TD 24 : Dénombrement

▸ Cardinal, injections, surjections

Exercice 24.1 Soient E et F deux ensembles non vides. Prouver que s'il existe une injection $E \to F$, alors il existe une surjection $F \to E$. **PD**

Exercice 24.2 Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels de l'intervalle $[0, 1[$. Prouver qu'il en existe deux qui sont à distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre. **F**

Exercice 24.3 Soient $x_1, \dots, x_n$ des entiers. Montrer qu'il existe deux entiers $p \leqslant q$ de $[\![1, n]\!]$ tels que $x_p + x_{p+1} + \cdots + x_q$ soit un multiple de n. **AD**

Exercice 24.4 Formule du crible **D**
Prouver par récurrence sur $n \geqslant 2$ la formule du crible : si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties finies d'un ensemble E, alors

$$\operatorname{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

($\star$) **Application** : on note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans points fixes. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$. En appliquant la formule du crible astucieusement, prouver que $\operatorname{Card} D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 24.5 Dénombrement par construction d'une bijection **D**
Soit E un ensemble de cardinal n. On souhaite déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. Notons $\mathscr{C} = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$.

Pour $(A, B) \in \mathscr{C}$, on note $\chi_{A,B}$ la fonction définie sur E par $\chi_{A,B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \in A \end{cases}$.

Montrer que $\chi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \{0, 1, 2\}^E \\ (A, B) & \longmapsto & \chi_{A,B} \end{array} \right.$ est bijective, et conclure.

▸ Dénombrement

Exercice 24.6 Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot MPSI ? De 8 lettres ? De 9 lettres ? **PD**

Exercice 24.7 Lors de son inscription à un site de commerce en ligne, un utilisateur se voit demander un mot de passe contenant 6 à 8 caractères, un tel mot de passe étant formé de lettres majuscules et de chiffres, et contenant au moins une lettre. Combien de mots de passe sont-ils possibles ? **PD**

Exercice 24.8 Combien de relations d'ordre total existe-t-il sur un ensemble à n éléments ? **PD**

Exercice 24.9 Déterminer le nombre d'anagrammes (=mot obtenu par permutation des lettres) des mots suivants : COVID, CONFINE, CORONAVIRUS, CONFINEMENT. **PD**

Exercice 24.10 Soient $p \leqslant n$ deux entiers naturels non nuls. Combien existe-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ qui contiennent : **PD**

1. un seul élément de $[\![1, p]\!]$?
2. au moins un élément de $[\![1, p]\!]$?

Exercice 24.11 On considère les entiers de 4 chiffres (en base 10), sous la forme $abcd$. On dit qu'un entier $abcd$ a ses chiffres croissants si $a < b < c < d$. Par exemple, 1259 a ses chiffres croissants, pas 1065.
Quel est le nombre d'entiers de 4 chiffres dont les chiffres vont en croissant ? **D**

Exercice 24.12 Soit E un ensemble de cardinal n. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$. **AD**

Exercice 24.13 Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$? De $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 3]\!]$? De $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Exercice 24.14 Combien y a-t-il de manières de partitionner l'ensemble des 48 élèves de la MPSI2 en 16 trinômes de colle ? **AD**

Exercice 24.15 **D**

1. Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
2. (a) Soit $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ croissante. Montrer que la fonction $g : k \mapsto f(k)+k-1$ est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+p-1]\!]$.
   (b) Soit $g : [\![1,p]\!] \to [\![n+p-1]\!]$ strictement croissante. Montrer que $f : k \mapsto g(k)-k+1$ est croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
   (c) En déduire le nombre de fonctions croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Exercice 24.16 Formule de Vandermonde **AD**
Soient $(m,r,n) \in \mathbf{N}^3$. À l'aide d'arguments combinatoires, prouver la formule suivante (déjà prouvée par d'autres moyens dans le TD17) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}$.

Exercice 24.17 Le poker **PD**
Au poker, combien y a-t-il de mains contenant :

1. une quinte flush (cinq cartes consécutives de même couleur) ?
2. une couleur (5 cartes de même couleur, qui ne forment pas une quinte flush) ?
3. exactement trois trèfles ?
4. exactement un as et deux cœurs ?

