en dehors de $[-1, 1]$.

De plus, puisque $[-1, 1] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, pour $x \in [-1, 1]$, $\cos^k(x) \geq 0$. Et donc $\cos^k(x) = x$ n'a pas de solution dans $[-1, 0[$. Pour $x \in [0, 1]$, posons alors $f(x) = \cos^k(x) - x$. Un réel $x \in [0, 1]$ est alors un point fixe de \cos^k si et seulement si $f(x) = 0$.

Or, f est dérivable sur $[0, 1]$, avec $f'(x) = -k \sin(x) \cos^{k-1}(x) - 1$.

Toujours car $[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}[$, pour $x \in [0, 1]$, $\sin(x) \geq 0$.

Et donc $f'(x) < 0$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Or f est continue sur cet intervalle, et $f(0) = 1$ et $f(1) = \cos^k(1) - 1 < 0$.

Par le théorème de la bijection, il existe donc une unique solution à l'équation $f(x) = 0$, et donc \cos^k possède un unique point fixe.

¹⁰ Car 0 est dans l'intervalle image.

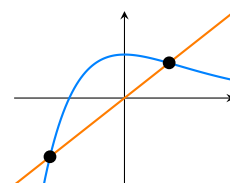
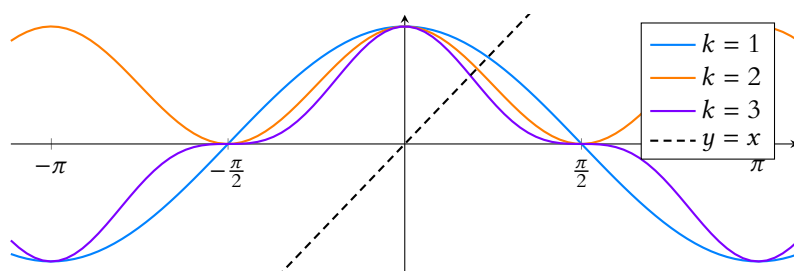


FIGURE 2.2- Les deux points fixes de f .

Détails

Puisque 1 n'est pas un multiple de π , $\cos^k(1) \neq 1$.



SOLUTION DE L'EXERCICE 2.21

1. La fonction f est dérivable¹¹, et sa dérivée est $f' : x \mapsto 5x^4 - 3x^2 = 5x^2 \left(x^2 - \frac{3}{5}\right)$.

¹¹ Comme toute fonction polynomiale.

Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - \frac{3}{5}$.

Et donc le tableau de variations de f est donné par

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	\searrow	$f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	\nearrow	$+\infty$

Mais $f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = -\left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} + \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} + 1$.

Mais puisque $0 < \frac{3}{5} < 1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} < \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}$, et donc $f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) > 1$.

D'autre part, $f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} - \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}}_{<1} + 1 \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} > 0$.

Sur l'intervalle $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right]$, f est strictement croissante, et réalise donc une bijection de $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right[\text{ sur } \left]-\infty, f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right[$. Puisque 0 appartient à cet intervalle, il existe donc une unique racine de f dans $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right[$.

Puisque d'autre part le minimum de f sur $\left]-\sqrt{\frac{3}{5}}, +\infty\right[$ est strictement positif, f ne possède pas de racine sur cet intervalle. Et donc f possède une unique racine.

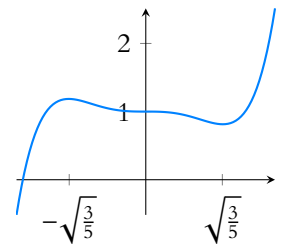


FIGURE 2.3– La fonction f .

2. La fonction g est dérivable, avec $g' : x \mapsto 15x^4 + 30x^2 - 45 = 15(x^4 + 2x^2 - 3)$. Pour étudier son signe, posons $X = x^2$, de sorte que

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow X^2 + 2X - 3 = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation polynomiale de degré 2 en X , dont les racines sont $X_1 = 1$ et $X_2 = -3$.

Et donc on a

$$g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Le tableau de variations de g est donc donné par

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	\nearrow	$g(-1)$	\searrow	$g(1)$	\nearrow	$+\infty$

Mais $g(-1) = -3 - 10 + 45 + \lambda = 32 + \lambda$ et $g(1) = 3 + 10 - 45 + \lambda = \lambda - 32$.

