Fonctions circulaires

5

5.1 Notion de congruence

Définition 5.1 – Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On dit que deux réels x et y sont **congrus modulo** α s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$.
On note alors $x \equiv y \pmod{\alpha}$ ou $x \equiv y \ [\alpha]$.
Ainsi, $\{y \in \mathbf{R} \mid y \equiv x \ [\alpha]\} = \{x + k\alpha,\ k \in \mathbf{Z}\}$.
On note parfois cet ensemble $x + \alpha\mathbf{Z}$, où $\alpha\mathbf{Z} = \{k\alpha,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Autrement dit
x et y sont congrus modulo α si leur différence est un multiple **entier** de α.

Exemples 5.2

- Un entier n est pair si et seulement si il est congru à 0 modulo 2, c'est-à-dire si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2k$.
- De même, n est impair si et seulement si il est congru à 1 modulo 2.
- Un angle est défini modulo 2π, c'est-à-dire que deux angles sont égaux si et seulement si leurs mesures sont égales modulo 2π.

Par exemple, $7\pi \equiv \pi \ [2\pi]$, et $\dfrac{11\pi}{2} \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

5.2 Fonctions trigonométriques

5.2.1 Sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus ne seront définies proprement qu'en deuxième année, via les formules suivantes[1]

$$\cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

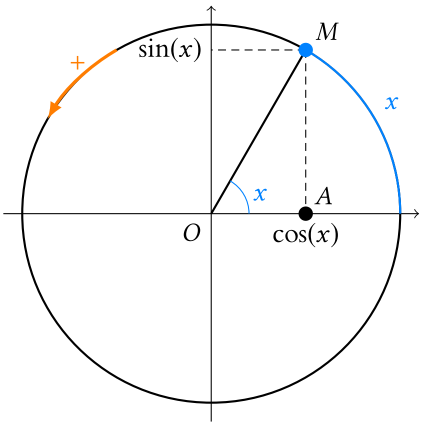
[1] Qui ne sont ni à comprendre ni à connaître pour l'instant !

Cette année, nous nous en tiendrons à l'intuition que vous en avez acquise au lycée, reposant sur la notion d'angles dans des triangles rectangles.

Dans toute la suite, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

Définition 5.3 – On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Autrement dit, $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Définition 5.4 – Soit $x \in \mathbf{R}$, et soit M l'unique point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = x$.
On appelle alors **cosinus** de x et on note $\cos(x)$ l'abscisse de M.
De même, on appelle **sinus** de x et on note $\sin(x)$ l'ordonnée de M.



Rappelons que ceci correspond bien[2] à la trigonométrie de collège : le triangle OAM est rectangle en A, et son hypoténuse est de longueur 1 puisque M est sur le cercle trigonométrique.
Par conséquent,

$$\cos(x) = \cos\left(\widehat{AOM}\right) = \frac{OA}{OM} = OA$$

et de même

$$\sin(x) = \sin\left(\widehat{AOM}\right) = \frac{AM}{OM} = AM.$$

[2] Au moins dans le cas où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Proposition 5.5 (Paramétrisation du cercle trigonométrique) : *Si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifie $x^2 + y^2 = 1$ (c'est-à-dire si $(x, y) \in \mathscr{C}$), alors il existe un unique $t \in]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (\cos t, \sin t)$.*

Démonstration. Il est évident qu'un tel t existe : c'est la mesure principale de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est le point de coordonnées (x, y).
Nous admettons l'unicité, puisqu'elle nécessite de disposer d'une définition rigoureuse de π, ce que nous n'avons pas encore. □

Remarque. On a choisi de prendre $t \in]-\pi, \pi]$, mais on aurait également pu prendre $t \in [0, 2\pi[$, ou encore dans n'importe quel intervalle de longueur 2π ouvert d'un côté et fermé de l'autre.

π ?
Notons que le nombre π n'a jamais été défini proprement (si ce n'est que c'est le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1, mais qu'est-ce qu'un périmètre ?).
Là aussi, vous aurez l'occasion d'en reparler l'an prochain, π pouvant être défini comme étant le plus petit réel x positif tel que $\cos x = -1$.

