TD 3 : Logique, ensembles

▸ Logique

Exercice 3.1 Si E désigne l'ensemble des élèves de MPSI2, F l'ensemble des livres existants alors on note $P(x,y)$ la proposition «l'individu x a lu le livre y». **F**
Traduire par une phrase en français chacune des propositions suivantes (et si ça vous amuse, déterminer sa valeur de vérité).

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$
2. $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$
3. $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$
4. $\exists y \in F, \exists x \in E, P(x,y)$
5. $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$
6. $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x,y)$
7. $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y)$

Exercice 3.2 Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en le justifiant. Écrire également sa négation. **F**

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ \sqrt{x^2} = x$
2. $\forall x \in \mathbf{R},\ x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 \leqslant 4$
3. $\exists x \in \mathbf{R}_+,\ x < \sqrt{x}$
4. $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ x < \sqrt{x}$
5. $\forall (a,b) \in \mathbf{Z}^2,\ \exists (u,v) \in \mathbf{Z}^2,\ au + bv = 1$
6. $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{Z},\ \exists z \in \mathbf{R},\ z \neq x + y$

Exercice 3.3 **PD**

1. Montrer que $\forall a \in [0,1],\ \exists b \in \mathbf{R},\ a = \cos b$.
2. En déduire que $\forall t \in [0,2],\ \exists (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ t = \cos x + \sin y$.

Exercice 3.4 Sommes et différences de carrés **PD**
Parmi les propositions suivantes, prouvez celles qui sont vraies et réfutez celles qui sont fausses :

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists (y,z) \in \mathbf{R}^2,\ x = y^2 + z^2$
2. $\forall n \in \mathbf{N},\ \exists (p,q) \in \mathbf{N}^2,\ n = p^2 + q^2$
3. $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists (y,z) \in \mathbf{R}^2,\ x = y^2 - z^2$
4. $(\star)$ $\forall n \in \mathbf{N},\ \exists (p,q) \in \mathbf{N}^2,\ 2n+1 = p^2 - q^2$

Exercice 3.5 Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : \mathbf{R} \to J$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les propriétés suivantes : **PD**

1. f n'est pas paire
2. f est périodique
3. f n'est pas constante
4. f est croissante
5. f n'est pas strictement décroissante
6. f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$
7. f n'est pas la fonction nulle
8. f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur J.

Exercice 3.6 Permutation de quantificateurs **AD**
Soit $P(x,y)$ une proposition dépendant de deux variables, et soient E et F deux ensembles.
Montrer que $(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y))$. Que dire de la réciproque ?

Exercice 3.7 Soient P, Q, R trois propositions logiques. **PD**

1. Redémontrer que $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\neg P \vee Q$. Retrouver la négation de $P \Rightarrow Q$.
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $(P \vee Q) \Rightarrow R$ et $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.
   (b) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ et $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$.

Exercice 3.8 Soit x un réel. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$. **AD**

Exercice 3.9 Soit I une partie de $\mathbf{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite localement constante sur I si **D**

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(t) = a.$$

1. Montrer que $f : I \to \mathbf{R}$ est localement constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(t) = f(x)$.
2. Montrer qu'une fonction constante sur I est localement constante.
3. Donner un exemple de partie $I \subset \mathbf{R}$ et de fonction $f : I \to \mathbf{R}$ non constante mais localement constante.
4. Prouver que toute fonction localement constante sur I est constante si et seulement si I est un intervalle.

▶ Ensembles

Exercice 3.10 Soient A et B deux ensembles avec $A \subset B$. Déterminer $A \cup B$ et $A \cap B$. F

Exercice 3.11 Soit E un ensemble et soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^2$. PD

1. Montrer que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.
2. Montrer que $(A \cap B = A \cap C$ **et** $A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow (B = C)$.

Exercice 3.12 Soient A et B deux ensembles. Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$? AD
Que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?

Exercice 3.13 Soient E et F deux ensembles. Montrer que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ si et seulement si $E \subset F$. PD

Exercice 3.14 Décrire les ensembles suivants : AD

1. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid (x > 0 \text{ **et** } x < 1) \text{ **ou** } x = 2\}$
2. $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x > 0 \Rightarrow x > 1)\}$
3. $C = \{x \in \mathbf{R} \mid (x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 > 4) \text{ **ou** } (x^2 > 4 \text{ **et** } x > 2)\}$ $(\star)$.

Exercice 3.15 Soient A, B, C trois parties d'un même ensemble E. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes : PD

1. $A \setminus B \subset C$
2. $A \setminus C \subset B$
3. $A \subset B \cup C$.

Exercice 3.16 Que valent les ensembles suivants : $\mathcal{P}(\{1\}), \mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\{1\})\right), \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}), \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\emptyset)\right)\right)\right)$ $(\star)$? PD

Exercice 3.17 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que AD

1. $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow (A \subset B \subset C)$
2. $\overline{\overline{A}} = A$
3. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
4. $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
5. $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.
6. $A \setminus B = \complement_A^{A \cap B}$.

Exercice 3.18 Montrer que $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas le produit cartésien de deux ensembles de $\mathbf{R}$. AD

Exercice 3.19 On considère A et B deux parties de E. Résoudre l'équation $A \cap X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$. D

Exercice 3.20 Soit E un ensemble et soient $E_1, \ldots, E_n$ $(n \geqslant 2)$ des parties deux à deux distinctes de E. Montrer que l'un au moins de ces ensembles n'en contient aucun autre. D

▶ Raisonnements divers

Exercice 3.21 Soit x un irrationnel strictement positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel. F

Exercice 3.22 Soit $r \in \mathbf{N}^*$, et pour $i \in [\![0, r-1]\!]$, soit $A_i = \{n \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z},\ n = rk + i\}$. PD
Montrer que $A_0, \ldots, A_{r-1}$ sont deux à deux disjoints.

Exercice 3.23 Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbf{Q}$. PD

Exercice 3.24 Le réel $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ? Même question pour $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$. PD

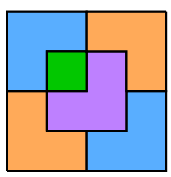
Exercice 3.25 AD

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.

Exercice 3.26 **Une suite récurrente linéaire d'ordre** 2 AD
Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = a(-1)^n + b2^n$.

Exercice 3.27 **Écriture binaire d'un entier** D
Montrer que tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 deux à deux distinctes.

