TD 7 : Polynômes. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles réelles

Exercice 7.1 Donner la décomposition des polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles. Pour R on commencera par s'assurer qu'il s'agit bien d'un polynôme à coefficients réels, et pour S, on pourra calculer $S(2i)$. F

1. $P(X) = 2X^4 - 16X^3 + 50X^2 - 52X$
2. $Q(X) = (X^2-1)^2(X^2+X+1)^5(X^2-6X+9)^3$
3. $R(X) = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})(X^2+X-6)$ avec $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$
4. $S(X) = X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 24X + 40 \quad (\star)$

Exercice 7.2 AD

1. Déterminer tous les polynômes P tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(n) = n^3 + (-1)^n$.
2. Existe-t-il un polynôme P tel que pour tout $x \in [-1, 0]$, $P(x) = e^x$?

Exercice 7.3 Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2X^2-3X+2}{X(X-1)(X-2)(X-3)}$ par la méthode «naïve» de mise au même dénominateur, puis avec d'autres méthodes impliquant le moins de calcul possible. Quelle méthode préférez-vous ? F

Exercice 7.4 Du calcul et rien que du calcul PD

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X+1}{X^2+X+1}$
2. $\dfrac{1}{(X+1)^2(3-X)}$
3. $\dfrac{1}{(X^2-1)(X+1)^2}$
4. $\dfrac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2}$
5. $\dfrac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2}$
6. $\dfrac{X}{(X+1)^2(X^2+2X+3)}$
7. $\dfrac{X^2+X+1}{X^n}$, $n \geqslant 3$.

Exercice 7.5 Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec $\deg F < 0$, et soit α un pôle simple de F. AD

1. Exprimer la partie polaire de F relative à α en fonction de $P(\alpha)$ et $Q'(\alpha)$.
2. En déduire, avec le moins de calculs possibles, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2+2X+5}{X^3-4X^2-7X+10}$.

Exercice 7.6 Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer les décompositions en éléments simples des fractions rationnelles AD

$$\frac{1}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2},\ \frac{X}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2} \text{ et } \frac{X^2}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2}.$$

On pourra distinguer plusieurs cas suivant la valeur de $\cos\alpha$.

Exercice 7.7 Application à l'étude de sommes AD

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2k^2-8k-2}{(k-1)^2(k+1)^2}$
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k}{4k^2-1}$

Exercice 7.8 Dérivée logarithmique AD

Soient $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, et soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$.

1. Exprimer P' en fonction des λ_i. *Indication : on pourra commencer par regarder ce qui se passe pour de petites valeurs de n afin d'essayer de conjecturer une formule générale.*
2. En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
3. Retrouver ce résultat en dérivant $\ln|P|$ sur son domaine de définition.

Exercice 7.9 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{n!}{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n)}$. AD

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 7

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.1

1. Puisque le coefficient dominant est 2, nous pouvons commencer par factoriser par 2 : $P(X) = 2(X^4 - 8X^3 + 25X^2 - 26X)$.
Il est clair que 0 est racine, donc que P se factorise par X.
Et $P(2) = 2\,(16 - 8 \cdot 8 + 25 \cdot 4 - 26 \cdot 2) = 2\,(-48 + 100 - 52) = 0$.
La division euclidienne de $X^3 - 8X^2 + 25X - 26$ par $X - 2$ nous donne alors

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -8X^2 & +25X & -26 & X-2 \\ \cline{5-5}
X^3 & -2X^2 & & & \boxed{X^2-6X+13} \\ \cline{1-3}
 & -6X^2 & +25X & -26 & \\
 & -6X^2 & +12X & & \\ \cline{2-3}
 & & 13X & -26 & \\
 & & 13X & -26 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Enfin, $X^2 - 6X + 13$ possède un discriminant strictement négatif, donc est irréductible.
Et donc la factorisation cherchée est $P(X) = 2X(X-2)\left(X^2 - 6X + 13\right)$.

2. Le facteur $X^2 + X + 1$ est irréductible car de discriminant strictement négatif, mais $X^2 - 1$ et $X^2 - 6X + 9$ se «cassent» en produit de deux facteurs de degré 1 :

$$X^2 - 1 = (X+1)(X-1) \text{ et } X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2.$$

Et donc $Q(X) = (X+1)^2(X-1)^2(X-3)^6\left(X^2 + X + 1\right)^5$ est la factorisation de Q en produit de facteurs irréductibles.