Corollaire 5.6 – *Soit $r > 0$ et soit $\mathscr{C}_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 = r^2\}$.
Alors pour tout $(x, y) \in \mathscr{C}_r$, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.*

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathscr{C}_r$. Alors $(x', y') = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ est sur $\mathscr{C}$ puisque

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1.$$

Et donc il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

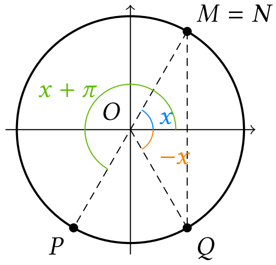
$$(x', y') = (\cos\theta, \sin\theta) \Leftrightarrow (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

□

Ceci est à la base des coordonnées dites **polaires** qu'on utilise notamment en physique : tout point (x, y) de $\mathbf{R}^2$ différent de O est sur un unique cercle de centre O (celui de rayon $\sqrt{x^2 + y^2}$).
Et donc il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Autrement dit, au lieu de repérer un point par son abscisse et son ordonnée comme on en a l'habitude, on peut se donner un rayon et un angle.
C'est d'ailleurs le principe de la représentation exponentielle des nombres complexes que nous verrons au chapitre suivant.

Proposition 5.7 : *Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont 2π-périodiques, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.
De plus, $\cos$ est paire et $\sin$ est impaire.*

Démonstration. Puisqu'un angle de 2π correspond à un tour complet du cercle, le point M de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = x$ et le point N de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i},\overrightarrow{ON}\right) = x + 2\pi$ sont confondus.
Ils ont donc même abscisse et même ordonnée : $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.



De même, un angle de π correspond à un demi-tour du cercle. Et donc si P est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i},\overrightarrow{OP}\right) = x + \pi$, alors P est le symétrique de M par rapport à l'origine.
Et donc $\cos(x+\pi) = x_P = -\cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = y_P = -\sin(x)$.

Enfin, si Q est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i},\overrightarrow{OQ}\right) = -x$, alors Q est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
Et donc en particulier, il a même abscisse que M (de sorte que $\cos(-x) = \cos(x)$) et son ordonnée est l'opposée de celle de M (et donc $\sin(-x) = -\sin(x)$). □

Proposition 5.8 : *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos^2 x + \sin^2(x) = 1$.*

Démonstration. Soit M le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{i},\overrightarrow{OM}) = x$, et soit A le point de coordonnées $(\cos x, 0)$.
Alors OMA est un triangle rectangle en A, dont l'hypoténuse OM est de longueur[3] 1.
Puisque $AM = \sin x$, par le théorème de Pythagore, on a

$$OA^2 + MP^2 = OM^2 \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

□

[3] Car $M \in \mathscr{C}$.

Remarque. Notons que si l'on sait dériver sin et cos (voir ci-dessous), la formule se retrouve en dérivant $x \mapsto \cos^2(x) + \sin^2(x)$.
On obtient alors une fonction constante, qui vaut 1 en 0 et donc en tout $x \in \mathbf{R}$.

Corollaire 5.9 – *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.*

Démonstration. Puisque $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \leqslant 1$, on a bien $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, et de même pour $\sin(x)$. □

Proposition 5.10 (Dérivées des fonctions trigonométriques) : *Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbf{R}$, avec*

$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin.$$

Démonstration. Admis (pour l'instant). □

Puisqu'on sait que $\cos(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ et que $\sin(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$, alors nous en déduisons facilement les sens de variations de cos et sin.

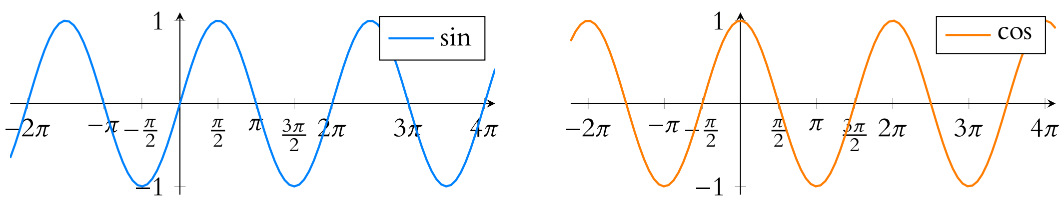


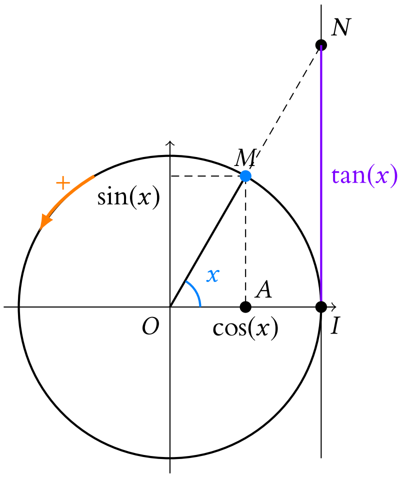
Figure 5.1 – Les fonctions sin et cos.