Exercice 24.18 (Banque CCP 113) **AD**
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit E un ensemble de cardinal n.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 24.19 De combien de manières peut-on placer p tours sur un échiquier de taille $n \times n$ de manière à ce qu'aucune ne puisse en prendre une autre. **PD**
On rappelle qu'aux échecs une tour ne peut se déplacer que le long d'une ligne ou d'une colonne.

Exercice 24.20 Soient $n \geqslant p$ deux entiers naturels. Prouver par dénombrement que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 24.21 Dans un polygone convexe on appelle diagonale tout segment qui relie deux sommets non consécutifs. Combien de côtés doit posséder un polygone qui possède autant de sommets que de diagonales ? **PD**

Exercice 24.22 **AD**

1. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer le développement limité à l'ordre n en 0 de $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.
2. En exprimant le même développement limité d'une autre manière, déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}$, le cardinal de l'ensemble $\{(k,\ell) \in \mathbf{N}^2 \mid k+2\ell = n\}$.

Exercice 24.23 (Oral X) **TD**
Montrer qu'un ensemble E est infini si et seulement si pour toute application $f : E \to E$, il existe $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ tel que $f(A) \subset A$.

Exercice 24.24 (Oral ENS) **TD**
Soit $\mathbf{K}$ un corps fini de cardinal q (on pourra par exemple penser à $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, avec p premier) et soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Déterminer le cardinal de $GL_n(\mathbf{K})$.

Exercice 24.25 (ENS PC 2017) **D**
Une partie A de $\mathbf{N}$ est dite *fade* si il n'existe pas de triplet $(x,y,z) \in A^3$ tel que $x+y=z$.
Déterminer le cardinal maximal d'une partie fade de $\{1,\dots,n\}$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 24

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.1

Notons $f : E \to F$ une injection.
Si f est surjective, alors elle est bijective, et $f^{-1} : F \to E$ est surjective[1].
Sinon, fixons $a \in E$, et définissons une application $g : F \to E$ de la manière suivante : pour $y \in F$, on pose

- $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f si $y \in \operatorname{Im} f$
- $g(y) = a$ si $y \notin \operatorname{Im} f$.

Alors il est aisé de constater que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, et donc en particulier que g est surjective.

[1] Car bijective.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.2

Il s'agit de noter que $[0, 1[$ se partitionne en $\left[0, \frac{1}{n}\right[\cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\cup \cdots \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right[$.
Ce qui nous fait n ensembles. Donc par le principe de Dirichlet, des $n+1$ nombres $x_0, x_1, \dots, x_n$, il s'en trouve au moins deux dans le même intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, qui sont donc nécessairement à distance inférieure stricte à $\frac{1}{n}$.

Remarque
Notons que si on remplace $[0, 1[$ par $[0, 1]$, on est obligés de supprimer «strictement» dans la conclusion. Voyez-vous pourquoi ?

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.3

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons r_k le reste de la division euclidienne de $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$ par n. Alors $r_k \in [\![0, n-1]\!]$.
► Si il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $r_k = 0$, alors S_k est divisible par n (donc on peut prendre $p = 1$ et $q = k$).
► Sinon, tous les r_k sont dans $[\![1, n-1]\!]$. Par le principe de Dirichlet, il existe donc $\ell < m$ tels que $r_k = r_m$.
Et donc $S_m - S_\ell = \sum_{i=\ell+1}^{m} x_i$ est divisible par n.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.4

Pour $n = 2$, c'est une formule du cours[2].
Supposons donc que la formule soit vraie pour n parties, et soient $A_1, \dots, A_{n+1}$ des parties finies de E. Alors

[2] Et nous l'avons même prouvé pour $n = 3$.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \operatorname{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \operatorname{Card}(A_{n+1}) - \operatorname{Card}\left((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \operatorname{Card}(A_{n+1}) - \operatorname{Card}\left((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \operatorname{Card}(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\ell \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \operatorname{Card}(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{\ell=2}^{n+1} (-1)^{\ell} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{\ell-1} \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\ell \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1})
\end{aligned}
$$

C'est encore l'hypothèse de récurrence.

