Programme de colle 20 : 15/03/21 au 19/03/21

Espaces vectoriels de dimension finie

- Espaces de dimension finie. Existence de bases. Notion de dimension. Cardinal des familles libres/génératrices.
- Théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite.
- Dimension des espaces usuels : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathcal{L}(E, F)$
- Dimension d'un sous-espace vectoriel. Dimension d'une somme. F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$. Formule de Grassmann.
- Existence de supplémentaires en dimension finie. Caractérisations des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.
- $\dim(\sum_{i=1}^{n} F_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} F_i$, avec égalité si et seulement si les F_i sont en somme directe.
- Théorème du rang. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie. Applications linéaires de rang fini. Si $f : E \to F$ (avec E, F de dim finie), alors $\operatorname{rg} f \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.
- Formes linéaires et hyperplans (défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle). Un sev de E (de dim finie ou non) est un hyperplan ssi il possède un supplémentaire de dimension 1.
  Deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan ssi elles sont colinéaires.
- Une intersection de p hyperplans est de dim supérieure à $\dim E - p$. Tout espace de dim p est intersection de $\dim E - p$ hyperplans.