Et donc $g(-1) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq -32$ et de même, $g(1) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 32$.

Distinguons alors trois cas :

► Si $\lambda < -32$. Alors sur $]-\infty, 1]$, g possède un maximum atteint en -1 , et qui vaut $g(-1) < 0$. Et donc pour tout $x \in]-\infty, 1]$, $g(x) < 0$, de sorte que g ne possède pas de racine sur $]-\infty, 1]$. Sur $]1, +\infty[$, g est strictement croissante, et étant dérivable, par le théorème de la bijection,

elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]g(1), +\infty[$.

Mais $g(1) < 0$, et donc ce dernier intervalle contient 0 : il existe un unique $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Et donc g possède une unique racine.

► **Si $-32 \leq \lambda \leq 32$.** Alors g est strictement croissante sur $] -\infty, -1]$, et donc réalise une bijection de $] -\infty, -1]$ sur $] -\infty, g(-1)]$. Puisque $g(-1) \geq 0$, 0 appartient bien à $] -\infty, g(-1)]$ et donc possède un unique antécédent par g dans l'intervalle $] -\infty, -1]$.

Il existe donc un unique $\alpha_1 \in] -\infty, -1]$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.

Sur le même principe, on montre qu'il existe une unique racine α_2 de g dans l'intervalle $] -1, 1]$ et une unique racine α_3 dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

Et donc g possède trois racines.

► **Si $\lambda > 32$** Alors $g(-1) > 0$ et $g(1) > 0$, et on montre comme précédemment, que g possède une unique racine, qui se trouve dans l'intervalle $] -\infty, -1]$.

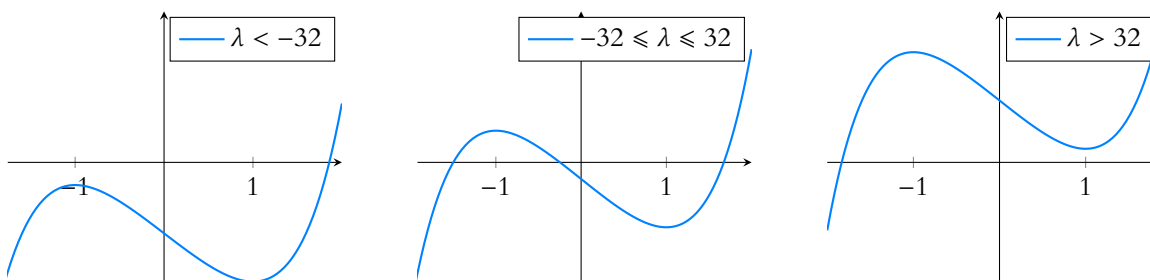


FIGURE 2.4 – Les trois cas possibles.

3. La fonction h est dérivable, avec $h'(x) = (n+2)x^{n+1} - 2(n+2)x = (n+2)x(x^n - 2)$.

► **Si n est pair**, notons que h est paire¹² de sorte qu'il suffit de l'étudier sur \mathbf{R}_+ , intervalle sur lequel h' est du signe de $x^n - 2$.

Alors $x^n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt[n]{2} \leq x \leq \sqrt[n]{2}$.

Le tableau de variations de h est donc donné par

x	0	$\sqrt[n]{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	-	+
$h(x)$	1	$h(\sqrt[n]{2})$	$+\infty$

Or, $h(\sqrt[n]{2}) = 2^{\frac{n+2}{n}} - (n+2)2^{\frac{2}{n}} + 1 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{n}} - (n+2)2^{\frac{2}{n}} + 1 = 1 - n2^{\frac{2}{n}} < 0$.

Donc deux applications du théorème de la bijection¹³ sur $[0, \sqrt[n]{2}]$ (où h est strictement décroissante) et sur $[\sqrt[n]{2}, +\infty[$ (où h est strictement croissante) prouvent que h possède une et une seule racine sur chacun de ces intervalles.

