

TD 5 : FONCTIONS CIRCULAIRES

► Fonctions circulaires

EXERCICE 5.1

1. En notant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.
2. Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$.

F

EXERCICE 5.2

1. Écrire $\sin(5x)$ sous forme d'un polynôme en $\sin(x)$.
2. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{4}}$.

PD

EXERCICE 5.3 Soient p, q deux réels tels que $\sin p + \sin q \neq 0$. Simplifier $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$. En déduire la valeur de $\tan \frac{\pi}{24}$ sans déterminer $\cos \frac{\pi}{24}$, ni $\sin \frac{\pi}{24}$.

AD

EXERCICE 5.4 Étudier le signe sur $[0, 2\pi]$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x) - \cos(3x)$.

PD

EXERCICE 5.5 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $x^3 \leq x^2$, et déterminer les valeurs de x pour lesquelles cette inégalité est une égalité. En déduire l'ensemble des solutions de $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$.

PD

EXERCICE 5.6 Équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes. *Autant que possible, on s'aidera d'un cercle trigonométrique.*

1. $\cos x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $|\tan(x)| \leq 1$
3. $\cos^2(x) \geq \frac{1}{4}$
4. $2 \sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$
5. $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) > 1$.

F

EXERCICE 5.7 Formules de la tangente de l'arc moitié

Soit $x \notin \pi + 2\pi\mathbf{Z}$. On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrer que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, et $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$.

PD

EXERCICE 5.8 Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Retrouver alors les valeurs de $\cos \frac{\pi}{6}$ et $\cos \frac{\pi}{3}$.

F

EXERCICE 5.9 Résoudre les équations suivantes :

1. $\tan(2x) = 3 \tan(x)$
2. $\cos(2x) - \cos(3x) = 0$
3. $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$

AD

EXERCICE 5.10 Résoudre l'inéquation $\sqrt{1 + 2 \cos(x)} \leq \sin x$.

EXERCICE 5.11 Résoudre l'inéquation $\cos^2(x) - \cos(x) \sin(x) \geq 1$. *On pourra commencer, lorsque c'est possible, par se ramener à une inéquation en $\tan x$.*

PD

EXERCICE 5.12 Montrer que pour $n \geq 2$, on a $2 \cos \frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ (où il y a $n - 1$ racines carrées).

PD

EXERCICE 5.13

1. Démontrer que pour tout α dans un ensemble à préciser, on a $\tan^2 \alpha \tan(2\alpha) = \tan(2\alpha) - 2 \tan \alpha$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \tan^2 \frac{x}{2^k} \tan \frac{x}{2^{k-1}}$ où $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Donner la limite de S_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

AD

EXERCICE 5.14 Un produit infini

1. Montrer que pour $x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$.
2. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t}$.
3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$.

AD

EXERCICE 5.15 Pour $x \in \mathbf{R}$, comparer $\cos(\sin(x))$ et $\sin(\cos(x))$.

TD

► Fonctions circulaires réciproques

EXERCICE 5.16 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\frac{x}{x^2+1} \leq \text{Arctan}(x) \leq x$.

F

EXERCICE 5.17 Calculer les nombres suivants :

F

1. $\text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{13}\right)\right)$
2. $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$
3. $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
4. $\text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{22\pi}{7}\right)\right)$
5. $\text{Arccos}\left(\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right)$
6. $\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

EXERCICE 5.18 Calculer $\text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3)$.

PD

EXERCICE 5.19 Simplifier les expressions suivantes, en précisant les valeurs de x pour lesquelles elles ont un sens :

AD

1. $\sin(2 \text{Arcsin } x)$
2. $(\star) \sin(\text{Arctan } x)$
3. $\cos^2\left(\frac{1}{2} \text{Arccos } x\right)$
4. $\tan(\text{Arccos } x)$
5. $\cos(3 \text{Arccos } x)$

EXERCICE 5.20 Tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x)) - \frac{1}{2} \text{Arccos}(\cos(2x))$.

PD

EXERCICE 5.21 Montrer les identités suivantes :

PD

1. $\text{Arccos} \frac{5}{13} = 2 \text{Arctan} \frac{2}{3}$
2. $2 \text{Arccos} \frac{3}{4} = \text{Arccos} \frac{1}{8}$
3. $2 \text{Arcsin} \frac{3}{5} = \text{Arccos} \frac{7}{25}$

EXERCICE 5.22

AD

1. Pour $k \in \mathbf{N}$, simplifier $\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k)$.
2. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \text{Arctan} \frac{1}{k^2 + k + 1}$.

EXERCICE 5.23 À l'aide de calculs de dérivées, prouver les formules suivantes :

AD

1. $\forall x \in]-1, 1[, \text{Arcsin}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
2. $\forall x \in [0, 1], \text{Arcsin}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{Arcsin}(2x-1)$

EXERCICE 5.24 Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$.

PD

1. Vérifier que f est bien définie.
2. Justifier que tout réel positif x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \tan^2(\theta/2)$, avec $0 \leq \theta < \pi$.
3. Montrer alors que $f(x) = 2 \text{Arctan}(\sqrt{x})$.

EXERCICE 5.25 Soit $f : x \mapsto \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(2x)$.

AD

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de f .
2. Calculer la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ possède une unique solution.
4. Déterminer cette solution.