Exercice 3.28 **Un peu de Tétris** TD
On dispose d'un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ $(n \geqslant 2)$, que l'on souhaite remplir à l'aide d'un monomino (pièce carrée de taille 1×1 :) et de triminos coudés .
Montrer que quelle soit la position du monomino sur l'échiquier, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec les triminos, comme sur la figure ci-contre.



CORRECTION DES EXERCICES DU TD 3

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.1

1. Tout le monde a lu tous les livres.[1]
2. Tout le monde a lu au moins un livre.[2]
3. Il existe un étudiant qui a lu au moins un livre.
4. Cf question précédente : on peut échanger deux quantificateurs existentiels.
5. Il existe un étudiant qui a lu tous les livres.[3].
6. Tout livre a été lu par au moins un étudiant.
7. Il existe un livre que tous les étudiants ont lu.[4]

[1] Faux : avez vous tous lu le dernier Yann Moix ?

[2] J'espère que oui !

[3] Permettez-moi d'en douter !

[4] Vrai : *La supplication* de Svetlana ALEXIEVITCH.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.2

1. **Faux**. En effet, pour $x = -1$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R},\ x \neq \sqrt{x^2}$ (ce qui est par exemple vrai pour $x = -1$).
2. **Faux**. Pour $x = -3$, on a $x \leqslant 2$ et pourtant $x^2 = 9 > 4$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R},\ x \leqslant 2$ **et** $x^2 > 4$.
3. **Vrai**. $x = \dfrac{1}{4}$ convient, puisque $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ qui est bien plus grand que $\dfrac{1}{4}$.
   Sa négation est $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ x \geqslant \sqrt{x}$.
4. **Faux**. Pour $x = 1$, on a $x = \sqrt{x}$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}_+^*,\ x \geqslant \sqrt{x}$.
5. **Faux**. Si $a = b = 0$, alors, quels que soient u et v dans $\mathbf{Z}$, $au + bv = 0$.
   Sa négation est $\exists (a, b) \in \mathbf{Z}^2,\ \forall (u, v) \in \mathbf{Z}^2,\ au + bv \neq 1$.
6. **Vrai**. Prenons $x = \dfrac{1}{2}$, et $z = 0$ (indépendamment de la valeur de y). Alors quel que soit $y \in \mathbf{Z}$, $0 \neq y + \dfrac{1}{2}$.
   Sa négation est $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{Z},\ \forall z \in \mathbf{R},\ z = x + y$.

Plus généralement

Cette proposition est fausse pour tout $x < 0$.

Rappel

La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.3

1. Nous savons déjà[5] que la fonction cos réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.
   Et donc $\forall a \in [0, 1], \exists! b \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], a = \cos b$.
   Mais qui peut le plus peut le moins : on peut remplacer $\exists!$ par $\exists$, et s'il existe un b dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors il existe $b \in \mathbf{R}$ (mais qui cette fois n'a plus de raison d'être unique !)
2. Soit $t \in [0, 2]$.
   ▶ **Si** $t \leqslant 1$, alors $t = t + 0 = t + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
   Et par la question précédente, il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $t = \cos(x)$.
   Et donc, en prenant $y = 0$, nous venons de prouver qu'il existe deux réels x et y tels que $t = \cos x + \sin y$.
   ▶ **Si** $t > 1$, alors $t - 1 \in [0, 1]$.
   Donc par la question précédente, il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que

$$t - 1 = \cos b \Leftrightarrow t = \cos b + 1 = \cos b + \sin \frac{\pi}{2}.$$

   Et donc il existe deux réels $x = b$ et $y = 0$ tels que $t = \cos x + \sin y$.

[5] Si jamais nous ne l'avons pas dit, à vous de le prouver à l'aide du théorème de la bijection.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.4

1. **Faux**. Par exemple, $x = -1$ n'est pas somme de deux carrés car pour tous réel y et z, $y^2 + z^2 \geqslant 0$ et $-1 < 0$.
2. **Faux**. 3 n'est pas la somme de deux carrés d'entiers.
   En effet, supposons par l'absurde que $3 = p^2 + q^2$ avec $(p, q) \in \mathbf{N}^2$.
   Alors $p^2 = 3 - q^2 \leqslant 3$, donc $p \in \{0, 1\}$.
   De même, $q \in \{0, 1\}$. Or la somme de deux carrés d'entiers valant 0 ou 1 ne peut valoir que 0, 1 ou 2, mais pas 3.

3. **Vrai.** Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x \geqslant 0$, posons alors $y = \sqrt{x}$ et $z = 0$, de sorte que $y^2 - z^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
Si $x < 0$, posons $y = 0$ et $z = \sqrt{-x}$, de sorte que $y^2 - z^2 = 0 - \left(\sqrt{-x}\right)^2 = -(-x) = x$.
Donc nous venons de prouver que tout réel est la différence de deux carrés.
4. **Vrai.** Commençons par noter que $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$.
Et donc en particulier, si $p = q+1$, $p^2 - q^2 = (2q+1)(q+1-q) = 2q+1$.
Donc pour $n \in \mathbf{N}$, en posant $q = n$ et $p = n+1$, on a
$$2n+1 = (n+1+n)(n+1-n) = (p+q)(p-q) = p^2 - q^2.$$

Solution de l'exercice 3.5

1. Rappelons que f est paire si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = f(x)$.
Donc la négation de cette proposition est $\exists x \in \mathbf{R},\ f(-x) \neq f(x)$.
2. Nous avons dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbf{R}_+^*$ tel que f soit T-périodique.
Soit encore $\exists T \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x+T) = f(x)$.
3. Deux options ici : dire que f n'est pas constante revient à dire qu'elle prend au moins deux valeurs. Donc
$$\exists (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x) \neq f(y).$$
Une autre option, plus pédestre, est de dire que f est constante si et seulement si
$$\exists \lambda \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \lambda.$$
Et donc la négation en est $\forall \lambda \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq \lambda$.
4. $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
5. La fonction f est strictement décroissante si et seulement si
$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$
Donc la négation en est $\exists (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x < y$ **et** $f(x) \leqslant f(y)$.
6. $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$.
7. Rappelons que la fonction nulle est la fonction qui vaut **toujours** zéro.
Et donc que f est non nulle dès lors qu'elle ne s'annule pas en au moins un point : $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$.
8. f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur J si tout élément de J possède un unique antécédent par f.
Soit encore $\forall y \in J,\ \exists! x \in \mathbf{R},\ f(x) = y$.
Et si vous n'aimez pas les $\exists!$, cela s'écrit encore
$$\forall y \in J,\ \exists x \in \mathbf{R},\ (f(x) = y) \textbf{ et } (\forall z \in \mathbf{R},\ (y = f(z) \Rightarrow z = x)).$$

⚠ Attention !
Il n'est pas question de permuter les deux quantificateurs, cela signifierait que le $T \in \mathbf{R}_+^*$ peut dépendre du $x \in \mathbf{R}$ choisi, ce que nous ne voulons pas !