Le terme correspondant à $\ell = 1$ était juste $\operatorname{Card}(A_{n+1})$.

Il faut alors remarquer que dans la première somme (celle sur k), se trouvent tous les termes avec des intersections de k des $A_1, \dots, A_{n+1}$, toutes distinctes de A_{n+1}.
Et dans la seconde somme se trouvent toutes les intersection de A_{n+1} avec l'intersection de k autres des A_i, donc toutes les intersections de k des A_i, contenant A_{n+1}.
Donc ces deux sommes peuvent se regrouper en une seule :

Remarque
Si elles sont toutes distinctes de A_{n+1}, il ne peut y en avoir que n au maximum.

$$\operatorname{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n+1} \operatorname{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}).$$

Par le principe de récurrence, etc.

Dans le cas qui nous intéresse, remarquons que $D_n = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$.

Mais, par la formule du crible,

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Il s'agit alors de voir que la somme intérieure, à k fixé, contient $\binom{n}{k}$ termes.
Et que l'intersection de k des A_i est formée par les permutations qui fixent k points donnés de $[\![1, n]\!]$. Elle sont au même nombre que les permutations de $n-k$ nombres restants, de sorte que pour $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$, $\operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$.
Et donc

$$\operatorname{Card} \overline{D_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

Solution de l'exercice 24.5

Soit $\psi \in \{0,1,2\}^E$. Posons alors $A = \psi^{-1}(\{2\})$ et $B = \overline{\psi^{-1}(\{0\})} = \psi^{-1}(\{1,2\})$.
On a bien $A \subset B$ puisque $2 \neq 0$.
Et il est clair que $\chi((A,B)) = \psi$, donc χ est surjective.
D'autre part, si $\chi_{A,B} = \chi_{A',B'}$, alors pour tout $x \in E$,

$$x \in A \Leftrightarrow \chi_{A,B}(x) = 2 \Leftrightarrow \chi((A',B'))(x) = 2 \Leftrightarrow x \in A'.$$

Donc $A = A'$. Puis $B = \overline{\chi_{A,B}^{-1}(\{0\})} = B'$.
Donc χ est injective, et par conséquent bijective.
Puisque $\{0,1,2\}^E$ est de cardinal 3^n, il en est donc de même de $\mathscr{C}$.

Remarque
Ce résultat est prouvé de manière plus agréable dans l'exercice 18.

Solution de l'exercice 24.6

Choisir un tel mot nécessite de choisir :

- la position du M débutant MPSI, qui peut être entre la première et la quatrième lettre. Il y a donc 4 choix possibles.
- les 2 lettres qui ne forment pas MPSI. Il y a donc 26^3 choix possibles.

Soit un total de 4×26^3 mots de 7 lettres contenant MPSI.

Dans le cas de mots de 8 lettres, le principe est le même, si ce n'est qu'un mot a été compté deux fois : il s'agit du mot MPSIMPSI.
Donc il y a en tout $5 \times 26^4 - 1$ mots de 8 lettres contenant MPSI.

Détails
En effet, nous l'avons compté à la fois comme un mot commençant par MPSI et comme un mot finissant par MPSI.

Enfin, pour les mots de 9 lettres, la situation est pire, puisqu'il y a de nombreux mots qui ont été comptés deux fois : tous ceux de la forme MPSI$\star$MPSI, $\star$MPSIMPSI ou MPSIMPSI$\star$.
Soit un total de $6 \times 26^5 - 3 \times 26$ mots de 9 lettres contenant MPSI.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.7

Il y a donc $26 + 10 = 36$ caractères autorisés, donc $36^6 + 36^7 + 36^8$ mots de passe possibles.
Auxquelles il faut retrancher les mots de passe formés uniquement de chiffres, qui sont au nombre de $10^6 + 10^7 + 10^8$.
Donc le nombre total de mots de passe acceptables est

$$36^6 + 36^7 + 36^8 - 10^6 - 10^7 - 10^8.$$

Ordre de grandeur
C'est environ 200 milliards.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.8