EXERCICE 5.26 Résoudre l'équation $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

D

EXERCICE 5.27

AD

1. Simplifier $\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x))$ pour $x \in \mathbf{R}$.
2. Résoudre l'équation $\text{th}(x) = \frac{5}{13}$
3. En déduire que $\text{Arctan} \frac{5}{12} + \text{Arccos} \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 5.28 (Oral Polytechnique)

TD

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x \geq 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_0 + \dots + u_n)^2}$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{u_n}$. On pourra noter $\theta_n = \text{Arcsin} \frac{1}{u_n}$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 5

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.1

1. On a

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Et de même,

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

2. On a

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(2 \frac{\pi}{8} \right) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1.$$

$$\text{Et donc } \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Puisque $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{\pi}{8} \geq 0$ et donc on en déduit que

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

On en déduit donc que $\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$.Et de même, puisque $\sin \frac{\pi}{8} \geq 0$, il vient donc $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

Enfin, on a

$$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

Notons qu'on pourrait aussi utiliser

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} - 1 = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} - 1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

ce qui, en notant que $\tan \frac{\pi}{8} \geq 0$ conduit au même résultat, à savoir $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.2

1. On a $\sin(5x) = \sin(4x + x) = \sin(x) \cos(4x) + \cos(x) \sin(4x)$.

Mais

$$\cos(4x) = 1 - 2 \sin^2(2x) = 1 - 2(2 \cos(x) \sin(x))^2 = 1 - 8 \cos^2(x) \sin^2(x) = 1 - 8(1 - \sin^2(x)) \sin^2(x) = 1 - 8 \sin^2(x) + 8 \sin^4(x).$$

Et de même, $\sin(4x) = 2 \cos(2x) \sin(2x) = 2(1 - 2 \sin^2(x)) 2 \cos(x) \sin(x)$.

Et donc

$$\begin{aligned} \sin(5x) &= \sin(x) - 8 \sin^3(x) + 8 \sin^5(x) + 4(1 - \sin^2(x)) \cos^2(x) \sin(x) \\ &= \sin(x) - 8 \sin^3(x) + 8 \sin^5(x) + 4(1 - 2 \sin^2(x)) \cos^2(x) \sin(x) \\ &= \sin(x) - 8 \sin^3(x) + 8 \sin^5(x) + 4((\sin(x) - 2 \sin^3(x))(1 - \sin^2(x))) \\ &= \sin(x) - 8 \sin^3(x) + 8 \sin^5(x) + 8 \sin^5(x) - 12 \sin^3(x) + 4 \sin(x) \\ &= 16 \sin^5(x) - 20 \sin^3(x) + 5 \sin(x). \end{aligned}$$

2. Notons $s = \sin \left(\frac{\pi}{5} \right)$. Puisque $\sin \left(5 \frac{\pi}{5} \right) = \sin(\pi) = 0$, d'après la question précédente, il vient

$$16s^4 - 20s^3 + 5s = 0 \Leftrightarrow s(16s^4 - 20s^2 + 5) = 0.$$

⚠ Attention !

Si on ne prend pas garde de vérifier la positivité de $\cos \frac{\pi}{8}$, on peut seulement affirmer que

$$\left| \cos \frac{\pi}{8} \right| = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}.$$

Alternative

On aurait aussi pu utiliser la formule

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

et utiliser la valeur de $\cos^2 \frac{\pi}{8}$ calculée plus tôt, en justifiant là encore que $\tan \frac{\pi}{8} \geq 0$.

Il est clair¹ que $s \neq 0$, et donc $16s^4 - 20s^2 + 5 = 0$.

Posons alors $S = s^2$, de sorte que S est racine de $16S^2 - 20S + 5$.

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 80$, de sorte que les deux racines en sont

$$S_1 = \frac{20 - \sqrt{80}}{32} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \text{ et } S_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}.$$

Puisque $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, on a $0 < s < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mais $S_2^2 = \frac{30 + 10\sqrt{5}}{64} \geq \frac{30 + 10\sqrt{4}}{64} > \frac{1}{2}$, de sorte que $S_2 > \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit donc que $S = S_1$. Et puisque $s > 0$, $s = \sqrt{S_1} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.3

On applique nos formules :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \text{ et } \cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

Donc en passant au quotient, $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = \tan \frac{p-q}{2}$.

Comme dans l'exercice 1, on a $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, et donc pour $p = \frac{\pi}{3}$ et $q = \frac{\pi}{4}$, il vient

$$\tan \frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{6} - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.4

Rappelons qu'on a $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos(2x) - \cos(3x) = 2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2}.$$

Sur $[0, \pi]$, $\sin \frac{5x}{2} \geq 0$, et donc le signe de $\cos(2x) - \cos(3x)$ est entièrement déterminé par celui de $\sin \frac{x}{2}$.

x	0	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$	2π	
$\sin \frac{5x}{2}$	0	+	0	-	0	+	0

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.5

Pour $-1 \leq x < 0$, c'est évident car $x^3 < 0$ et $x^2 > 0$. Et on ne peut alors pas avoir égalité. Pour $x \in [0, 1]$, on a $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ qui est négatif, et s'annule uniquement pour $x = 0$ ou $x = 1$.

Donc $x^3 \leq x^2$, avec égalité si et seulement si $x \in \{0, 1\}$.

Puisque pour tout réel x , $\cos x \in [-1, 1]$ et $\sin(x) \in [-1, 1]$, alors ce qui précède s'applique, et donc $\cos^3 x + \sin^3 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x \leq 1$.

Et on a égalité si et seulement si on a simultanément $\cos x \in \{0, 1\}$ et $\sin x \in \{0, 1\}$.

Soit si et seulement si $x \in \{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.6

1. Rappelons que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Et donc pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a $\cos(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Par 2π -périodicité du cosinus, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right]$.