5.2.2 Fonction tangente

Définition 5.11 – On appelle **tangente** et on note tan la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Remarque
L'ensemble de définition de la tangente est précisément l'ensemble des points où le cosinus ne s'annule pas, et donc où le quotient possède un sens.



Notons, comme sur la figure ci-contre, l'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.
Alors $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires, donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ y_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Mais alors $\lambda = \dfrac{1}{\cos x}$ et donc

$$y_N = \lambda \sin(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Ainsi, géométriquement, $\tan(x)$ est la distance[4] IN.

[4] Algébrique, c'est-à-dire avec un éventuel signe.

Proposition 5.12 : *La fonction tangente est impaire, π-périodique, dérivable sur son ensemble de définition et*

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},\ (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Démonstration. Notons $\mathscr{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.
La fonction tan est impaire car quotient d'une fonction impaire (le sinus) par une fonction paire (le cosinus).
Pour $x \in \mathscr{D}$, on a encore $x + \pi \in \mathscr{D}$, et

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

Enfin, tan est dérivable sur $\mathscr{D}$ car quotient de fonctions dérivables[5], et

[5] Dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathscr{D}$.

$$\forall x \in \mathscr{D},\ \tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Enfin, notons que $1 + \tan^2(x) = 1 + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$. □

Remarque. La dérivée de tan est positive partout où elle est définie.
On n'en déduira pas pour autant que tan est croissante sur son ensemble de définition, mais uniquement qu'elle l'est sur chacun des intervalles contenus dans son intervalle de définition (et en particulier sur les $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$).

5.2.3 Valeurs remarquables

Les valeurs suivantes sont à connaître par cœur, on n'hésitera pas à s'aider d'un cercle trigonométrique si besoin.

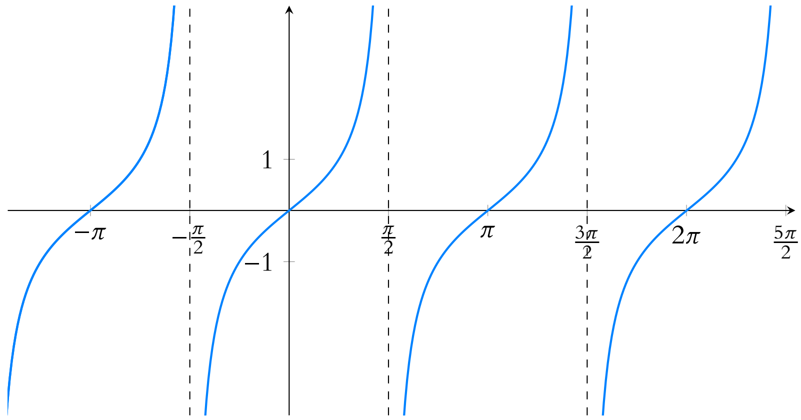
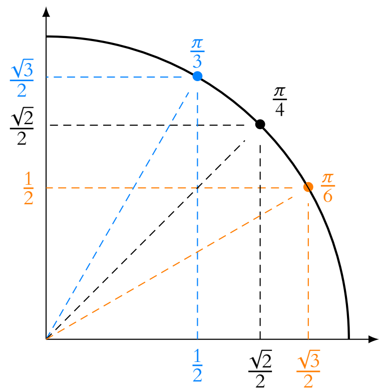


FIGURE 5.2 – La fonction tangente.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$



Pour 0 et $\frac{\pi}{2}$, c'est évident.
Pour $x = \frac{\pi}{4}$, il s'agit de remarquer que le point M de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$ est sur la première bissectrice, et donc que son sinus et son cosinus sont égaux.
Étant positifs et liés par la relation $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$, il ne peuvent que valoir $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, une preuve sera donnée en TD.