Rassurez-moi ‽
Vous savez bien trouver ces factorisations sans calculer de discriminant ?

3. On a $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2 - 2(\lambda + \overline{\lambda})X + \lambda\overline{\lambda} = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda) + |\lambda|^2$, qui est bien à coefficients réels, et donc R aussi.
Il s'agit d'un polynôme irréductible, car ses deux racines λ et $\overline{\lambda}$ ne sont pas réelles, et donc son discriminant ne peut pas être positif.
De plus, $X^2 + X - 6$ se factorise en $(X-2)(X+3)$, de sorte que la factorisation de R en produit de facteurs irréductibles est

$$R(X) = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2\right)(X-2)(X+3).$$

4. On a $S(2i) = 16 + 48i - 56 - 48i + 40 = 0$.
Puisque $2i$ est racine de S, c'est une racine de l'un de ses facteurs irréductibles. Celui-ci ne peut pas être de degré 1 (puisqu'il est à coefficients réels), et donc est de la forme $X^2 + bX + c$ avec un discriminant strictement négatif.
Mais un polynôme de degré 2, à coefficients réels, et de discriminant négatif possède deux racines réelles conjuguées. Donc $-2i$ est également racine de S, qui se factorise donc par $(X-2i)(X+2i) = X^2 + 4$.
La division euclidienne de S par $X^2 + 4$ est alors

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -6X^3 & +14X^2 & -24X & +40 & X^2+4 \\ \cline{6-6}
X^4 & & +4X^2 & & & \boxed{X^2-6X+10} \\ \cline{1-4}
 & -6X^3 & +10X^2 & -24X & +40 & \\
 & -6X^3 & & -24X & & \\ \cline{2-4}
 & & 10X^2 & & +40 & \\
 & & 10X^2 & & +40 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Plus généralement
Si on admet l'existence de la factorisation en produit de facteurs irréductibles, le même raisonnement prouve que si un polynôme à coefficients réels admet $\lambda \in \mathbf{C}$ comme racine, alors il admet aussi $\overline{\lambda}$ comme racine.

Et $X^2 - 6X + 10$ étant irréductible, la factorisation de S en produit de facteurs irréductibles est alors $S(X) = \left(X^2 - 6X + 10\right)\left(X^2 + 4\right)$.

Solution de l'exercice 7.2

1. Supposons qu'un tel polynôme existe. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(2n) = (2n)^3 + 1$, donc P coïncide avec le polynôme $X^3 + 1$ sur l'ensemble (infini) des entiers pairs. Il est donc égal à $X^3 + 1$.
Mais alors $P(1) = 0 = 1^3 + 1 = 2$, ce qui est absurde.
Donc il n'existe pas de tel polynôme.
2. Supposons encore une fois l'existence d'un tel polynôme P.
Alors[1] pour tout $x \in [-1, 0]$, $P'(x) = e^x = P(x)$.
Donc les polynômes P et P' coïncident sur un ensemble infini, et donc son égaux.
Mais si P a pour degré $n \in \mathbf{N}^*$, alors P est de degré $n - 1$.
Donc P est nécessairement le polynôme nul, ce qui est absurde.
Et donc il n'existe pas de tel polynôme.

[1] Deux fonctions égales ont même dérivée.

Solution de l'exercice 7.3

La décomposition cherchée est de la forme

$$\frac{2X^2 - 3X + 2}{X(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X-3}. \quad (\star)$$

Si on met tout ceci au même dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{a(X-1)(X-2)(X-3) + bX(X-2)(X-3) + cX(X-1)(X-3) + dX(X-1)(X-2)}{X(X-1)(X-2)(X-3)}\\
=&\frac{a(X^3 - 6X^2 + 11X - 6) + b(X^3 - 5X^2 + 6X) + c(X^3 - 4X^2 + 3X) + d(X^3 - 3X^2 + 2X)}{X(X-1)(X-2)(X-3)}\\
=&\frac{(a+b+c+d)X^3 + (-6a - 5b - 4c - 3d)X^2 + (11a + 6b + 3c + 2d)X - 6a}{X(X-1)(X-2)(X-3)}
\end{aligned}$$

Et donc par identification, il vient[2]

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ -6a - 5b - 4c - 3d = 2 \\ 11a + 6b + 3c + 2d = -3 \\ -6a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b + c + d = \frac{1}{3} \\ 5b + 4c + 3d = 0 \\ 6b + 3c + 2d = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b + c + d = \frac{1}{3} \\ -c - 2d = -\frac{5}{3} \\ -3c - 4d = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -2 \\ d = \frac{11}{6} \end{cases}$$

[2] Dans la suite, nous résolvons le système avec un pivot.