Remarque
Si l'on sait que f est à valeurs dans J, il est possible de restreindre les λ à J.

Rappel
La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

Solution de l'exercice 3.6

Supposons que $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)$.
Notons alors x_0 un élément de E tel que $\forall y \in F,\ P(x_0, y)$.
Soit $y \in F$. Alors $P(x_0, y)$ est vraie.
Et donc $\exists x \in E,\ P(x,y)$ est vraie (car on peut prendre $x = x_0$).
Et par conséquent, nous venons de prouver que $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)$.
Nous venons donc bien de prouver que
$$(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)).$$
En revanche, la réciproque est fausse, puisque $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ x \leqslant y$ est vraie[6], alors que $\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \leqslant y$ est fausse[7].
Commentaires : *nous avons dit en cours qu'il n'était pas toujours permis de permuter les symboles $\forall$ et $\exists$.*
Nous venons donc de prouver que si $\exists\forall$ est vraie, alors $\forall\exists$ est vraie aussi, mais la réciproque est fausse ! Et donc on n'a toujours pas le droit de permuter sans précaution les symboles $\forall$ et $\exists$.

[6] Pour tout réel, il existe un réel plus grand.

[7] Il n'existe pas de réel plus grand que tous les réels.

Solution de l'exercice 3.7

Il suffit de faire des tables de vérité.

1.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On en déduit que la négation de $P \Rightarrow Q$ est

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg((\neg P) \vee Q) \equiv \neg(\neg P) \wedge \neg Q \equiv P \wedge (\neg Q).$$

2.a. On pourrait faire des tables de vérité, mais également utiliser ce qui précède :

$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv$ **non**$(P$ **ou** $Q)$ **ou** $R \equiv$ (**non** P **et non** Q) **ou** $R \equiv$ (**non** P **ou** R) **et** (**non** Q **ou** R).

Mais $P \Rightarrow R \equiv$ **non** P **ou** R et $Q \Rightarrow R \equiv$ **non** Q **ou** R, et donc

$(P \Rightarrow Q)$ **et** $(Q \Rightarrow R) \equiv$ ((**non** P **ou** R)) **et** (**non** Q **ou** R).

On a donc bien

$(P$ **ou** $Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R)$ **et** $(Q \Rightarrow R)$.

2.b. Montrons que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ et $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ ont même table de vérité.

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Là aussi, il aurait été possible d'utiliser la question 1 :

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (\neg P \vee (Q \Rightarrow R)) \equiv (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee R.$$

Et sur le même principe, $(P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv (\neg(P \wedge Q) \vee R) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee R$.
Et donc $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.8

Il s'agit de prouver une implication, nous pouvons donc prouver sa contraposée.
Celle-ci est $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |x| > \varepsilon)$.
Soit donc x non nul. Alors $|x| > 0$. Et par conséquent, $\dfrac{|x|}{2} > 0$ et $|x| > \dfrac{|x|}{2}$.
Ainsi, nous venons de prouver[8] que

$$(x \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |x| > \varepsilon).$$

Et donc sa contraposée, qui est notre proposition de départ est également vraie.
Rappel *: une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité. On ne confondra pas la contraposée avec la négation et/ou la réciproque.*

Une autre solution : c'est peut-être un peu moins naturel, mais il est tout à fait possible de revenir à la définition : $P \Rightarrow \equiv P \vee \neg Q$.
Autrement dit, il s'agit de prouver que pour $x \in \mathbf{R}$, $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon)$ **ou** $x \neq 0$.
Si $x \neq 0$, il n'y a rien à dire, on a directement $x \neq 0$, donc $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon)$ **ou** $x \neq 0$.
Et si $x = 0$, alors $|x| = 0$ et donc $\forall \varepsilon > 0, 0 = |x| < \varepsilon$.
Donc on a bien l'implication annoncée.

[8] En prenant $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.9

1. Supposons f localement constante sur I.
Soit alors $x \in I$. Notons alors $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = a$.
Mais en particulier, comme $x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(x) = a$.
Et donc pour tout $t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(t) = f(x)$.

Nous avons donc bien prouvé que $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = f(x)$.

Inversement, si $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = f(x)$, alors pour $x \in I$ fixé, en notant $a = f(x)$, il existe bien $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = f(x) = a.$$

Et donc nous avons prouvé que

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = a$$

de sorte que f est localement constante sur I.

2. Soit f la fonction constante égale à λ sur I.
Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = \lambda$.
En particulier, pour tout $x \in I$, pour tout $t \in]x-1, x+1[\cap I$, $f(t) = \lambda$.
Et donc en prenant $a = \lambda$ et $\varepsilon = 1$, on a $\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(t) = a$. Et donc on a bien

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(t) = a.$$

Et donc f est localement constante.
Un autre exemple de fonction localement constante mais non constante serait la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ définie non pas sur $\mathbf{R}$ mais sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

Remarque
Dans la définition, les variables ε et a peuvent dépendre de x, nous sommes en train de dire que dans le cas précis d'une fonction constante, il est **possible** de prendre les mêmes valeurs pour tout $x \in I$.

3. Considérons la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$.
Prouvons alors que f est localement constante.
Soit donc $x \in \mathbf{R}^*$. Distinguons alors deux cas :
▸ <u>si $x > 0$</u> : notons $\varepsilon = \frac{x}{2}$, de sorte que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}[\subset \mathbf{R}_+^*$ et donc
$\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathbf{R}^*$, $f(t) = 1$.
Donc en posant $a = 1$, on a bien prouvé que

$$\exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0,\ \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[,\ f(t) = a.$$

▸ <u>si $x > 0$</u> : notons alors $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$, de sorte que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{3x}{2}, \frac{x}{2}[\cap \subset \mathbf{R}_-^*$.
Et donc $a = -1$ convient.
Ainsi, on a bien prouvé que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathbf{R}^*,\ f(t) = a.$$

Donc f est localement constante, mais n'est clairement pas constante sur $\mathbf{R}^*$.