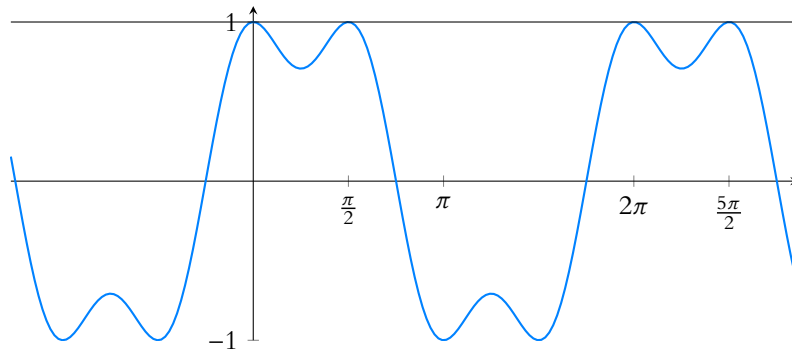
¹ Car $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$.

Remarque

Il ne coûte pas beaucoup plus cher de prouver que

$$\sin(2\pi/5) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

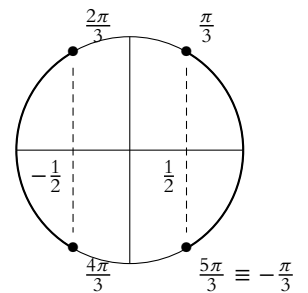
puisque'il s'agit aussi d'une racine positive de $16X^5 - 20X^3 + 5X$, et qu'elle est strictement plus grande que $\sin(\pi/5)$.

FIGURE 5.1 – La fonction $x \mapsto \cos(x)^3 + \sin(x)^3$.

2. Nous savons que \tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
Et donc pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \tan(x) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
Par π -périodicité de \tan , l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$.

3. On a $\cos^2(x) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2}$ ou $\cos(x) \leq -\frac{1}{2}$.
Sur $[0, 2\pi]$, l'ensemble des solutions est donc $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.
Une manière peut-être un peu plus élégante de le dire est que dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.
Et donc l'ensemble des solutions dans \mathbf{R} est

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right] \cup \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right] \right).$$



4. Nous savons que $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$ et donc

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x + \sin^2(2x) &= 2 \sin^2(x) + 4 \cos^2(x) \sin^2(x) = 2 \sin^2(x) (1 + 2 \cos^2(x)) \\ &= 2 \sin^2(x) (1 + 2(1 - \sin^2(x))) \\ &= 2 \sin^2(x) (3 - 2 \sin^2(x)). \end{aligned}$$

Posons alors $X = \sin^2(x)$, de sorte que l'équation de départ s'écrit encore

$$X(3 - 2X) = 1 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X + 1 = 0.$$

Les solutions en sont alors $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.

Donc x est solution de l'équation de départ si et seulement si $\sin(x) = \pm 1$ ou $\sin(x) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

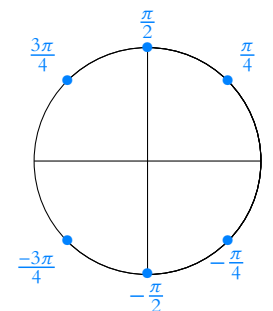
Et donc l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

5. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(x) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin(x) \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$$

Et donc on a

$$\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) > 1 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) > \frac{1}{2}.$$



Méthode

Pour simplifier une expression de la forme

$$A \cos x + B \sin x$$

factoriser par $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Pour $x + \frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$, ceci est équivalent à $x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi - \frac{\pi}{6}\right] = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right].$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.7

Commençons par noter que l'hypothèse faite sur x est équivalente à $\frac{x}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, ce qui garantit l'existence de t .

On a alors $\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$.

Mais puisque $\frac{x}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ et donc

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Et donc $\cos x = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

De même, on a

$$\sin(x) = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = \frac{2}{1+t^2}t = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Enfin, la dernière formule est immédiate en se souvenant que

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.8

On a

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(x+2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) \\ &= \cos(x)(2\cos^2(x) - 1) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\ &= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x) \\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

Notons qu'en particulier, pour $x = \frac{\pi}{3}$, on obtient $-1 = \cos(\pi) = 4\cos^3\frac{\pi}{3} - 3\cos\frac{\pi}{3}$.

Et donc $\cos\frac{\pi}{3}$ est racine du polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X + 1$.

Or, -1 est racine évidente de P , qui se factorise donc en $P(X) = (X+1)(4X^2 - 4X + 1)$, dont les racines sont -1 , $\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{2}$.

Puisque $\cos\frac{\pi}{3} \neq -1$ et $\cos\frac{\pi}{3} > 0$, on en déduit que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

De là, il vient² $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

² Car $\sin\frac{\pi}{3} \geq 0$.

Puis en notant que $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, on obtient $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

De même, on a

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \sin(2 \times 2x) = 2\sin(2x)\cos(2x) \\ &= 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1) \\ &= 8\cos^3(x)\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x).\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.9

- Notons que l'équation n'a de sens que si x et $2x$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π c'est-à-dire si et seulement si $x \notin \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Nous savons que

$$\tan(2x) = \tan(x+x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

et donc

$$\tan(2x) = 3 \tan(x) \Leftrightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan(x) \Leftrightarrow 2 \tan(x) = 3 \tan(x)(1 - \tan^2(x)) \Leftrightarrow \tan(x) (3 \tan^2(x) - 1) = 0.$$

Et donc si et seulement si $\tan x = 0$ ou $\tan(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C'est le cas si et seulement si $x \equiv 0 \pmod{\pi}$ ou $x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\pi}$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{\pi}$.

2. On a $\cos(2x) - \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(3x)$, ce qui est le cas si et seulement si

$$2x \equiv 3x \pmod{2\pi} \text{ ou } 2x \equiv -3x \pmod{2\pi}.$$

Soit encore si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$2x = 3x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -3x + 2k\pi \Leftrightarrow x = -k\pi \text{ ou } x = k\frac{2\pi}{5}.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{ \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

3. Par les formules de Simpson, on a

$$\cos x + \cos(3x) = 2 \cos\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2 \cos(2x) \cos(x).$$

D'autre part, $1 + \cos(2x) = 2 \cos^2(x)$, et donc

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(x) (\cos(2x) + \cos(x)) = 0.$$

Donc l'équation est satisfaite si et seulement si $\cos(x) = 0$ ou

$$\cos(2x) = -\cos(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x).$$

Soit encore si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ou $2x \equiv \pi - x \pmod{2\pi}$ ou $2x \equiv x - \pi \pmod{2\pi}$.