En revanche, en multipliant $(\star)$ par X et en évaluant en 0, il vient $a = -\frac{1}{3}$.
Puis en multipliant par $X - 1$ et en évaluant en $X = 1$, il vient $b = \frac{1}{2}$, et sur le même principe, on obtient rapidement $c = -2$ et $d = \frac{11}{6}$.
Au final, on a donc

$$\frac{2X^2 - 3X + 2}{X(X-1)(X-2)(X-3)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{X} + \frac{1}{2}\frac{1}{X-1} - \frac{2}{X-2} + \frac{11}{6}\frac{1}{X-3}.$$

Solution de l'exercice 7.4

1. Notons que le dénominateur est bien irréductible car son discriminant vaut $-3 < 0$.
Mais alors la fraction $\dfrac{X+1}{X^2+X+1}$ est déjà un élément simple, il n'y a donc rien à faire !
2. La décomposition cherchée est de la forme $\dfrac{1}{(X+1)^2(3-X)} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{c}{X-3}$.
En multipliant par $X - 3$ et en évaluant en $X = 3$, il vient $c = -\dfrac{1}{16}$.
En multipliant par $(X+1)^2$ et en évaluant en $X = -1$, il vient $\dfrac{1}{4} = b$.
Enfin, en évaluant la relation de départ en $X = 0$, on obtient

$$\frac{1}{3} = a + b - \frac{c}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{48} = \frac{1}{16}.$$

Donc la décomposition cherchée est $\dfrac{1}{(X+1)^2(3-X)} = \dfrac{1}{16(X+1)} + \dfrac{1}{4(X+1)^2} - \dfrac{1}{16(X-3)}$.

3. Attention, le dénominateur n'est pas factorisé en produit de facteurs irréductibles, puisque $X^2 - 1$ possède deux racines qui sont 1 et -1.
Donc $(X^2-1)(X+1)^2 = (X+1)(X-1)(X+1)^2 = (X+1)^3(X-1)$.
Il existe donc a, b, c, d tels que $\dfrac{1}{(X^2-1)(X+1)^2} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{c}{(X+1)^3} + \dfrac{d}{X-1}$ $(\star)$.
En multipliant $(\star)$ par $X-1$ et en évaluant en $X=1$, il vient $\dfrac{1}{8} = d$.
En multipliant $(\star)$ par $(X+1)^3$ et en évaluant en $X=-1$, il vient $\dfrac{1}{-2} = c$.
En multipliant $(\star)$ par X et en passant à la limite lorsque $X \to +\infty$, on obtient $0 = a + d \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{8}$.
Enfin, en évaluant $(\star)$ en $X=0$, on a $-1 = a + b + c - d \Leftrightarrow b = -1 - a - c + d = -\dfrac{1}{4}$.
Et donc la décomposition en éléments simples cherchée est

$$\frac{1}{(X^2-1)(X+1)^2} = -\frac{1}{8}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(X+1)^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{X-1}.$$

4. Commençons par noter que $X^4 - 4X^2 = X^2(X^2-4) = X^2(X-2)(X+2)$.
Et donc la décomposition en éléments simples cherchée est de la forme

$$\frac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{X} + \frac{d}{X^2} \quad (\star).$$

En multipliant $(\star)$ par X^2 et en évaluant en $X=0$, il vient $1 = d$.
En multipliant $(\star)$ par $(X-2)$ et en évaluant en $X=2$, il vient $2 = a$.
En multipliant $(\star)$ par $(X+2)$ et en évaluant en $X=-2$, il vient $-1 = b$.
En multipliant $(\star)$ par X par passage à la limite lorsque $X \to +\infty$, il vient $0 = a + b + c \Leftrightarrow c = -1$.
Et donc la décomposition en éléments simples cherchée est

$$\frac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2} = \frac{2}{X-2} - \frac{1}{X+2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}.$$