4. L'exemple donné ci-dessus se transpose assez bien, pour prouver que si I n'est pas un intervalle, alors il existe une fonction définie sur I, localement constante mais non constante.
En effet, si I n'est pas un intervalle, alors $\exists (x,y) \in I^2, x \leqslant y$ **et** $(\exists z \in \mathbf{R}, (x \leqslant z \leqslant y$ **et** $z \notin I))$.
Autrement dit, il existe trois réels $x \leqslant z \leqslant y$ tels que $x \in I, y \in I$ et $z \notin I$.
Soit alors $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t > z \\ -1 & \text{si } t < z \end{cases} \end{array} \right.$.
On prouve comme ci-dessus que f est localement constante sur I.
Et pourtant $f(x) = -1 \neq f(y) = 1$, donc f n'est pas constante.
Par contraposée, nous venons donc de prouver le sens direct : si toute fonction localement constante sur I est constante, alors I est un intervalle.

Remarque
Nous ne disons rien du cas $t = z$, puisque $z \notin I$.

Réciproquement, supposons que I soit un intervalle, et soit f une fonction localement constante sur I.
Laissons de côté le cas où I est vide[9] ou réduit à un point[10].
Autrement dit, considérons le cas où I est infini[11].
Soit alors $x \in I$, et soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbf{R}$ tels que $\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(t) = a$.
▸ <u>**Si x n'est pas l'une des bornes de** I</u>, c'est-à-dire s'il existe $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.
Alors en prenant $\varepsilon' = \min(\varepsilon, x - x_1, x_2 - x)$, on a $]x-\varepsilon', x+\varepsilon'[\subset I$ et $\forall t \in]x-\varepsilon', x+\varepsilon'[$, $f(t) = a$.

[9] L'ensemble vide est bien un intervalle, bien que peu intéressant.

[10] Idem.

[11] Savez-vous prouvez qu'un intervalle contient soit 0, soit 1, soit une infinité d'éléments ?

Donc f est constante, égale à a sur $]x-\varepsilon', x+\varepsilon'[$.
En particulier, f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.
▸ **Si x est la borne de droite de I**, c'est-à-dire si $I \cap]x, x+\varepsilon[= \emptyset$.
Alors il existe $x_1 \in I$ tel que $x_1 < x$, et donc en posant $\varepsilon' = \min(x - x_1, \varepsilon)$, alors $]x-\varepsilon', x] \subset I$, et pour tout $t \in]x-\varepsilon', x]$, $f(t) = a$.
Comme f n'est pas définie à droite de x, ceci prouve que f est dérivable en x et que $f'(x) = 0$.
▸ **Si x est la borne de gauche de I** : on raisonne comme pour la borne de droite.

Au final, nous venons de prouver que pour tout $x \in I$, f est dérivable en x avec $f'(x) = 0$.
Mais I étant un intervalle (et c'est fondamental ici), si f est de dérivée nulle sur I, alors elle est constante sur I.

Arnaque ? Cette histoire de dérivée en une borne de I n'est pas totalement claire pour l'instant, et nécessitera (une fois de plus) d'avoir une bonne définition de la dérivée. L'idée est que si x n'est pas une borne de I, alors il faut connaître f «autour de x» et «des deux côtés de x» pour parler de sa dérivabilité en x. Pensez par exemple à la valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0, mais dont la restriction à $\mathbf{R}_+$, qui est l'identité de $\mathbf{R}_+$ est dérivable en 0.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.10

Il semble plutôt intuitif[12] que $A \cup B = B$, mais il faut le prouver, ce qui peut se faire par double inclusion.
On a toujours $B \subset A \cup B$.
Inversement, soit $x \in A \cup B$. Alors, par définition d'une union, $x \in A$ ou $x \in B$. Or, si $x \in A$, puisque $A \subset B$, alors $x \in B$.
Donc nous avons prouvé que dans tous les cas, si $x \in A \cup B$, alors $x \in B$, c'est-à-dire que $A \cup B \subset B$.
Et donc on a bien l'égalité annoncée : $A \cup B = B$.

De même, il semble plutôt clair que $A \cap B = A$.
On a toujours $A \cap B \subset A$.
Soit $x \in A$. Alors, puisque $A \subset B$, $x \in B$.
Et donc x est à la fois dans A et dans B : il est dans $A \cap B$.
Nous venons donc de prouver que $\forall x \in A$, $x \in A \cap B$, c'est-à-dire que $A \subset A \cap B$, et donc par double inclusion $A = A \cap B$.

[12] Faire des dessins pour s'en convaincre !

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.11

1. Si $A = B$, il est évident que $A \cup B = A$ et $A \cap B = A$.
   Supposons donc à l'inverse que $A \cap B = A \cup B$.
   On a alors $A \subset A \cup B$, et donc $A \subset A \cap B$. Mais on a toujours $A \cap B \subset B$, et donc $A \subset B$.
   En inversant les rôles de A et de B, on arrive à $B \subset A$, et donc[13] $A = B$.
2. Il est évident que si $B = C$, alors $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.
   Supposons donc $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.
   Prouvons alors que $B \subset C$. Soit $x \in B$.
   ▸ **Si $x \in A$**, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in A \cap C$, de sorte que $x \in C$.
   ▸ **Si $x \notin A$**, alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in A \cup C$.
   Mais puisque $x \notin A$, s'il est dans $A \cup C$, c'est qu'il est dans C.

   Ainsi, nous venons de prouver que $\forall x \in B, x \in C$, de sorte que $B \subset C$.
   En échangeant les rôles de B et C on prouve que $C \subset B$, et donc par double inclusion, $B = C$.

[13] Par double inclusion.

Échange ? Dans l'hypothèse, B et C jouent des rôles totalement symétriques, et donc si on les échange, le même raisonnement reste valable mot pour mot afin de prouver $C \subset B$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.12

1. On n'a pas en général $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.
   En effet, si $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$, alors $A \cup B = \{1, 2\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$, mais pourtant $A \cup B \notin \mathscr{P}(A)$ et $A \cup B \notin \mathscr{P}(B)$.
2. On a bien $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.
   En effet, si E est un ensemble, alors on a

$$\begin{aligned} E \in \mathscr{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow E \subset A \cap B \\ &\Leftrightarrow (E \subset A) \textbf{ et } (E \subset B) \\ &\Leftrightarrow E \in \mathscr{P}(A) \textbf{ et } E \in \mathscr{P}(B) \\ &\Leftrightarrow E \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B). \end{aligned}$$

Et donc ceci prouve bien que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

Pour aller plus loin À quelle(s) condition(s) a-t-on

$$\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)?$$

Détails Si cette équivalence vous semble douteuse, elle est détaillée ci-dessous !

