Programme de colle 5 : 02/11/20 au 06/11/20

Nombres complexes

- Définition des complexes, forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire. Conjugué d'un nombre complexe.
- Module d'un nombre complexe, module d'un produit, d'un quotient, du conjugué. Inégalité triangulaire, avec cas d'égalité.
- Groupe des nombres complexes de module 1 (noté $\mathbf{U}$). Notation $e^{i\theta}$. Argument(s) d'un nombre complexe, argument principal. Forme exponentielle d'un complexe. Formules d'Euler et de Moivre, applications à la trigonométrie (et notamment à la linéarisation). Exponentielle complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.
- Racines carrées d'un nombre complexe. Détermination des racines carrées d'un complexe sous forme exponentielle et sous forme algébrique. Équations polynomiales de degré 2 à coefficients complexes. Relations racines/coefficients, application à la résolution de systèmes du type $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$.
- Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Définitions, ensemble $\mathbf{U}_n$ des racines$n^{\text{èmes}}$ de l'unité. $\mathbf{U}_n = \zeta^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$ où $\zeta = e^{2i\frac{\pi}{n}}$. $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbf{U}_n} \omega = 0$. Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe.
- Application des complexes à la géométrie. Interprétation de l'argument de $\dfrac{b-a}{d-c}$. Homothétie, rotations. Similitudes directes. Toute fonction affine est une similitude directe.

Introduction aux polynômes à la décomposition en éléments simples

Tous les résultats qui suivent ont été admis pour l'instant et les polynômes et fractions rationnelles n'ont pas été introduits formellement, on se limite pour l'instant à l'aspect «fonctions définies sur $\mathbf{R}$». Le but de ce chapitre est d'apprendre à calculer efficacement avec des fractions rationnelles **à coefficients réels** (avec en vue l'intégration des fractions rationnelles).

- Décomposition d'un polynôme à coefficients réels en produit de facteurs irréductibles (= de degré 1 ou de degré 2 sans racines réelles). Division euclidienne des polynômes. Factorisation par les racines. Un polynôme de degré n posède au plus n solutions.
- Fractions rationnelles. Éléments simples de première espèce : $\dfrac{\lambda}{(X-\mu)^k}$ et de second espèce : $\dfrac{\lambda X+\mu}{(X^2+bX+c)^k}$ où $b^2-4c<0$. Existence de la décomposition en éléments simples.
- Calcul effectif de la décomposition en éléments simples (pour les fractions de degré strictement négatif). La forme sous laquelle on cherche la décomposition doit être connue sans hésitation. Les méthodes vues en cours pour déterminer cette décomposition sont :
  1. la mise au même dénominateur (à éviter en première intention)
  2. la multiplication par $(X-\lambda)^k$ puis l'évaluation en $X=\lambda$
  3. la multiplication par X puis une limite $X \to +\infty$
  4. l'utilisation de racines complexes du dénominateur dans le cas des éléments simples de seconde espèce
  5. l'évaluation en n'importe quel point qui n'est pas un pôle.
- Applications : calculs de sommes impliquant des fractions rationnelles (par exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$).

  Calcul de primitives de fraction rationnelles (pour les éléments de seconde espèce, on se limitera pour l'instant aux éléments qui s'intègrent directement en $x \mapsto \ln(x^2+bx+c)$, ou on guidera suffisamment l'intégration d'éléments simples de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+bx+c}$).