Par parité, elle en a donc une et une seule sur $] -\infty, -\sqrt[n]{2}[$ et une et une seule sur $[-\sqrt[n]{2}, 0]$, et donc possède en tout 4 racines.

► **Si n est impair**

Alors cette fois, on a $x^n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt[n]{2}$. Et donc le tableau de variations de h est donné par :

¹² Les fonctions $x \mapsto x^k$ ont même parité que k .

¹³ Qui s'applique puisque h est continue.

x	$-\infty$	0	$\sqrt[n]{2}$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x^n - 2$	$-$	0	0	$+$
$h'(x)$	$+$	0	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	1	$h(\sqrt[n]{2})$	$+\infty$

Comme précédemment, on a $h(\sqrt[n]{2}) < 0$.

Quelques précisions tout de même sur les limites en $\pm\infty$: on a

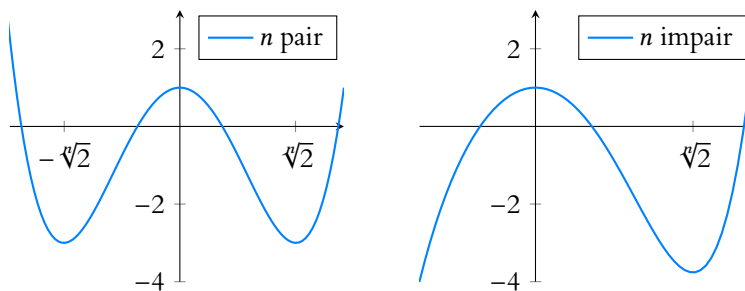
$$h(x) = x^{n+2} \left(1 - \underbrace{(n+2) \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0} \right)$$

et donc h a même limite en $\pm\infty$ que x^{n+2} .

Donc en $+\infty$, cette limite est $+\infty$ et en $-\infty$, c'est soit $+\infty$, soit $-\infty$, suivant que n soit pair ou impair.

Comme précédemment, des applications du théorème de la bijection sur $] -\infty, 0]$, $]0, \sqrt[n]{2}[$ et $] \sqrt[n]{2}, +\infty[$, sur lesquels h est strictement monotone et continue, prouvent que h possède une racine sur chacun de ces intervalles.

Et donc qu'elle possède en tout 3 racines réelles.



SOLUTION DE L'EXERCICE 2.22

Puisque $\operatorname{ch}(x) \geq 1$, on a $\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{\cos(y)} \Leftrightarrow \cos(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

La fonction $f : t \mapsto \cos(t)$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $f'(t) = -\sin(t) \leq 0$.

Puisque cette dérivée ne s'annule que pour $t = 0$, f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x), f(0)\right] =]0, 1]$.

Mais $\operatorname{ch}(x) \geq 1$, de sorte que $0 < \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \leq 1$.

Et donc il existe un unique $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

Puisque $x \geq 0$, $\operatorname{sh}(x) \geq 0$. Mais nous savons que $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}^2(x) - 1$.
Et donc¹⁴

$$\operatorname{sh}(x) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(x) - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(y)} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2(y)}{\cos^2(y)}} = \sqrt{\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}}.$$

Mais puisque $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(y) > 0$ et $\sin(y) \geq 0$, de sorte que

$$\cos(y) = \sqrt{\cos^2(y)} \text{ et } \sin(y) = \sqrt{\sin^2(y)}$$

Rédaction

La lettre x désigne déjà un réel fixé, on évite donc de la prendre comme variable de la fonction f .

¹⁴ Et c'est là qu'il est indispensable d'avoir vérifié la positivité de $\operatorname{sh}(x)$.

et donc

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{\sin y}{\cos y} = \tan(y).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.23

Il s'agit donc de trouver quelles sont les valeurs que peut prendre la fonction $f : x \mapsto xe^x$, et combien de fois elle prend chaque valeur.

La fonction f est dérivable sur \mathbf{R} , et $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$.

Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $x+1$, et donc f est strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

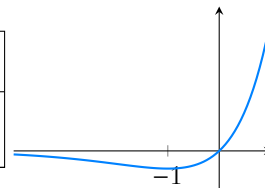
On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Et lorsque $x \rightarrow -\infty$, en posant $X = -x$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -Xe^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0.$$

Donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	0	$-e^{-1}$	$+\infty$



Par le théorème de la bijection, (qui s'applique car f est continue comme produit de deux fonctions continues) f réalise une bijection strictement décroissante, de $] -\infty, -1]$ sur $] -e^{-1}, 0[$ et une bijection strictement croissante de $]-1, +\infty[$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$.