Mais $2x \equiv \pi - x \pmod{2\pi} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{2\pi}{3}}$ et $2x \equiv x - \pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow x \equiv -\pi \pmod{2\pi}$.

Donc au final l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \{(2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

Et puisque $(2k+1)\pi = \frac{\pi}{3} + 3k\frac{2\pi}{3}$, on peut donc écrire plus simplement que l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.10

Les fonctions sin et cos étant 2π -périodiques, il suffit de chercher les solutions dans $] -\pi, \pi]$, les autres s'obtiendront par translation de $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Nous supposons donc dans la suite que $x \in] -\pi, \pi]$.

Commençons par noter que le membre de gauche n'a de sens que si

$$1 + 2 \cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq -\frac{1}{2}.$$

Soit encore si et seulement si $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.

Puisqu'une racine est toujours positive, pour $x \in \left] -\frac{2\pi}{3}, 0 \right[$, on a $\sin(x) < 0$, et donc x n'est évidemment pas solution de l'équation.

Enfin, pour $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3} \right]$, alors

$$\sqrt{1 + 2 \cos(x)} \leq \sin(x) \Leftrightarrow 1 + 2 \cos(x) \leq \sin^2(x) \Leftrightarrow \cos^2(x) + 2 \cos(x) \leq 0 \Leftrightarrow \cos(x)(2 + \cos(x)) \leq 0.$$

Remarque

Ceci pourrait aussi s'écrire entièrement avec des congruences si on est à l'aise.

Par exemple,

$$2x \equiv -3x \pmod{2\pi} \Leftrightarrow 5x \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{5}}$$

Puisque $2 + \cos(x)$ est évidemment positif, cette dernière inégalité n'est vérifiée que pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Et donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ dans $]-\pi, \pi]$ est $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.11

Notons que par 2π -périodicité de \sin et \cos , il suffit de chercher les solutions dans $[-\pi, \pi]$.
Mieux : \cos^2 et $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ sont π -périodiques, et il suffit donc de chercher les solutions dans $[0, \pi]$.

On suppose donc dans la suite que $x \in [0, \pi]$.

Notons que pour $x \neq \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire tel que $\tan x$ existe, on a $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ et

$$\cos(x)\sin(x) = \cos^2(x)\tan(x) = \frac{\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}.$$

Et donc il s'agit de résoudre l'inéquation :

$$\frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \geq 1.$$

Posons alors $X = \tan x$. On a

$$\frac{1 - X}{1 + X^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1 - X}{1 + X^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-X^2 - X}{1 + X^2} \geq 0 \Leftrightarrow X(X + 1) \leq 0.$$

Ce qui est le cas si et seulement si $X \in [-1, 0]$. Soit encore si et seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.12

Prouvons le résultat par récurrence sur $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, on a $2 \cos \frac{\pi}{2^2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, donc la récurrence est initialisée.

Supposons la formule vraie à un rang $n \geq 2$. Alors $2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = 2 \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2^n}}{2}\right)$.

Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$.

Soit encore $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$.

En particulier, $2 \cos^2 \frac{\pi}{2^{n+1}} = 1 + \cos \frac{\pi}{2^n}$ et donc $4 \cos^2 \frac{\pi}{2^{n+1}} = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^n} = 2 +$

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{(n-1) \text{ racines}}$$

Puisque $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est positif, et donc

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ racines}}.$$

Donc par le principe de récurrence, la formule est valable pour tout $n \geq 2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.13

1. Pour que $\tan \alpha$ et $\tan(2\alpha)$ aient un sens, il faut que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ et $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour un tel α , on a $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ et donc

$$\tan(2\alpha) - 2 \tan \alpha = \frac{2 \tan \alpha - 2 \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \tan(2\alpha).$$

2. En utilisant la formule de la question précédente³, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \tan^2 \frac{x}{2^k} \tan \frac{x}{2^{k-1}} &= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \left(\tan \frac{x}{2^{k-1}} - 2 \tan \frac{x}{2^k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \tan \frac{x}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^n 2^k \tan \frac{x}{2^k} \\ &= \tan x - 2^n \tan \frac{x}{2^n}. \end{aligned}$$

³ Qui est valable car pour $k \geq 1$,

$$-\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2^k} \leq \frac{\pi}{4}.$$

3. Il nous faut donc déterminer la limite de $2^n \tan \frac{x}{2^n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Or,

$$2^n \tan \frac{x}{2^n} = x \frac{\tan \frac{x}{2^n} - \tan(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \tan'(0) = x(1 + \tan^2(0)) = x.$$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \tan(x) - x$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.14

Notons que si x n'est pas un multiple entier de 2π , aucun des $\frac{x}{2^k}$, $k \geq 1$ n'est multiple de π , et donc les $\sin \frac{x}{2^k}$ sont tous non nuls.

1. La formule étant donnée dans l'énoncé, prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}}$ car $2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \sin(x)$.

Supposons donc la formule vraie au rang n .