Choisir une relation d'ordre totale sur un ensemble E à n éléments, c'est se donner un n-arrangement de E, à savoir le seul n-uplet d'éléments de E dont les éléments sont deux à deux distincts et rangés par ordre croissant.
Mais un tel n-arrangement est en fait une permutation de E, et il y en a $n!$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.9

1. Toutes les permutations des 5 lettres de COVID sont distinctes, et elles sont au nombre de $5! = 120$, dont il y a 120 anagrammes à COVID.
2. Cette fois, le mot de départ contient deux fois la même lettre (le N).
Pour bien les différencier, notons les N_1 et N_2, de sorte que le terme de départ est $\text{CON}_1\text{FIN}_2\text{E}$.
Si on compte juste le nombre de permutations des lettres, nous allons compter comme deux mots différents les termes $\text{N}_1\text{FIECON}_2$ et $\text{N}_2\text{FIECON}_1$, alors qu'il s'agit du même mot.
Et en réalité, nous allons tous les compter deux fois, donc il y a en tout $\dfrac{7!}{2}$ anagrammes distincts.

   Alternative : il y a $\dbinom{7}{2}$ manières de choisir les deux positions des deux N parmi les 7 lettres.
Une fois ces positions choisies, il faut choisir un 5-arrangement des 5 lettres restantes, pour lesquelles il y a $5!$ choix possibles.
Soit un total de $\dfrac{7 \times 6 \times 5!}{2} = \dfrac{7!}{2}$ anagrammes.
3. Même chose ici, sauf que deux lettres apparaissent deux fois. Donc il y a 2 permutations possibles des deux O et pour chaque permutation des deux O, il y a deux permutations possibles des deux R. Soit en tout 4 permutations possibles.
Donc il y a $\dfrac{11!}{4}$ anagrammes.

   Alternative : comme ci-dessus, il y a $\dbinom{11}{2}$ choix de positions possibles pour les deux O, puis une fois ces O placés, il reste $\dbinom{9}{2}$ choix de positions possibles pour les deux R.
Et ensuite, il y a $7!$ choix possibles pour les lettres qui ne sont pas en double.
4. Même principe : il y a $3! = 6$ permutations possibles des trois N, et deux permutations des deux E, soit un total de $\dfrac{11!}{6 \times 2}$ anagrammes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.10

1. Choisir une telle partie, c'est choisir un élément de $[\![1, p]\!]$, et lui adjoindre une partie de $[\![p+1, n]\!]$.
Mais il y a 2^{n-p} telles parties, soit un total de $p2^{n-p}$ parties possibles.
2. Plutôt que de dénombrer les parties contenant un seul élément de $[\![1, p]\!]$, celles en contenant 2, etc, intéressons nous au complémentaire : combien y a-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant aucun élément de $[\![1, p]\!]$?
Il y en a autant que de parties de $[\![p+1, n]\!]$, soit 2^{n-p}.
Et donc il y a $2^n - 2^{n-p}$ parties de $[\![1, n]\!]$ contenant au moins un élément de $[\![1, p]\!]$.

Solution de l'exercice 24.11

Étant donné une partie de 4 éléments distincts de $[\![0,9]\!]$, il existe une et une seule manière de les ordonner pour en faire un nombre ayant ses chiffres croissants. Donc le nombre cherché est le nombre de parties à 4 éléments de $[\![0,9]\!]$: c'est $\binom{10}{4}$.

Solution de l'exercice 24.12

Il y a 2^n choix pour A. Une fois A choisie, il faut choisir une partie B telle que $A \cup B = E$.
Soit encore telle que $\overline{A} \subset B$.
On a alors $B = (A \cap B) \cup \overline{A}$, et donc il s'agit de choisir la partie $A \cap B$.
Mais il y a $2^{\mathrm{Card}(A)}$ manières de choisir $A \cap B$, qui peut donc être n'importe quelle partie de A.
En distinguant suivant le cardinal k de A, il vient $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$, où $\binom{n}{k}$ est le nombre de manières de choisir A, et 2^k le nombre de manières de choisir B une fois A choisi.
Soit en tout $(2+1)^n = 3^n$ choix possibles.

Autrement dit
Une telle partie B doit contenir $\overline{A}$, plus éventuellement des éléments de A.