5. La décomposition en éléments simples est de la forme

$$\frac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2} \quad (\star).$$

En multipliant $(\star)$ par $X+1$ et en évaluant en $X=-1$, il vient $1 = a$.
En multipliant $(\star)$ par X en en faisant tendre X vers $+\infty$, il vient $3 = a + b \Leftrightarrow b = 2$.
En évaluant $(\star)$ en $X=0$, on obtient $-3 = a + c + e \Leftrightarrow c + e = -4$.
En multipliant $(\star)$ par $(X^2+1)^2$, on obtient

$$\frac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{X+1} = \frac{a(X^2+1)^2}{X+1} + (bX+c)(X^2+1) + dX + e \quad (\star\star).$$

Les racines complexes de X^2+1 sont i et $-i$, donc évaluons la relation $(\star\star)$ en $X = i$:

$$\frac{3i^4+i^3+4i^2-i-3}{i+1} = di + e \Leftrightarrow \frac{-4-2i}{i+1} = di + e \Leftrightarrow -3 + i = di + e.$$

Remarque
Évaluer en $X = -i$ fournirait en fait les mêmes équations (encore un résultat qui sera justifié plus tard...), et il n'est donc pas nécessaire de faire les 2.

Puisque d et e sont des réels, il vient donc $e = -3$ et $d = 1$.
Grâce à la relation liant c et e, on en déduit que $c = -1$.
Et donc la décomposition cherchée est

$$\frac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2} = \frac{1}{X+1} + \frac{2X-1}{X^2+1} + \frac{X-3}{(X^2+1)^2}.$$

6. $X^2 + 2X + 3$ est irréductible car de discriminant strictement négatif.
La décomposition cherchée est donc de la forme

$$\frac{X}{(X+1)^2(X^2+2X+3)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+2X+3}.$$

En multipliant par $(X+1)^2$ et en évaluant en $X=-1$, on obtient $b=-\dfrac{1}{2}$.
En multipliant par X et en passant à la limite en $+\infty$, on obtient la relation $0=a+c$.
En évaluant en $X=0$, on obtient $0=a+b+\dfrac{d}{3} \Leftrightarrow 3a+d=\dfrac{3}{2}$.
Et en évaluant en $X=1$, on obtient $\dfrac{1}{24}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c+d}{6} \Leftrightarrow 3a+c+d=1$.
Il s'agit donc de résoudre le système

$$\begin{cases} a+c & =0 \\ 3a \quad +d & =\dfrac{3}{2} \\ 3a+c+d & =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c & =0 \\ 3a \quad +d & =\dfrac{3}{2} \\ c & =-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{2} \\ d=0 \end{cases}$$

Et donc la décomposition en éléments simples cherchée est

$$\frac{X}{(X+1)^2(X^2+3X+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{X}{X^2+3X+2}.$$

Méthode

Il serait bien entendu possible d'utiliser les racines complexes de X^2+2X+3. Mais celles ci ne sont pas évidentes (contrairement par exemple aux racines de X^2+1), et risquent de faire apparaître des calculs désagréables avec des racines.
Alors qu'évaluer en deux points bien choisis (ici 0 et 1) permet de dégager des relations qui ne sont pas trop compliquées à manipuler.

7. Il n'y a pas de calcul à faire, il suffit de remarquer que

$$\frac{X^2+X+1}{X^n}=\frac{X^2}{X^n}+\frac{X}{X^n}+\frac{1}{X}=\frac{1}{X^{n-2}}+\frac{1}{X^{n-1}}+\frac{1}{X^n}$$

qui est déjà une décomposition en éléments simples.

Solution de l'exercice 7.5

1. Puisque α est racine simple de Q, $Q=(X-\alpha)R$, avec $R(\alpha)\neq 0$.
La décomposition de F en éléments simples est de la forme

$$F(X)=\frac{a}{X-\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{Q_i}$$

où α n'est pas racine des Q_i.
En multipliant cette décomposition par $X-\alpha$ et en évaluant en α, il vient $a=\dfrac{P(\alpha)}{R(\alpha)}$.
Mais d'autre part, $Q'(X)=(X-\alpha)R'+R$ et donc $Q'(\alpha)=R(\alpha)$.
Et donc la partie polaire de F relative à α est $\dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)(X-\alpha)}$.