Détaillons tout de même l'équivalence $((E \subset A)$ **et** $(E \subset B)) \Leftrightarrow E \subset A \cap B$.
Supposons que $(E \subset A)$ et que $(E \subset B)$.
Alors pour $x \in E$, on a $x \in A$ et $x \in B$, et donc $x \in A \cap B$. Ceci prouve donc que $E \subset A \cap B$.

Inversement, si $E \subset A \cap B$, puisque $A \cap B \subset A$, alors $E \subset A$. Et on prouve de même que $E \subset B$, de sorte qu'on a bien $(E \subset A)$ et $(E \subset B)$.

Solution de l'exercice 3.13

Procédons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, alors toute partie de F est une partie de F. Mais E lui même est une partie de E, et donc $E \subset F$.
Si vous préférez une rédaction plus formelle : $E \in \mathcal{P}(E)$, et donc $E \in \mathcal{P}(F)$. Et par conséquent, $E \subset F$.

> **Rappel**
> L'équivalence
> $$E \in \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow E \subset F$$
> est la **définition** de $\mathcal{P}(F)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inversement, supposons que $E \subset F$, et soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors $A \subset E$, et donc $A \subset F$. Donc $A \in \mathcal{P}(F)$.
Nous venons donc de prouver que tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est un élément de $\mathcal{P}(F)$, donc $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Solution de l'exercice 3.14

1. Il n'y a pas de grande difficulté ici : $A =]0, 1[\cup \{2\}$.
2. Plus dur : rappelons que $(x > 0) \Rightarrow (x > 1)$ est vraie si $(x > 0)$ et $(x > 1)$ sont vraies, ou si $x > 0$ est fausse.
Donc $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid (x > 0) \textbf{ et } (x > 1)\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
3. Il faut travailler un peu plus ici, et se souvenir que $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P) \vee Q$.
On a donc, pour un réel x fixé,

$$\begin{aligned}(x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 > 4) \textbf{ ou } (x^2 > 4 \textbf{ et } x > 2) &\equiv (x > 2 \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ ou } (x^2 > 4 \textbf{ et } x > 2)\\ &\equiv ((x > 2 \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ et } ((x > 2 \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ ou } x > 2)\\ &\equiv (x > 2 \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ et } (x^2 > 4 \textbf{ ou } x > 2)\\ &\equiv (x > 2 \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ et } (x^2 > 4)\\ &\equiv (x > 2 \textbf{ et } x^2 > 4) \textbf{ ou } x^2 > 4\\ &\equiv x^2 > 4.\end{aligned}$$

Et donc $C = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 > 4\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

Solution de l'exercice 3.15

Utilisons un raisonnement circulaire, en prouvant que 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).
► Supposons que $A \setminus B \subset C$, et prouvons que $A \setminus C \subset B$.
Soit donc $x \in A \setminus C$. Supposons par l'absurde que $x \notin B$. Alors $x \in A$ (car $A \setminus C \subset A$) et $x \notin B$, donc $x \in A \setminus B$. Et donc d'après l'hypothèse, $x \in C$, ce qui contredit le fait que $x \in A \setminus C = A \cap \overline{C}$.
Donc $A \setminus C \subset B$.

► Supposons à présent que $A \setminus C \subset B$, et soit $x \in A$. Alors si $x \notin C$, $x \in A \setminus C$, et donc $x \in B$.
Autrement dit, soit $x \in C$, soit $x \in B$. Et dans tous les cas, $x \in B \cup C$.

► Enfin, supposons que $A \subset B \cup C$, et soit $x \in A \setminus B$.
Alors $x \in A$, donc $x \in B \cup C$. Mais $x \notin B$, et donc $x \in C$.
On en déduit que $A \setminus B \subset C$.

Solution de l'exercice 3.16

Puisque $\{1\}$ est un singleton, on a $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
On en déduit que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.
De même, en se rappelant qu'une partie de $\{1, 2, 3, 4\}$ peut contenir $0, 1, 2, 3$ ou 4 éléments, et en listant toutes les parties à un élément, puis celles à deux éléments, etc, on obtient

$$\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

On a $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
Et donc $\mathscr{P}(\emptyset)$ est un singleton, de sorte que $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
Une étape supplémentaire donne

$$\mathscr{P}\left(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))\right) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

Cet ensemble a donc quatre éléments, de sorte qu'on est dans un cas similaire à $\mathscr{P}(\{1,2,3,4\})$: il suffit de remplacer 1 par $\emptyset$, 2 par $\{\emptyset\}$, 3 par $\{\{\emptyset\}\}$ et 4 par $\{\{\{\emptyset\}\}\}$.
Il vient donc

$$\begin{aligned}\mathscr{P}\left(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))\right) = \{&\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\{\emptyset\}\}\}\},\\ &\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\},\\ &\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}.\end{aligned}$$

> **Danger !**
> $\emptyset$ est l'ensemble vide.
> $\{\emptyset\}$ est un ensemble qui ne contient qu'un élément (lui même un ensemble) : l'ensemble vide.
> $\{\{\emptyset\}\}$ est un ensemble, qui ne contient qu'un élément : l'ensemble $\{\emptyset\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.17

Pour chaque question, je donne plusieurs méthodes afin de vous montrer qu'il existe souvent plusieurs moyens de répondre à la question posée, à vous de voir laquelle est la plus simple (en général, le plus simple est de travailler directement sur les ensembles si c'est possible, en utilisant les propriétés vues en cours).

1. Puisqu'il s'agit de prouver une équivalence, procédons par double implication.
Supposons que $A \cup B = B \cap C$. Alors $B \subset A \cup B \subset B \cap C \subset C$, donc $B \subset C$.
Et de même, $A \subset A \cup B \subset B \cap C \subset B$, donc $A \subset B$.
Ainsi $A \subset B \subset C$.