Solution de l'exercice 24.13

1. En tout, il y a 2^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$.
Parmi celle-ci, seules deux ne sont pas surjectives : les deux applications constantes.
Donc il y a $2^n - 2$ surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$.
2. Cette fois, il y a 3^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$.
Les trois fonctions constantes ne sont évidemment pas surjectives.
Les autres applications non surjectives sont celles dont l'image vaut $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ ou $\{2,3\}$.
Mais comme à la question 1, dans chacun des trois cas, il y a $2^n - 2$ telles applications.
Donc le nombre de surjections cherché est $3^n - 3 - 3(2^n - 2) = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.
3. Notons que si φ est une surjection de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$, alors l'un des éléments de $[\![1,n]\!]$ aura deux antécédents, quand tous les autres n'en auront qu'un seul.
Donc pour choisir une telle surjection, il faut choisir l'élément a de $[\![1,n]\!]$ qui aura deux antécédents, puis choisir ces 2 antécédents b et c.
Et enfin, choisir une bijection de $[\![1,n+1]\!] \setminus \{b,c\}$ sur $[\![1,n]\!] \setminus \{a\}$, et il y a $(n-1)!$ telles bijections.
Soit un total de $n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)! = \frac{n}{2}(n+1)!$ telles surjections.

Remarque
Le plus délicat dans ce genre d'exercice est souvent de s'assurer qu'on n'a pas compté deux fois le même élément.

Solution de l'exercice 24.14

Il y a $\binom{48}{3}$ manières de choisir un premier trinôme. Une fois celui-ci choisi, il y a $\binom{45}{3}$ manières de choisir un second trinôme, disjoint du précédent, etc, et il n'y a qu'une façon de choisir le $16^{\text{ème}}$ trinôme.
Mais l'ordre de nos groupes n'a pas d'importance. Autrement dit, on a compté 16! fois chaque possibilité.
Donc il y a en tout :

$$\binom{48}{3}\binom{45}{3}\cdots\binom{6}{3}\binom{3}{3}\frac{1}{16!} = \frac{48!}{6^{16}16!}$$

partitions possibles. C'est de l'ordre de 2×10^{35}.

Solution de l'exercice 24.15

Rappelons à toutes fins utiles qu'une application strictement croissante est toujours injective.

1. Pour choisir une fonction strictement croissante, il suffit de choisir les p images des éléments de $[\![1,p]\!]$, nécessairement toutes différentes. Une fois choisies, il n'y a pas de choix sur l'ordre : la plus petite est l'image de 1, la suivante l'image de 2, etc, la plus grand est l'image de p.
Donc le nombre d'applications strictement croissantes est $\binom{n}{p}$, le nombre de parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$.

2.a. Soient $k < k'$ deux éléments de $[\![1, p]\!]$. Alors

$$g(k) = f(k) + k - 1 \leqslant f(k') + k - 1 < f(k') + k' - 1 = g(k').$$

Donc g est strictement croissante.
Elle est bien à valeurs dans $[\![1, n + p - 1$ car $f(k) \leqslant n$ et $k - 1 \leqslant p - 1$.

2.b. Si $k < k'$, alors $f(k') - f(k) = g(k') - g(k) - (k' - k)$.
Mais pour g strictement croissante, il est facile de prouver que $g(k') - g(k) \geqslant k' - k$.
En effet, entre $g(k)$ et $g(k')$ doivent se trouver les entiers distincts $g(k+1), g(k+2), \dots, g(k'-1)$.
Et donc $f(k') - f(k) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(k) \leqslant f(k')$: f est croissante.

2.c. Les deux applications ci-dessus sont des bijection réciproques l'une de l'autre, entre l'ensemble des applications croissantes $[\![1, p]\!] \to [\![1, n + p - 1]\!]$ et l'ensemble des applications strictement croissantes $[\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$.
Et donc, d'après la question 1, le nombre de fonctions croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\binom{n+p-1}{p}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.16

Donnons nous un ensemble E à $n + m$ éléments, partitionné en deux ensembles disjoints A et B de cardinaux respectifs n et m.