Donc si $y < -e^{-1}$, y ne possède aucun antécédent par f , et donc $xe^x = y$ ne possède pas de solution.

Si $y = -e^{-1}$, alors y possède -1 comme unique antécédent par f .

Si $y \in] -e^{-1}, 0[$, alors y possède deux¹⁵ antécédents par f : un dans $] -\infty, -1]$ et un dans $]-1, +\infty[$.

Donc l'équation $xe^x = y$ possède deux solutions.

Enfin, si $y \geq 0$, alors y ne possède aucun antécédent par f dans $] -\infty, -1]$, et un seul dans $]-1, +\infty[$ (qui se trouve dans $[0, +\infty[$). Et donc $xe^x = y$ possède une et une seule solution.

En résumé, l'équation $xe^x = y$ possède :

- ▶ aucune solution si $y < -e^{-1}$
- ▶ une unique solution si $y = -e^{-1}$ ou $y \geq 0$
- ▶ deux solutions si $-e^{-1} < y < 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.24

1. Notons que f est bien définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puisque \cos ne s'y annule pas.

De plus, $\cos y$ est dérivable, donc il en est de même de f , qui par conséquent est continue.

Puisque \cos est strictement décroissante et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, son inverse f^{-1} y est strictement croissante.

On a $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$, de sorte que par le théorème de la bijection, f réalise

une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $J = [1, +\infty[$.

2. Nous savons que f^{-1} est dérivable en tous les points x de J tels que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Or, la dérivée de f est $f' : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ qui, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, s'annule uniquement en 0.

Puisque $f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$, f^{-1} est dérivable sur J , sauf en 1.

Sa dérivée est alors donnée par

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))}.$$

Nous savons¹⁶, que $f(f^{-1}(x))(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = x \Leftrightarrow \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x}$.

Et donc¹⁷,

$$\cos^2(f^{-1}(x)) + \sin^2(f^{-1}(x)) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(f^{-1}(x)) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

¹⁵ Et exactement deux.

Signe

La positivité est importante pour conclure quant à la monotonie de l'inverse !
Par exemple $x \mapsto x$ est croissante, mais pas de signe constant, et son inverse n'est pas décroissante sur son ensemble de définition (\mathbf{R}^*).

¹⁶ Par définition d'une bijection réciproque.

¹⁷ $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Puisque $f^{-1}(x)$ est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, son sinus est positif, et donc $\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$.

On en déduit donc que pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.25

Avant toute chose, remarquons que I doit être symétrique pour que la notion d'imparité possède bien un sens.

Soit donc $x \in I$. Alors $f(-f^{-1}(x)) = -f(f^{-1}(x)) = -x$.

Puisque $f^{-1}(x) \in]-a, a[$, alors $f^{-1}(x) \in]-a, a[$, et donc $-x$ est bien l'image d'un élément de $] - a, a[$, donc il est dans I .

Ceci prouve donc que I est nécessairement symétrique.

Mieux : nous venons de prouver que $-f^{-1}(x)$ est un antécédent de $-x$ par f . Mais f étant bijective, un tel antécédent est unique, et c'est $f^{-1}(-x)$.

Et donc $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$: la fonction f^{-1} est impaire.

Si f est paire, alors elle n'est pas bijective, puisque $f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$, et donc ce nombre possède deux antécédents distincts par f .

Et par conséquent, f^{-1} n'existe pas.

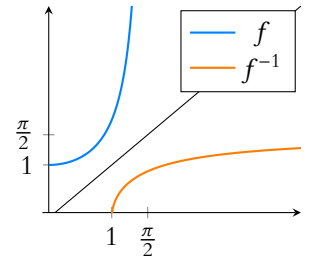


FIGURE 2.5– Les graphes de f et f^{-1} . On y voit notamment que f^{-1} n'est pas dérivable en 1 (tangente verticale).