2. Notons que 1 est racine de $X^3-4X^2-7X+10$, qui se factorise donc par $X-1$:

$$X^3-4X^2-7X+10=(X-1)(X^2-3X-10)=(X-1)(X-5)(X+2).$$

Donc la décomposition cherchée est de la forme $\dfrac{X^2+2X+5}{X^3-4X^2-7X+10}$.
Tous les pôles étant simples, nous pouvons appliquer ce qui précède avec $P(X)=X^2+2X+5$, $Q(X)=X^3-4X^2-7X+10$ et donc $Q'(X)=3X^2-8X-7$.
On a donc

$$\frac{X^2+2X+5}{X^3-4X^2-7X+10}=\frac{P(1)}{Q'(1)(X-1)}\frac{P(-2)}{Q'(-2)(X+2)}+\frac{P(5)}{Q'(5)(X-5)}=\frac{-2}{3}\frac{1}{X-1}+\frac{5}{21}\frac{1}{X+2}+\frac{10}{7}\frac{1}{X-5}.$$

Solution de l'exercice 7.6

Notons que $X^2-2\cos(\alpha)X+1$ possède pour discriminant $\Delta=4\cos^2\alpha-1$, qui est strictement négatif si et seulement si $\cos(\alpha)\neq\pm 1$.

- **Si** $\cos\alpha=1$, alors $X^2-2\cos(\alpha)X+1=X^2-2X+1=(X-1)^2$.
Or $\dfrac{1}{(X-1)^4}$ est déjà un élément simple.
Pour trouver la décomposition de $\dfrac{X}{(X-1)^4}$, on peut noter que

$$\frac{X}{(X-1)^4}=\frac{X-1+1}{(X-1)^4}=\frac{X-1}{(X-1)^4}+\frac{1}{(X-1)^4}=\frac{1}{(X-1)^3}\frac{1}{(X-1)^4}.$$

La décomposition de $\dfrac{X^2}{(X-1)^4}$ est de la forme

$$\frac{X^2}{(X-1)^4} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{d}{(X-1)^4}.$$

En multipliant par $(X-1)^4$, et en évaluant en $X=1$, on a aisément $d=1$.
En multipliant par X et en passant à la limite en $+\infty$, il vient $0=a$.
En évaluant en $X=0$, on obtient $0=b-c+d \Leftrightarrow c-b=1$.
En évaluant en $X=-1$, on obtient $\dfrac{1}{16} = \dfrac{b}{4} - \dfrac{c}{8} + \dfrac{d}{16} \Leftrightarrow 2b = c$.
Et donc il vient

$$\frac{X^2}{(X-1)^4} = \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^4}.$$

- **Si** $\cos\alpha = -1$, alors $X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1 = (X+1)^2$.
  Comme précédemment, les deux premières fractions sont déjà des éléments simples.
  Pour la troisième, il serait possible de raisonner comme dans le cas précédent.
  Mais remarquons plutôt que si on remplace X par $-X$ dans la fraction du cas précédent, on obtient

$$\frac{X^2}{(-X-1)^4} = \frac{1}{(-X-1)^2}+\frac{2}{(-X-1)^3}+\frac{1}{(-X-1)^4} \Leftrightarrow \frac{X^2}{(X+1)^4} = \frac{1}{(X+1)^2}-\frac{2}{(X+1)^3}+\frac{1}{(X+1)^4}$$

  qui est la décomposition en éléments simples recherchée !
- **Reste le cas où** $\cos\alpha \neq \pm 1$, auquel cas $X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1$ est irréductible.
  Les deux premières fractions sont toujours des éléments simples...
  La dernière a une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{X^2}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2} = \frac{aX+b}{X^2-2\cos(\alpha)X+1} + \frac{cX+d}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2}.$$

  En évaluant cette relation en $X=0$, il vient $0=b+d$.
  En multipliant par X et en passant à la limite lorsque $X\to+\infty$, il vient $0=a$.
  Enfin, les racines complexes de $X^2-2\cos(\alpha)X+1$ sont $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.
  Donc en multipliant ($\star$) par $(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2$ et en évaluant en $X=e^{i\alpha}$, il vient

$$e^{2i\alpha} = ce^{i\alpha} + d \Leftrightarrow \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = c(\cos\alpha + i\sin\alpha) + d.$$