Alors le nombre de parties de E à r éléments est $\binom{n+m}{r}$.

Mais une partie de E de cardinal r contient un certain nombre k d'éléments de B, avec $0 \leqslant k \leqslant r$.
Et donc elle contient alors $r - k$ éléments de A.
À k fixé, il y a $\binom{m}{k}$ parties de B à k éléments, et pour chaque choix d'une telle partie, il y a $\binom{n}{r-k}$ choix possibles d'une partie de A à $r - k$ éléments.

Et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$ est le nombre total de parties à r éléments de E, c'est-à-dire $\binom{n+m}{r}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.17

1. Par couleur, il y a 4 quintes flush possibles. Soit un total de 16 quintes flush.

2. Il y a $4 \times \binom{8}{5} = 224$ mains d'une seule couleur possible. Auxquelles il faut retrancher les 16 quintes flush, pour un total de 208 couleurs possibles.

3. Il y a $\binom{8}{3}$ façons de choisir les trois trèfles, et pour chacune de ces manières, il y a $\binom{24}{2}$ façons de choisir les cartes restantes.
Soit un total de $\binom{8}{3}\binom{24}{2} = 15\,456$ mains contenant trois trèfles.

4. Il y a deux types de mains satisfaisant à la contrainte : celles qui contiennent l'as de cœur et celles qui contiennent un autre as.
Les premières sont donc formées de l'as de cœur, d'un autre cœur (il y en a 7) et de trois cartes qui ne sont ni des as ni des cœurs (donc parmi 21 cartes). Les secondes sont formées de deux cœurs qui ne sont pas l'as, d'un as parmi les trois as autres que le cœur et de deux cartes qui ne sont ni des cœurs ni des as.
Soit un total de $7 \times \binom{21}{3} + \binom{7}{2} \times 3\binom{21}{2} = 22\,540$ mains.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.18

1. Une fois B choisie, de cardinal k, il y a 2^k manières de choisir A.
Or il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir B de cardinal k.
Et donc $a = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$.

2. Une fois B choisie de cardinal k, il faut prendre pour A une partie de $\overline{B}$, qui est de cardinal $n-k$. Et il y a 2^{n-k} telles parties.

Donc $b = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$.

Remarque *: en réalité, si on note $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des couples de parties satisfaisant la condition de la question 1 et $\mathscr{C}_2$ l'ensemble des couples satisfaisant la seconde, alors on a une bijection entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, qui est donnée par*

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_1 & \longrightarrow & \mathscr{C}_2 \\ (A, B) & \longmapsto & (A, \overline{B}) \end{array} \right.$$

et donc $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont nécessairement le même cardinal.

3. Une fois choisi un couple (A, B) de parties de E disjointes, il n'y a qu'une partie C de $\mathscr{P}(E)$ qui convienne : c'est $C = \overline{A \cup B}$.
Donc $c = b \times 1 = b = 3^n$.

Solution de l'exercice 24.19

Commençons par choisir les p lignes occupées par les tours : il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles.

Puis il y a n manières de placer la première tour sur la première[3] ligne.
La colonne sur laquelle nous avons placé cette première tour est alors interdite aux suivantes, et il y a donc $n-1$ manières de placer la seconde tour sur la seconde ligne.
Et alors deux colonnes sont condamnées, donc il reste $n-2$ manières de placer la troisième tour, etc.

Soit un total de $\binom{n}{p} n(n-1)\cdots(n-p+1) = \binom{n}{p}\dfrac{n!}{(n-p)!}$ manières de placer les p tours.

[3] Disons celle avec le plus petit numéro.

Solution de l'exercice 24.20

Notons qu'une preuve par récurrence est tout à fait possible en utilisant l'identité de Pascal, mais nous souhaitons l'éviter ici.

Nous savons que $\binom{n+1}{p+1}$ est le nombre de parties à $p+1$ éléments de $[\![0, n]\!]$.
Partitionnons l'ensemble des telles parties par plus grand élément, en notant que le plus grand élément d'une partie à $p+1$ éléments de $[\![0, n]\!]$ est nécessairement au moins égal à p.

