Programme de colle 19 : 08/03/21 au 12/03/21

Dérivabilité

Toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle, à valeurs dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

- Définition de la dérivée, des tangentes. f est dérivable en a si et seulement si elle possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a : il existe $\ell \in \mathbf{K}$ tel que $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \ell(x-a) + o(x-a)$, et alors $\ell = f'(a)$.
- Dérivées à gauche et à droite.
- Opérations sur les fonctions continues : somme, produit, quotient, composée. Dérivabilité et dérivée de la bijection réciproque d'une bijection dérivable.
- Dérivées $k^{\text{èmes}}$, fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$), opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$. Formule de Leibniz. Caractère $\mathscr{C}^\infty$ des fonctions usuelles.
- Extrema locaux, points critiques.
- Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.
- Inégalité des accroissements finis ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{C}$). Fonctions lipschitziennes.
- Monotonie et signe de la dérivée : f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur l'intérieur de I. Si f' est positive sur l'intérieur de I et ne s'y annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante sur I.
- Théorème de la limite de la dérivée. Théorèmes de prolongement $\mathscr{C}^1/\mathscr{C}^k$: si f est $\mathscr{C}^k$ sur $]a,b]$, et que pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, $f^{(i)}$ possède une limite finie en a, alors le prolongement par continuité de f en a est $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b]$.