Inversement, supposons que $A \subset B \subset C$. Il s'agit donc de prouver que $A \cup B = B \cap C$.
Puisque $A \subset B$, on a $A \cup B = B$. Et d'autre part, puisque $B \subset C$, on a $B \cap C = B$.
Et donc $A \cup B = B = B \cap C$.
Ainsi, on a bien prouvé l'équivalence

$$A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \subset C.$$

2. C'est assez évident : pour $x \in E$, on a

$$x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \textbf{non}(x \in \overline{A}) \Leftrightarrow \textbf{non}(\textbf{non}(x \in A)) \Leftrightarrow x \in A.$$

3. Plusieurs options sont possibles[14].
<u>**Première méthode : en travaillant sur les ensembles**</u> : on a

$$A \setminus (B \cap C) = A \cap (\overline{B \cap C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A\overline{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

<u>**Seconde méthode : par équivalences**</u> : pour $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &\Leftrightarrow (x \in A \textbf{ et } x \notin B) \textbf{ ou } (x \in A \textbf{ et } x \notin C)\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \textbf{ et } (x \notin B \textbf{ ou } x \notin C)\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \textbf{ et } (x \in \overline{B} \cup \overline{C})\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \textbf{ et } x \in \overline{B \cap C}\\ &\Leftrightarrow (x \in A) \textbf{ et } x \notin B \cap C\\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cap C). \end{aligned}$$

<u>**Troisième méthode : par double inclusion**</u>.
Soit $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Alors soit $x \in A \setminus B$, soit $x \in A \setminus C$.
Dans le premier cas, $x \in A$, et $x \notin B$, donc $x \notin B \cap C$, de sorte que $x \in A \setminus (B \cap C)$.
Et dans le second cas, $x \in A$ et $x \notin C$, donc $x \notin B\cap$, et donc $x \in A \setminus (B \cap C)$.
On a donc prouvé que $\forall x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $x \in A \setminus (B \cap C)$, de sorte que

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C).$$

Inversement, soit $x \in A \setminus (B \cap C)$. Alors $x \in A$ et $x \notin B \cap C$.
Donc soit $x \notin B$, auquel cas $x \in A \setminus B \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
Soit $x \notin C$, auquel cas $x \in A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
Nous avons donc bien $A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

[14] Et je vous laisse choisir votre préférée...

4. Prouvons directement que $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$, l'autre équivalence en découlera directement en échangeant les rôles de A et B.
Supposons donc que $A \setminus B = A$, et supposons que $A \cap B \neq \emptyset$.
Alors il existe un élément x dans $A \cap B$.
Mais un tel x est alors dans A et dans B, donc n'est pas dans $A \setminus B$. Et puisque $A \setminus B = A$, x n'est donc pas dans A, ce qui est absurde.
On en déduit que $A \cap B = \emptyset$, ce qui prouve que $A \setminus B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
Alternative : encore une fois, on peut raisonner directement sur les ensembles. En effet, on a $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Et donc $A \cap \overline{B} = A \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.
Ce qui implique nécessairement que $A \cap B = \emptyset$.

Méthode
Pour prouver qu'un ensemble est vide, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il contient au moins un élément pour arriver à une contradiction.

Inversement, supposons que $A \cap B = \emptyset$, et prouvons que $A \setminus B = A$.
L'inclusion $A \setminus B \subset A$ est vraie, par définition de $A \setminus B$.
Et si $x \in A$, alors $x \notin B$, faute de quoi on aurait $x \in A \cap B$, contredisant la vacuité de $A \cap B$.
Par conséquent, $x \in A \setminus B$, et donc $A \subset A \setminus B$.
Par double inclusion, $A = A \setminus B$, ce qui achève de prouver la seconde implication, et donc l'équivalence

$$A \setminus B = A \Leftarrow A \cap B = \emptyset.$$

Alternative : on a toujours $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
Et donc si $A \cap B = \emptyset$, $A = (A \setminus B) \cap \emptyset = A \cap B$.

5. Là aussi nous pourrions procéder par double inclusion, mais il est tout aussi simple de procéder par équivalence.
Soit donc $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \setminus \overline{B} &\Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \textbf{ et } (x \notin \overline{B}) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \textbf{ et } (x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in B \setminus A. \end{aligned}$$

Et donc $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.

Encore plus simple : $\overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cap B = B \setminus A$.

Troisième option : utilisons une table de vérité. Soit $x \in E$. Prouvons que $x \in \overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in B \setminus A$	$x \in \overline{A}$	$x \in \overline{B}$	$x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F

Et donc les assertions $x \in B \setminus A$ et $x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$ ont toujours même valeur de vérité : elles sont équivalentes.
On en déduit que $B \setminus A = \overline{B} \setminus \overline{A}$.

6. Il serait possible de raisonner par double inclusion, essayons d'y aller directement par équivalence : soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \complement_A^{A \cap B} &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin A)) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B. \end{aligned}$$

Alternative :

$$\begin{aligned} \complement_A^{A \cap B} &= A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= A \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\ &= \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} = A \setminus B. \end{aligned}$$

Loi de De Morgan.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.18

Commençons par dire deux mots de l'intuition géométrique qui se cache là-derrière : vous savez que $x^2 + y^2 = 1$ est une équation du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
Et donc $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points qui se trouvent à l'intérieur de ce cercle : $\mathscr{C}$ est le disque centré en l'origine et de rayon 1.

Détails : Il s'agit de l'ensemble des points dont la distance à l'origine est inférieure à 1.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe deux parties A et B de $\mathbf{R}$ telles que $\mathscr{C} = A \times B$.
Puisque $(0,1) \in \mathscr{C}$, nécessairement $1 \in B$.
De même, puisque $(1,0) \in \mathscr{C}$, alors $1 \in A$.
Et donc $(1,1) \in A \times B = \mathscr{C}$, ce qui est absurde car $1^2 + 1^2 > 1$.
On en déduit donc que notre hypothèse de départ est fausse : $\mathscr{C}$ n'est pas le produit cartésien de deux parties de $\mathbf{R}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.19

Notons que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $A \cap X \subset A$.
Et donc si $B \not\subset A$, alors l'équation ne possède pas de solution.

Méthode : Nous sommes en train de faire un raisonnement par analyse synthèse, et nous commençons par l'analyse : si X est solution, que peut-on dire à son sujet ?

En revanche, si $B \subset A$, considérons une solution X de l'équation. Alors on a

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup \overline{A}) = \underbrace{(X \cap A)}_{=B} \cup (X \cap \overline{A}) = B \cup (X \cap \overline{A}).$$

Et donc en particulier, $B \subset X$. De plus $X \cap \overline{A} \subset \overline{A}$.
Donc X est de la forme $B \cup C$, avec $C \subset \overline{A}$.

Méthode : Il s'agit ici de la synthèse : si X est de la forme $B \cup C$, est-il bien solution de l'équation ?