Remarque

Et cela ne se produit que pour la partie

$$\{0, 1, \ldots, p\}.$$

Étant fixé $k \in [\![p, n]\!]$, pour former une partie de $p+1$ éléments de $[\![0, n]\!]$ de plus grand élément k, il faut choisir k éléments parmi $[\![0, k-1]\!]$. Et il y a $\binom{k}{p}$ manières de procéder.

Donc on a bien $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Solution de l'exercice 24.21

Notons $n \geqslant 3$ le nombre de sommets (et donc de côtés) du polygone.

Le nombre de segments joignant deux sommets distincts du polygone est $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Mais parmi ces n segments se trouvent les n côtés, donc seulement $\dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ sont des diagonales.

Alternative : il y a n choix pour le premier sommet d'une diagonale.
Et une fois le premier sommet choisi, l'autre sommet ne doit pas être le sommet déjà choisi, ni l'un de ses voisins, donc il y a $n-3$ choix possibles pour le second. Soient $n(n-3)$ choix possibles.

Mais alors on a compté exactement deux fois chaque diagonale, donc il y a en tout $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

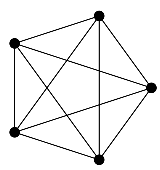

Figure 24.1– Un pentagone possède autant de sommets que de diagonales.

Et par conséquent, on a autant de diagonales que de sommets si et seulement si

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Leftrightarrow \frac{n-3}{2} = 1 \Leftrightarrow n = 5.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.22

1. On a $\dfrac{1}{(1-X)(1-X^2)} = \dfrac{1}{(1-X)^2(1+X)}$, donc la décomposition en éléments simples cherchée est de la forme

$$\frac{1}{(1-X)^2(1+X)} = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{(1-X)^2} + \frac{c}{1+X}.$$

On a alors facilement $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$. Et alors en multipliant par $(1-X)$ et en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, $0 = -a + c$, donc $a = \frac{1}{4}$.

Donc $\dfrac{1}{(1-X)^2(1+X)} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-X} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-X)^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+X}$.

Et donc en particulier,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-k+1)}{k!}(-x)^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-x)^k + o(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k+1\right)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k + o(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k+2k+3}{4}x^k + o(x^n).
\end{aligned}$$

Détails
On a
$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}.$$

2. Par ailleurs, on a $\dfrac{1}{(1-x^2)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} x^{2k} + o(x^n)$ et $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} &\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} x^{2\ell}\right) + o(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k+2\ell=i} x^i\right) + o(x^n).
\end{aligned}$$

Détails
Il s'agit juste de la formule pour les coefficients d'un produit de polynômes.

Et donc en notant $a_i = \mathrm{Card}\{(k,\ell)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid k+2\ell = i\}$, on a

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)} \underset{x\to 0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + o(x^n)$$

si bien que par unicité du développement limité, pour tout $i\in\mathbf{N}$, $a_i = \dfrac{(-1)^i+2i+3}{4}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.23

Supposons E infini et soit $f : E \to E$.
Soit alors $x \in E$, et considérons les images de x par les puissances de f : $x, f(x), \dots, f^n(x), \dots$.
S'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n(x) = x$, alors $A = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ convient[4].
Et sinon, $A = \{f^n(x),\ n\in\mathbf{N}^*\}$ convient. En effet, ce n'est pas E tout entier puisque $x \notin A$.

[4] Cette partie étant finie, elle ne peut valoir E tout entier.

Dans l'autre sens, prouvons plutôt la contraposée, en prouvant que pour tout ensemble fini E, il existe une application $f : E \to E$ qui ne satisfait pas la propriété requise.
Si E est vide, il n'y a rien à dire[5].
Si E est de cardinal 1, il n'y a pas de parties de E distinctes de $\emptyset$ et de E.
Si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ est de cardinal n. Soit alors $f : E \to E$ définie par

[5] Car il n'y a pas d'application de E dans E.

$$f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_3, \dots, f(x_{n-1}) = x_n,\ f(x_n) = x_1.$$

Si A est une partie non vide de E, distinctes de E, notons $k = \min\{i \in [\![1,n]\!] \mid x_i \notin A\}$.
- ▶ Si $i \neq 1$, alors $x_{i-1} \in A$, et $x_i = f(x_{i-1}) \in f(A)$, donc $f(A) \not\subset A$.
- ▶ Si $i = 1$, alors soit $x_n \in A$, auquel cas $x_1 \in f(A)$.