Alors

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{x}{2^k} &= \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} \cos \frac{x}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \cos \frac{x}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sin x}{2^n \sin \left(2 \frac{x}{2^{n+1}}\right)} \cos \frac{x}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sin x}{2^n 2 \sin \frac{x}{2^{n+1}} \cos \frac{x}{2^{n+1}}} \cos \frac{x}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sin x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^{n+1}}}. \end{aligned}$$

Et donc la formule est encore vraie au rang $n+1$, de sorte que par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

Alternative sans récurrence : on peut faire le même calcul sans récurrence, en notant

que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\sin \frac{x}{2^{k-1}} = 2 \sin \frac{x}{2^k} \cos \frac{x}{2^k}$ et donc $\cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{\cos \frac{x}{2^{k-1}}}$. Et donc

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} &= \prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^k}} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n \sin \frac{x}{2^{k-1}}}{2^n \prod_{k=1}^n \sin \frac{x}{2^k}} \\ &= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}. \end{aligned}$$

Produit télescopique.

2. Il s'agit de remarquer que

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

3. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc par la question précédente, $\frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

On en déduit que $2^n \sin \frac{x}{2^n} = x \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

Et donc $\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\sin x}{x}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.15

Posons $f(x) = \sin(\cos(x)) - \cos(\sin(x))$. Il s'agit donc de déterminer le signe de $f(x)$.

On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\cos(x)) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin(x)\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\cos(x) + \sin(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2}\right) \end{aligned}$$

Rappel

$$\begin{aligned} \text{On a } \sin(p) - \sin(q) \\ = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}. \end{aligned}$$

Mais nous savons également que

$$\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin(x) + \sin \frac{\pi}{4} \cos(x) \right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Et de même,

$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Donc

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sin(x) + \cos(x)}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et de même,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par conséquent

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sin(x) + \cos(x)}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

et de même,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Mais puisque⁴ $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4}$, alors $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$ et $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$-\pi \leq \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$$

et

$$0 < \frac{\cos x - \sin x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi.$$

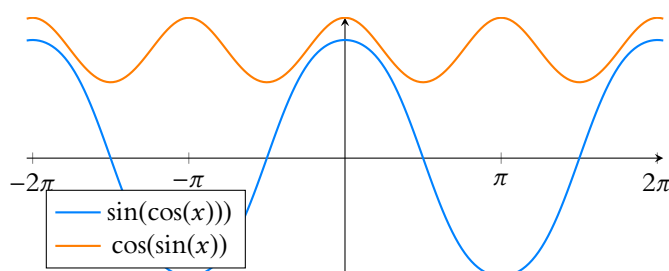
Donc les deux fonctions $x \mapsto \sin\left(\frac{\cos(x) + \sin(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2}\right)$

ne s'annulent pas sur \mathbf{R} .

Il en est donc de même de f . Étant continue, elle de signe constant⁵.

Or, $f(0) = \sin(1) - \cos(0) = \sin(1) - 1 < 0$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$.



⁴ Le plus simple pour s'en convaincre est probablement d'élever au carré et de garder en tête que $\pi^2 > 9$.

⁵ Sinon, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait entre un point où elle est positive et un point où elle est négative.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.16

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R}_+ par $f(x) = \text{Arctan}(x) - x$. Alors f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leq 0.$$

Et donc f est décroissante sur \mathbf{R}_+ . Puisqu'on a $f(0) = \text{Arctan}(0) = 0$, on en déduit que

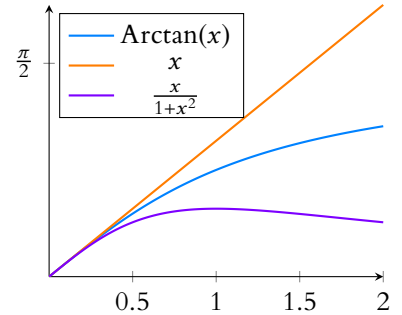
$$\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \leq x.$$

De même, soit g la fonction définie sur \mathbf{R}_+ par $g(x) = \text{Arctan}(x) - \frac{x}{1+x^2}$. Alors g est dérivable et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0.$$

Donc g est croissante sur \mathbf{R}_+ . Puisque $g(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \geq \frac{x}{1+x^2}.$$



Danger !

L'égalité $\text{Arccos} \cos x = x$ ne vaut que pour $x \in [0, \pi]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.17

- Puisque $\frac{5\pi}{13} \in [0, \pi]$, $\text{Arccos} \cos \frac{5\pi}{13} = \frac{5\pi}{13}$.
- On ne peut s'en tirer comme à la question précédente puisque $\frac{7\pi}{8} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
En revanche, $\sin \frac{7\pi}{8} = -\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$, et donc⁶

$$\text{Arcsin} \sin \frac{7\pi}{8} = -\text{Arcsin} \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

- Exactement sur le même principe,

$$\text{Arcsin} \sin \frac{5\pi}{6} = -\text{Arcsin} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

- On $\cos \frac{22\pi}{7} = \cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) = \cos \frac{6\pi}{7}$.
Et puisque $\frac{6\pi}{7} \in [0, \pi]$, on en déduit que $\text{Arccos} \cos \frac{22\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}$.
- On a $\sin \frac{19\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{6}$.
Et donc $\text{Arccos} \sin \frac{19\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

- Par π -périodicité de la tangente, $\tan \frac{5\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4}$.
Et donc $\text{Arctan} \tan \frac{5\pi}{4} = \text{Arctan} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ car $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.18

Puisque $2 > 1$, $\text{Arctan}(2) > \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Et de même pour $\text{Arctan}(3)$.

Et donc⁷, on a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

D'autre part, on a

$$\tan(\text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3)) = \frac{\tan(\text{Arctan}(2)) + \tan(\text{Arctan}(3))}{1 - \tan(\text{Arctan}(2))\tan(\text{Arctan}(3))} = \frac{5}{1-6} = -1.$$

Et donc, $\text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) - \pi$ est l'unique nombre de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut -1 : c'est $-\frac{\pi}{4}$.

$$\text{Et donc } \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

⁷ Une arctangente est toujours strictement inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

Unicité

L'unicité est garantie par le fait que \tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur \mathbf{R} .