  Puisque c et d sont des réels, en identifiant les parties imaginaires, on a donc

$$c = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} = 2\cos(\alpha).$$

  Et alors $d = \cos(2\alpha) - 2\cos^2\alpha = -1$.
  On en déduit donc que $b=1$, et que la décomposition cherchée est

$$\frac{X^2}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2} = \frac{1}{X^2-2\cos(\alpha)X+1} + \frac{2\cos(\alpha)X-1}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2}.$$

Rappel
Un élément simple de seconde espèce est un polynôme de degré 1 sur une puissance d'un polynôme irréductible de degré 2. C'est bien ce que nous avons ici.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.7

1. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ est $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+2} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X}$.
   Et donc pour $n\in\mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

2. Sur le même principe, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2X^2-8X-2}{(X-1)^2(X+1)^2}$ est

$$\frac{1}{X-1} - \frac{2}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{2}{(X+1)^2}.$$

Et donc pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} + 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} - 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{2}{n^2} - 2 - \frac{2}{4} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1. \end{aligned}$$

3. Décomposons cette fois $\dfrac{X}{4X^2-1}$, nous nous préoccuperons du $(-1)^{k+1}$ en temps voulu.
La décomposition en éléments simples de $\dfrac{X}{4X^2-1}$ est $\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{2X+1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{2X-1}$.
Et donc il vient pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k}{4k^2-1} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} + \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} + \sum_{i=2}^{n+1}\frac{(-1)^{i}}{2i-1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Chgt d'indice
$k = i - 1$.

Solution de l'exercice 7.8

1. Pour $n = 2$, c'est facile : $P' = (X-\lambda_1) + (X-\lambda_2)$.
Pour $n = 3$, on obtient $P' = (X-\lambda_2)(X-\lambda_3) + (X-\lambda_1)(X-\lambda_3) + (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$.
Il semble raisonnable de conjecturer que dans le cas général, $P' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(X-\lambda_j)$.

Plus généralement, prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions dérivables, alors leur produit possède pour dérivée $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i' \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} f_j$.

Pour $n = 2$, c'est la formule usuelle : $(f_1f_2)' = f_1'f_2 + f_1f_2'$.
Supposons le résultat vrai pour un produit de n fonctions dérivables, et soient $f_1, \dots, f_{n+1}$ des fonctions dérivables.
Alors $f_1f_2\cdots f_{n+1}$ est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} (f_1\cdots f_{n+1})' &= (f_1\cdots f_n)'f_{n+1} + f_1\cdots f_nf_{n+1}' \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} f_i'\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} f_j\right)f_{n+1} + f_1\cdots f_nf_{n+1}' \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i'\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1} f_j + f_1\cdots f_nf_{n+1}' \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} f_i' \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} f_j.$$

Donc par le principe de récurrence, la formule donnée est valable pour tout produit de fonctions dérivables.
Et en particulier, $P' = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(X-\lambda_i)'}_{=1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (X-\lambda_j) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (X-\lambda_j)$.

2. On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{P'}{P} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (X-\lambda_j)}{\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_j)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X-\lambda_i}.\end{aligned}$$

Les $X-\lambda_i$ étant les facteurs irréductibles de P, nous avons bien là la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

3. Sur son domaine de définition, qui est $\mathbf{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, on a $\ln|P(x)| = \prod_{i=1}^{n} \ln|x-\lambda_i|$.

Et donc en dérivant cette expression, on obtient

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\lambda_i}.$$

> **Rappel**
> La dérivée de $\ln|f|$ est $\frac{f'}{f}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.9

Puisque le dénominateur possède $0, 1, \dots, n$ comme racines simples, la décomposition cherchée est de la forme

$$\frac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{X-i}. \qquad (\star)$$

En multipliant $(\star)$ par X, puis en évaluant en $X = 0$, il vient

$$a_0 = \frac{n!}{(-1)(-2)\cdots(-n)} = \frac{n!}{(-1)^n n!} = (-1)^n.$$

Et plus généralement, en multipliant par $X - i$ puis en évaluant en $X = i$, on obtient

$$a_i = \frac{n!}{i(i-1)\cdots 1 \cdots (-1)\cdots(i-n)} = \frac{n!}{i! \times (-1)^{n-i}(n-i)!} = (-1)^{n-i}\binom{n}{i}.$$

Et donc il vient

$$\frac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{X-k}.$$