Sinon, notons $p = \max\{k \in [\![1,n]\!] \mid x_k \in A\}$. Alors $p \leqslant n-1$, et donc $x_{p+1} \notin A$ et $x_{p+1} = f(x_p) \in f(A)$.
Donc dans tous les cas, $f(A) \not\subset A$.

Solution de l'exercice 24.24

Un point important ici : si F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension d, alors F est isomorphe à $\mathbf{K}^d$, et donc en bijection avec $\mathbf{K}^d$, qui est de cardinal q^d.
Se donner une matrice, c'est se donner la famille de ses vecteurs colonnes[6], la matrice étant inversible si et seulement si cette famille est libre.
Notons bien qu'on voit la famille comme étant ordonnée ici : si on échange les colonnes, on ne parle plus de la même matrice.
Pour choisir une matrice de $GL_n(\mathbf{K})$, on peut choisir librement la première colonne parmi tous les vecteurs non nuls de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, et il y a q^-1 tels vecteurs.
Une fois la première colonne C_1 choisie, la seconde ne doit pas être colinéaire[7] à C_1, et donc ne pas être dans $\mathrm{Vect}(C_1)$.
Il y a donc $q^n - q$ choix possibles.
Une fois les deux premières colonnes C_1 et C_2 choisies, la troisième ne doit pas être dans $\mathrm{Vect}(C_1, C_2)$, qui est de dimension 2.
Donc il y a $q^n - q^2$ choix possibles.
Et ainsi de suite : une fois les $n-1$ premières colonnes $C_1, \dots, C_{n-1}$ choisies, la dernière ne doit pas être dans $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{n-1})$, donc il reste $q^n - q^{n-1}$ choix possibles.

Donc $\mathrm{Card}(GL_n(\mathbf{K})) = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n-q^i)$.

[6] Qui vivent donc dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

[7] Sinon la matrice obtenue ne sera pas inversible, puisque ses colonnes ne formeront pas une famille libre.

Solution de l'exercice 24.25

Soit A une partie fade de $\{1, \dots, n\}$, soit d son cardinal et soit k le plus grand élément[8] de A.
Alors l'application $f : A \setminus \{k\} \to \mathbf{N}$ définie par $f(m) = k - m$ est à valeurs dans $\{1, \dots, n\} \setminus A$.
En effet, il est évident[9] qu'elle est à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$, et si on avait $f(m) \in A$, alors $(k, m, f(m))$ serait un triplet de A^3 tel que $f(m) + m = k$, ce qui n'est pas possible car A est fade.
De plus, f est strictement décroissante, donc injective.
Et ainsi, le cardinal de $A \setminus \{k\}$ est inférieur ou égal à celui de $\{1, \dots, n\} \setminus A$.
Soit encore $d - 1 \leqslant n - d \Leftrightarrow 2d \leqslant n+1 \Leftrightarrow d \leqslant \dfrac{n+1}{2}$.
Et puisque d est un entier, $d \leqslant \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.

D'autre part, l'ensemble $\mathscr{I}$ des entiers impairs de $\{1, \dots, n\}$ est une partie fade de $\{1, \dots, n\}$ puisque la somme de deux entiers impairs est paire.
Or, son cardinal est précisément $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.
Et donc une partie fade de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal maximal est de cardinal égal à $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.

[8] Qui existe car A est une partie finie de $\mathbf{N}$.

[9] Notons qu'il est important ici d'avoir exclu k de son ensemble de définition car $k - k = 0 \notin \{1, \dots, n\}$.

Détails

Si $n = 2p$ est pair, alors $\mathscr{I} = \{1, 3, \dots, 2p-1\}$ est de cardinal $p = \dfrac{n}{2} = \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ et si $n = 2p+1$ est impair, alors $\mathscr{I} = \{1, 3, \dots, 2p+1\}$ est de cardinal $p + 1 = \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.