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.19

1. On a, pour $x \in [-1, 1]$,

$$\sin(2 \operatorname{Arccos} x) = 2 \sin(\operatorname{Arccos} x) \cos(\operatorname{Arccos} x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

2. L'expression donnée a un sens pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Puisque $\operatorname{Arctan} x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a $\cos(\operatorname{Arctan} x) \geq 0$ et donc

$$\cos(\operatorname{Arctan} x) = \sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{Arctan} x)}.$$

D'autre part, nous savons que $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$, et donc, en notant $u = \sin(\operatorname{Arctan} x)$, on a

$$\tan(\operatorname{Arctan} x) = x \Leftrightarrow \frac{\sin \operatorname{Arctan} x}{\cos(\operatorname{Arctan} x)} = x \Leftrightarrow \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = x.$$

Par conséquent, $u^2 = x^2(1-u^2) \Leftrightarrow u^2(1+x^2) = x^2 \Leftrightarrow u^2 = \frac{x^2}{1+x^2}$.

On en déduit donc que $u = \pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Mais si $x \geq 0$, alors $\operatorname{Arctan} x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$, de sorte que $u = \sin(\operatorname{Arctan} x) \geq 0$, et donc

$$u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Et de même, si $x \leq 0$, alors $u \leq 0$ et donc $u = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Utilisons une formule de linéarisation : pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\cos^2\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} x\right) = \frac{\cos(\operatorname{Arccos} x) + 1}{2} = \frac{x+1}{2}.$$

4. Pour $x \in [-1, 1]$, on a $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$.

$$\text{Et donc } \tan(\operatorname{Arccos} x) = \frac{\sin(\operatorname{Arccos} x)}{\cos(\operatorname{Arccos} x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

5. On a, pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(3u) &= \cos(u+2u) = \cos(u)\cos(2u) - \sin(u)\sin(2u) = \cos(u)(2\cos^2(u)-1) - 2\sin^2(u)\cos(u) \\ &= 2\cos^3(u) - \cos(u) - 2(1-\cos^2(u))\cos(u) = 4\cos^3(u) - 3\cos(u). \end{aligned}$$

Et donc pour $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(3 \operatorname{Arccos} x) = 4 \cos^3(\operatorname{Arccos} x) - 3 \cos(\operatorname{Arccos} x) = 4x^3 - 3x.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.20

Il est clair que f est 2π -périodique, donc il suffit de tracer son graphe sur $[-\pi, \pi]$, puis d'effectuer des translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.

De plus, f est paire, car la fonction \cos l'est, et donc il suffit de tracer son graphe sur $[0, \pi]$, puis d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour $x \in [0, \pi]$, on a $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$.

Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [0, \pi]$, et donc $\operatorname{Arccos}(\cos(2x)) = 2x$, et donc $f(x) = x - \frac{1}{2}2x = 0$.

En revanche, si $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, alors $\pi \leq 2x \leq 2\pi$, et donc $\cos(2x) = \cos(-2x) = \cos(2\pi - 2x)$ avec $2\pi - 2x \in [0, \pi]$.

Et donc $\operatorname{Arccos}(\cos 2x) = \operatorname{Arccos}(\cos(2\pi - 2x)) = 2\pi - 2x$.

Et donc $f(x) = x - \frac{1}{2}(2\pi - 2x) = 2x - \pi$.

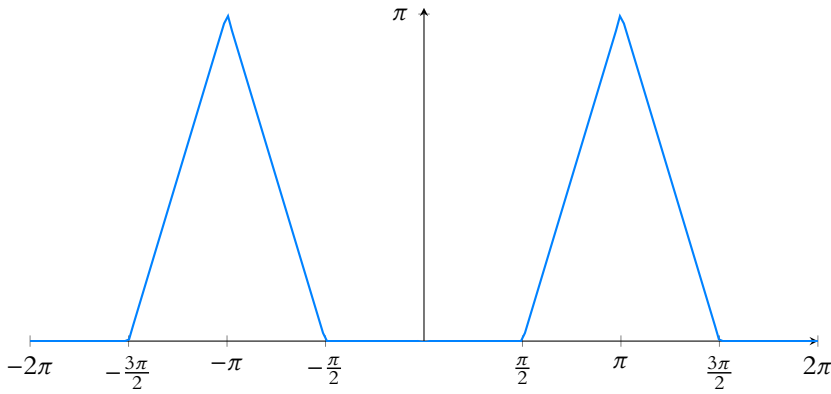
SOLUTION DE L'EXERCICE 5.21

Plus généralement

On peut prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\cos(n \operatorname{Arccos}(x))$ est une fonction polynomiale de degré n . Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev.

Remarque

Cette formule n'est rien d'autre que la définition de l'arc cosinus, qui est la bijection réciproque de $\cos|_{[0, \pi]}$.



1. Notons $\theta = \text{Arccos} \frac{5}{13}$ et $\varphi = \text{Arctan} \frac{2}{3}$.

On a alors $\cos \theta = \frac{5}{13}$ et $\tan \varphi = \frac{2}{3}$.

Nous savons de plus que $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$.

Et donc $\tan \theta = \frac{12}{5}$.

D'autre part, on a

$$\tan(2\varphi) = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{12}{5}.$$

D'autre part, puisque $\frac{5}{13} \geq 0$, on a $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

De même, puisque $0 < \frac{2}{3} < 1$, alors $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ et donc $0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$.

Et donc $\begin{cases} \tan(\theta) = \tan(2\varphi) \\ \theta, 2\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow \theta = 2\varphi$.