Inversement, si $X = B \cup C$, avec $C \subset \overline{A}$, alors

$$A \cap X = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup \underbrace{(A \cap C)}_{=\emptyset \text{ car } C \subset \overline{A}} = A \cap B = B.$$

Et donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathscr{S} = \left\{ B \cup C,\ C \in \mathscr{P}(\overline{A}) \right\} = \left\{ X \in \mathscr{P}(E) \mid B \subset X \subset B \cup \overline{A} \right\}.$$

Intuition : Un ensemble X vérifie $A \cap X = B$ si et seulement si X contient B tout entier, ainsi que des éléments qui ne sont pas dans A.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.20

Juste pour le plaisir, et bien que ceci ne nous soit pas vraiment utile dans la suite, reformulons l'énoncé : il s'agit de prouver que

$$\exists i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\},\ E_j \not\subset E_i.$$

Nous allons prouver le résultat par récurrence sur n, le nombre d'ensembles.
Autrement dit, nous prouvons la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante : «quelles que soient $E_1, \dots, E_n$ des parties deux à deux distinctes de E, il en existe une qui ne contienne aucune des autres.»
Notons que là encore, il peut être instructif[15] d'essayer d'écrire $\mathscr{P}(n)$ à l'aide de quantificateurs :

[15] Oserais-je dire «amusant» ?

$$\mathscr{P}(n) : \forall (E_1, \dots E_n) \in \mathscr{P}(E)^n,\ (\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow E_i \neq E_j) \Rightarrow (\exists i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\},\ E_j \not\subset E_i).$$

Pour $n = 2$, donnons nous deux parties E_1, E_2 de E distinctes.
Alors on ne peut avoir à la fois $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_1$, car alors on aurait $E_1 = E_2$, contredisant le fait que $E_1 \neq E_2$.
Donc on a toujours soit[16] E_1 qui ne contient pas E_2, soit E_2 qui ne contient pas E_1.
Supposons à présent que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et considérons $E_1, \dots, E_{n+1}$ des parties distinctes de E.
Par hypothèse de récurrence, l'un des $E_1, \dots, E_n$, appelons-le E_i, ne contient aucun des autres.
Il y a alors deux cas possibles :

[16] Et peut-être même les deux à la fois !

- Si $E_{n+1} \not\subset E_i$, alors aucun des $E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_{n+1}$ n'est contenu dans E_i.
- Si $E_{n+1} \subset E_i$, alors E_{n+1} ne contient aucun des E_k, $k \in [\![1,n]\!]$.
  En effet, pour $k \neq i$, si on avait $E_k \subset E_{n+1}$, comme $E_{n+1} \subset E_i$, on aurait également $E_k \subset E_i$, ce qui contredit la définition de i.

Et pour $k = i$, on ne peut avoir $E_i \subset E_{n+1}$ car on a déjà $E_{n+1} \subset E_i$, et par hypothèse $E_i \neq E_{n+1}$.
Et donc E_{n+1} ne contient aucun des ensembles $E_1, \dots, E_n$.

Ainsi, dans tous les cas, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.
Et donc, pour toute famille finie de parties deux à deux distinctes de E, l'une[17] de ces parties n'en contient aucune autre.

[17] Au moins.

Solution de l'exercice 3.21

Il s'agit donc de prouver que $x \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbf{Q}$.
Prouvons plutôt la contraposée, qui est : $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$.
Si $\sqrt{x} \in \mathbf{Q}$, alors il existe deux entiers a et b, avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{x} = \dfrac{a}{b}$.
Et donc $x = (\sqrt{x})^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ est également le quotient de deux entiers, donc dans $\mathbf{Q}$.
Ainsi, on a bien prouvé que $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$, de sorte que $x \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbf{Q}$.

Solution de l'exercice 3.22

Il s'agit de prouver que pour tout $(i,j) \in [\![0, r-1]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.
Soient donc $i \neq j$ deux élément distincts de $[\![0, r-1]\!]$, et supposons qu'il existe $n \in A_i \cap A_j$.
Alors, puisque $n \in A_i$, il existe $k_1 \in \mathbf{Z}$ tel que $n = rk_1 + i$, et de même, il existe $k_2 \in \mathbf{Z}$ tel que $n = rk_2 + j$.
On a donc $0 = n - n = r(k_1 - k_2) + i - j \Leftrightarrow i - j = r(k_2 - k_1)$.
Donc r divise $i - j$. Mais on a $-r + 1 \leqslant i - j \leqslant r - 1$, et le seul nombre de $[\![-r+1, r-1]\!]$ qui est divisible par r est 0, donc $i = j$, ce qui est absurde.
Ainsi, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Danger !
L'erreur à ne pas faire serait de supposer que k_1 et k_2 sont égaux. Autrement dit, d'écrire : «il existe k tel que $n = kr + i$ et $n = kr + j$.»

Solution de l'exercice 3.23

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls[18].
Alors $q\ln(2) = p\ln(3) \Leftrightarrow \ln(2^q) = \ln(3^p) \Leftrightarrow 2^q = 3^p$.
Mais 2^q est pair, alors que 3^p est impair, d'où une contradiction.
On en déduit que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbf{Q}$.

[18] Puisque $\ln(2) \neq 0$, il est raisonnable de supposer $p \neq 0$.

Solution de l'exercice 3.24

Supposons que $\alpha \in \mathbf{Q}$. Alors α^2 est encore dans $\mathbf{Q}$.
Or, $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Donc $\sqrt{6} = \dfrac{\alpha^2 - 5}{2}$ est un rationnel : il existe deux entiers p et q tels que la fraction $\dfrac{p}{q}$ soit irréductible et égale à $\sqrt{6}$.
Alors $\dfrac{p^2}{q^2} = 6 \Leftrightarrow 6q^2 = p^2$.
La suite de la preuve est alors la même que pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$: on montre que p est pair, puis que q est pair, contredisant l'irréductibilité de $\dfrac{p}{q}$.
Et donc notre hypothèse de départ est fausse : $\alpha \notin \mathbf{Q}$.

De même, si $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}} \in \mathbf{Q}$, alors son carré $4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ est dans $\mathbf{Q}$ car somme de deux rationnels.
Donc $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ est rationnel, et donc son carré aussi : $3 + \sqrt{2}$ est rationnel. Donc $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est absurde !
On en déduit que $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$ est irrationnel.

Solution de l'exercice 3.25

1. Procédons par analyse synthèse, et soit f une telle fonction. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, en prenant $y = 0$, il vient $f(0) = f(0) + f(x)$, donc $f(x) = 0$.
Par conséquent, f est la fonction nulle.