2. Commençons par noter que $\text{Arccos} \frac{3}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $2 \text{Arccos} \frac{3}{4} \in [0, \pi]$.

Mais $\cos\left(2 \text{Arccos} \frac{3}{4}\right) = 2 \cos^2\left(\text{Arccos} \frac{3}{4}\right) - 1 = 2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$.

Et donc on a bien $2 \text{Arccos} \frac{3}{4} = \text{Arccos} \frac{1}{8}$.

3. On a $\cos\left(2 \text{Arcsin} \frac{3}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\text{Arcsin} \frac{3}{5}\right) - 1 = 2 \left(1 - \sin^2\left(\text{Arcsin} \frac{3}{5}\right)\right) - 1 = \frac{7}{25}$.

Et puisque $\text{Arcsin} \frac{3}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $2 \text{Arcsin} \frac{3}{5} \in [0, \pi]$, de sorte que

$$\cos\left(2 \text{Arcsin} \frac{3}{5}\right) = \frac{7}{25} \Leftrightarrow 2 \text{Arcsin} \frac{3}{5} = \text{Arccos} \frac{7}{25}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.22

1. On a

$$\begin{aligned} \tan(\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k)) &= \frac{\tan(\text{Arctan}(k+1)) - \tan(\text{Arctan}(k))}{1 + \tan(\text{Arctan}(k+1))\tan(\text{Arctan}(k))} \\ &= \frac{k+1-k}{1+k(k+1)} = \frac{1}{k^2+k+1}. \end{aligned}$$

Mais par croissance de la fonction arctangente, on a $\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k) \geq 0$, et $\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k) \leq \text{Arctan}(k+1) < \frac{\pi}{2}$.

Et donc $\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k)$ est un réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dont la tangente vaut $\frac{1}{k^2+k+1}$: il est égal à $\text{Arctan} \frac{1}{k^2+k+1}$.

Danger !

Il est indispensable de s'assurer que θ et 2φ sont dans le même intervalle de longueur π , faute de quoi ils pourraient avoir la même tangente sans être égaux.

Méthode

Un réel θ n'est égal à $\text{Arccos} x$ que s'il vérifie les deux conditions

$$\begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ \cos \theta = x \end{cases}$$

2. D'après la question précédente, on a, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2 + k + 1} &= \sum_{k=0}^n (\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)) \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(0) = \operatorname{Arctan}(n+1). \end{aligned}$$

Et donc en passant à la limite, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2 + k + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(n+1) = \frac{\pi}{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.23

1. Soit f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Alors f est dérivable car somme de composées de fonctions dérivables, et

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1, 1[, f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} (1-x^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc f est constante.

Or on a $f(0) = \operatorname{Arcsin}(0) - \operatorname{Arctan}(0) = 0 - 0 = 0$.

Et donc pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

2. Considérons la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(2x-1)$. Alors g est dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0. \end{aligned}$$

Et donc la fonction g est constante sur $]0, 1[$. De plus, pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(0) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Et donc pour tout $x \in]0, 1[$, $g(x) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(2x-1)$.

Notons que pour $x = 0$, ce résultat est encore valable car $\operatorname{Arcsin}(0) = 0$ et $\operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Et de même pour $x = 1$, car $\operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(2-1)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.24

1. La fonction Arccos n'étant définie que sur $[-1, 1]$, il s'agit de s'assurer que pour tout $x \geq 0$, $\frac{1-x}{x+1} \in [-1, 1]$.

Mais une rapide étude des variations de $x \mapsto \frac{1-x}{x+1}$ prouve que cette fonction est croissante sur \mathbf{R} , vaut 1 en 0 et tend vers -1 en $+\infty$.

Donc pour tout $x \geq 0$, $-1 \leq \frac{1-x}{x+1} \leq 1$, et donc $f(x)$ est bien défini.

Détails

On aura reconnu une somme télescopique.

Méthode

Puisque f est constante, il suffit de trouver sa valeur en un point pour connaître sa valeur sur \mathbf{R} tout entier.

⚠ Attention !

La fonction racine n'est pas dérivable en 0 et la fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1, donc on prendra bien soin d'exclure ces deux nombres du domaine de dérivabilité de g .

2. La fonction $g : \theta \mapsto \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est continue sur $[0, \pi[$, strictement croissante⁸, et on a $g(0) = 0$ et $\lim_{\theta \rightarrow \pi} g(\theta) = +\infty$.

⁸ Car composée de deux fonctions qui le sont.

Par le théorème de la bijection g réalise une bijection de $[0, \pi[$ sur \mathbf{R}_+ et donc tout réel positif possède un unique antécédent par g .

3. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ et soit θ comme dans la question précédente.
Alors

$$\frac{1-x}{x+1} = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \cos^2(\theta/2) (1-\tan^2(\theta/2)) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = \cos(2\theta/2) = \cos(\theta).$$

Et par conséquent,

$$f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \text{Arccos}(\cos(\theta)).$$

Puisque $\theta \in [0, \pi]$, $f(x) = \theta$.