Inversement, il est clair que la fonction nulle satisfait à la relation donnée.
Et donc la fonction nulle est la seule fonction à satisfaire cette relation.
Remarque *: plus généralement, le même raisonnement prouve qu'une telle fonction ne peut pas être définie sur un ensemble contenant* 0.
En particulier, le $\ln$ *vérifie bien* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$*, mais son ensemble de définition ne contient pas* 0 *!*

2. Supposons que f satisfasse $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
Alors en prenant $x = y = 0$, il vient $f(0)^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(1 - f(0)) = 0$.
Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
En prenant $x = 0$ et $y = 1$, il vient $f(0)f(1) - f(0) = 1$, donc $f(0) \neq 0$, de sorte que $f(0) = 1$.
On en déduit donc que $f(1) - 1 = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2$.
Et donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)f(0) - f(0 \times x) = x \Leftrightarrow f(x) = 1 + x$.
Ainsi, la seule fonction susceptible de satisfaire les conditions de l'énoncé est la fonction $x \mapsto 1 + x$.

Inversement, notons $f : x \mapsto 1 + x$. Alors pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$f(x)f(y) - f(xy) = (1 + x)(1 + y) - (1 + xy) = 1 + x + y + xy - 1 - xy = x + y.$$

Donc la fonction f satisfait bien aux conditions de l'énoncé.
On en déduit que la seule fonction vérifiant les conditions requises est $x \mapsto 1 + x$.

Solution de l'exercice 3.26

Procédons par analyse-synthèse.
Si deux tels réels a et b existent, alors en particulier, $1 = u_0 = a(-1)^0 + b2^0 = a + b$.
Et de même, $3 = u_1 = a(-1)^1 + b2^1 = -a + 2b$.

Donc $\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{4}{3} \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Ainsi, si deux tels réels existent, nous les avons uniquement déterminés.

Reste à faire la synthèse : il faut encore prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+2}\right)$.
Pour ce faire, procédons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$, en prouvant la propriété $\mathscr{P}(n) : u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+2}\right)$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est vrai (car nous avons tout fait pour !)
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies, c'est-à-dire que $u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+2}\right)$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^{n+3}\right)$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n &= \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2(-1)^n + 2^{n+3} + 22^{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left((-1)^n(2 - 1) + 2^{n+2}(2 + 2)\right) = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+2} + 2^{n+2+2}\right). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence double, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Solution de l'exercice 3.27

Prouvons le résultat par récurrence forte sur n.
Plus précisément, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : «il existe $p \in \mathbf{N}^*$ et $k_1, \dots, k_p$ des entiers deux à deux distincts tels que $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_p}$».
Pour $n = 1$, on a $n = 2^0$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie[19].
Supposons donc que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et distinguons deux cas suivant la parité de $n + 1$.

► **Si $n + 1$ est pair :** alors il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $n + 1 = 2m$.
On a alors $m \leqslant n$, et donc $\mathscr{P}(m)$ est vraie, de sorte que $m = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_p}$ et donc $n = 2^{k_1+1} + \cdots + 2^{k_p+1}$ où $k_1 + 1, \dots, k_p + 1$ sont deux à deux distincts.
Et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

► **Si $n + 1$ est impair** : alors $n + 1 = 2m + 1$, avec $m \leqslant n$.

[19] Avec $p = 1$ et $k_1 = 0$.

Et donc par hypothèse de récurrence forte, $\mathscr{P}(m)$ est vraie, de sorte qu'il existe $k_1, \dots, k_p$ deux à deux distincts tels que $m = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_p}$.
Et alors $n = 2^{k_1+1} + \cdots + 2^{k_p+1} + 1 = 2^{k_1+1} + \cdots + 2^{k_p+1} + 2^0$ est bien somme de puissances de 2 deux à deux distinctes, de sorte que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Solution de l'exercice 3.28

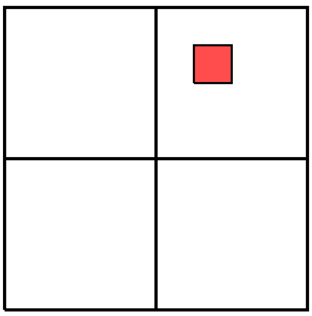
Nous allons raisonner par récurrence[20] sur n, et plus précisément prouver la proposition $\mathscr{P}(n)$: «pour tout échiquier de taille $2^n \times 2^n$, quelle que soit la position du monomino, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec des triominos».
Pour $n = 2$, ça se passe d'explications[21].
Supposons donc que l'on sache paver tout échiquier carré de côté 2^n privé d'une case à l'aide de triominos, et considérons un échiquier carré de côté 2^{n+1}, sur lequel se trouve déjà un monomino. Et procédons en plusieurs étapes[22].

[20] Simple.

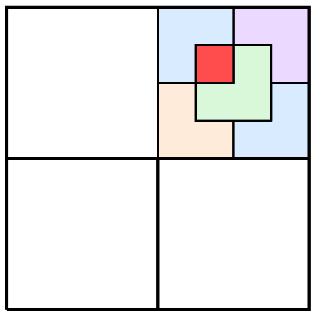
[21] Il n'y a que trois cases vides !

[22] Ces étapes sont illustrées sur la figure ci-dessous.

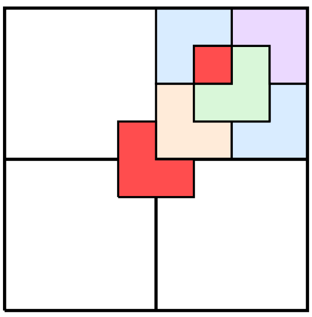
- **Étape 1** : partageons l'échiquier en 4 échiquiers carrés de côté 2^n.
- **Étape 2** : Le monomino se trouve alors dans l'un de ces 4 sous-échiquiers. Par hypothèse de récurrence, on peut donc paver ce sous-échiquier avec des triominos.
- **Étape 3** : positionnons un triomino au centre de l'échiquier, de manière à ce qu'il intersecte les trois sous-échiquiers ne contenant pas le monomino.
- **Étape 4** : les trois sous-échiquiers restants ont alors une seule case occupée. Par hypothèse de récurrence, ils sont donc pavables par des triominos.
  Et donc quelle que soit la position de départ du monomino, l'échiquier de côté 2^{n+1} est pavable par des triominos.



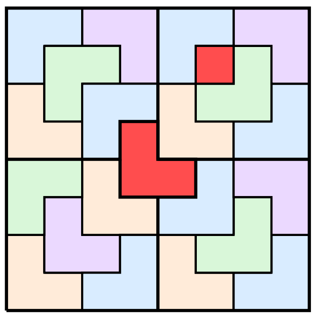
Étape 1



Étape 2



Étape 3



Étape 4

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et donc par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n.