Reste à donner l'expression de θ en fonction de x : pour $x \geq 0$ et $\theta \in [0, \pi]$, on a

$$x = \tan^2(\theta/2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \tan(\theta/2) \Leftrightarrow \text{Arctan}(\sqrt{x}) = \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = 2 \text{Arctan}(\sqrt{x}).$$

Et donc on a bien $f(x) = 2 \text{Arctan}(\sqrt{x})$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.25

1. Puisque Arcsin n'est définie que sur $[-1, 1]$, pour que $f(x)$ soit défini, il faut que x et $2x$ soient dans $[-1, 1]$, ce qui est le cas si et seulement si $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{D} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

2. On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

3. La fonction f est strictement croissante sur \mathcal{D} car somme de deux fonctions strictement croissantes.

$$\text{On a } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3} \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Puisque f est continue, par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de \mathcal{D} sur $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Et donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$ possède une unique solution puisque $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

4. Soit α l'unique solution de l'équation.

$$\text{Alors } \text{Arcsin}(2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(\alpha).$$

$$\text{Et donc } \sin(\text{Arcsin}(2\alpha)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(\alpha)\right) = \cos(\text{Arcsin}(\alpha)) = \sqrt{1-\alpha^2}.$$

$$\text{Soit encore } 2\alpha = \sqrt{1-\alpha^2} \Leftrightarrow 4\alpha^2 = 1-\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Mais } \alpha \geq 0, \text{ et donc } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.26

Notons que la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1)$ est strictement croissante sur \mathbf{R} car somme de fonctions strictement croissantes.

Puisqu'elle est continue (car dérivable), et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3\pi}{2}$, elle

réalise une bijection de \mathbf{R} sur $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Et donc il existe une et une seule solution α à l'équation de l'énoncé.

Puisque de plus $f(0) = 0$, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que cette solution est positive strictement.

De même, puisque $g(1) = \text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2) > 2 \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$, alors $\alpha < 1$.

Remarque

Il aurait aussi été possible de constater que f et $x \mapsto 2 \text{Arctan}(\sqrt{x})$ ont même dérivée, et coïncident en un point (par exemples en 1), et donc sont égales.

Commençons par noter que pour $x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'autre part, pour $x \in]0, \alpha]$, on a $0 < \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) < \frac{\pi}{2}$ et

$$\begin{aligned} \tan(\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1)) &= \frac{\tan \text{Arctan}(x-1) + \tan \text{Arctan}(x+1)}{1 - \tan(\text{Arctan}(x-1)) \tan(\text{Arctan}(x+1))} \\ &= \frac{x-1 + x+1}{1 - (x-1)(x+1)} = \frac{2x}{2-x^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent⁹, $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) = \text{Arctan}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right)$.

⁹ Il s'agit de deux nombres de $[0, \frac{\pi}{2}[$ de même tangente.

Et donc pour $x \in]0, \alpha]$ on a

$$\begin{aligned} \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) &= \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow \text{Arctan}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow 2x^2 = 2-x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Détails

La fonction arctangente est bijective, et donc si deux réels ont la même image, ils sont égaux.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.27

1. Posons $f : x \mapsto \text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \text{Arccos}(\text{th}(x))$.

Puisque th est à valeurs dans $] -1, 1[$, et que Arccos est dérivable sur $] -1, 1[$, par somme et composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur \mathbf{R} .

Sa dérivée est alors donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1 + \text{sh}^2(x)} - \frac{1 - \text{th}^2(x)}{\sqrt{1 - \text{th}^2(x)}} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} - \sqrt{1 - \text{th}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}(x)} - \sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}} = 0.$$

Et par conséquent, f est constante sur \mathbf{R} . Mais $f(0) = \text{Arctan}(0) + \text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$.

Et donc $\forall x \in \mathbf{R}, \text{Arctan}(\text{sh}(x)) = \frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(\text{th}(x))$.

2. On a

$$\begin{aligned} \text{th}(x) = \frac{5}{13} &\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{5}{13} \\ &\Leftrightarrow 13e^{2x} - 13 = 5e^{2x} + 5 \\ &\Leftrightarrow 8e^{2x} = 18 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

3. On a $\text{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{12}$.

Et donc on en déduit, en appliquant la question 1 à $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ que

$$\text{Arctan}\frac{5}{12} + \text{Arccos}\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.28

Il est aisé de constater que (u_n) est strictement croissante, et donc en particulier à valeurs positives.

Comme indiqué, soit $\theta_n = \text{Arcsin}\frac{1}{u_n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Alors

$$(u_0 + u_1 + \dots + u_n)^2 = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2 \theta_{n+1}} - 1 = \frac{1 - \sin^2 \theta_{n+1}}{\sin^2 \theta_{n+1}} = \frac{\cos^2 \theta_{n+1}}{\sin^2 \theta_{n+1}} = \frac{1}{\tan^2 \theta_{n+1}}.$$

Soit encore¹⁰ $\tan \theta_{n+1} = \frac{1}{u_0 + \dots + u_n}$. Alors

$$\tan \theta_{n+1} = \frac{1}{u_0 + \dots + u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan \theta_n} + u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan \theta_n} + \frac{1}{\sin \theta_n}} = \frac{\sin \theta_n}{\cos \theta_n + 1}.$$

Mais, pour $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{\sin(2t)}{\cos(2t) + 1} = \frac{2 \sin t \cos t}{2 \cos^2 t - 1 + 1} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

Et en particulier, $\frac{\sin \theta_n}{\cos \theta_n + 1} = \tan \frac{\theta_n}{2}$.

Et alors, en passant à l'arctangente, $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ et donc $\theta_n = \frac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

On en déduit que $\frac{2^n}{u_n} = 2^n \sin \frac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

Mais la fonction \sin étant dérivable en 0, avec $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Et par conséquent,

$$\frac{2^n}{u_n} = 2^n \frac{\sin \frac{\theta_1}{2^{n-1}}}{\frac{\theta_1}{2^{n-1}}} \frac{\theta_1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\theta_1.$$

Mais $\theta_1 = \text{Arcsin} \frac{1}{u_1} = \text{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On en déduit que $\frac{2^n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \text{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

¹⁰ Ces deux quantités sont positives, donc on peut enlever les carrés.

Remarque

On peut même aller un peu plus loin, et prouver que ceci est égal à $\pi - 2 \text{Arctan}(x)$ (je vous laisse vous inspirer par exemple des exercices précédents si vous souhaitez prouver cette formule).