Notons que combinées aux formules usuelles[6], ces valeurs permettent d'obtenir les sinus, cosinus et tangentes de tous les angles multiples de $\frac{\pi}{6}$ ou de $\frac{\pi}{4}$.

[6] Rappelées ci-dessous.

Exemple 5.13

$$\cos\left(-5\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Définition 5.14 – On appelle **cotangente**, et on note cotan la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ par

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

⚠ On n'a pas $\operatorname{cotan} = \frac{1}{\tan}$ car ces deux fonctions n'ont pas le même domaine de définition.

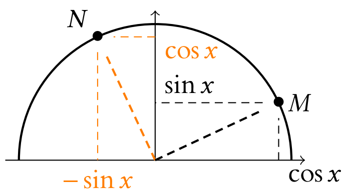
En revanche, il est vrai que si $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbf{Z} = \left\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, alors $\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Nous ne donnons aucune formule pour la cotangente, mais toutes ses propriétés (et notamment sa dérivée) se retrouvent à partir de la définition.

5.3 FORMULES USUELLES

Lemme 5.15. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Démonstration. Traitons le cas où $x \in [0, \pi[$, le cas général s'en déduira par les formules pour $\cos(x + \pi)$ et $\sin(x + \pi)$ et la 2π-périodicité.
Si $x = \frac{\pi}{2}$, c'est évident.
Supposons donc $\cos(x) \neq 0$ et $\sin(x) \neq 0$.
Alors le point $M \in \mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$ est sur la droite (OM) qui a pour vecteur normal $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\tan x \\ 1 \end{pmatrix}$.
Et donc si N est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = x + \frac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{ON}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{ON} = \lambda \begin{pmatrix} -\tan(x) \\ 1 \end{pmatrix}$.
Alors, puisque $N \in \mathscr{C}$, $\lambda^2 \tan^2(x) + \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2(1 + \tan^2(x)) = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \cos^2 x$.
Et donc $\lambda = \pm \cos x$, de sorte que l'abscisse de N est soit $-\sin(x)$ (si $\lambda = \cos(x)$), soit $\sin(x)$ (si $\lambda = -\cos(x)$).
Mais si $x \in [0, \pi]$, $x + \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ possède un cosinus négatif.
Puisque $\sin(x) \geqslant 0$, on a donc $\lambda = \cos(x)$.
Et ainsi, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$. □



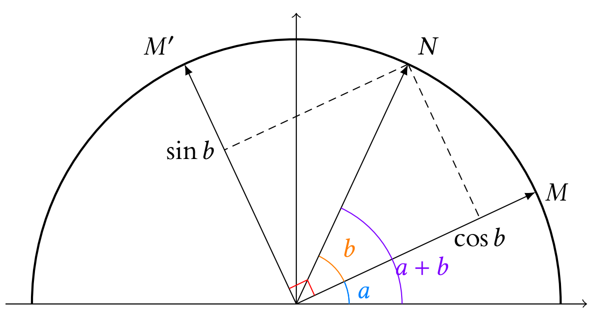
Rappel
$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

Proposition 5.16 (Formules d'addition) : *Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Alors*

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Démonstration. Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé, et considérons les points M et N du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tels que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = a$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right) = a + b$.
On a alors $\overrightarrow{OM} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$ et $\overrightarrow{ON} = \cos(a + b)\vec{i} + \sin(a + b)\vec{j}$.

Notons alors M' le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2}$, de sorte que $\left(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ est un repère orthonormé.
On a alors $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = b$, et donc les coordonnées de N dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ sont $(\cos b, \sin b)$.



Et par conséquent,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ON} &= \cos(b)\overrightarrow{OM} + \sin(b)\overrightarrow{OM'} \\
&= \cos(b)\left(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}\right) + \sin(b)\left(\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right) \\
&= \cos(b)\left(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}\right) + \sin(b)\left(-\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}\right) \\
&= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\,\vec{i} + (\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))\,\vec{j}.
\end{aligned}$$

Mais par unicité[7] des coordonnées de N dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a donc

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ \text{ et } \ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Les deux autres égalités s'obtiennent en changeant b en $-b$ et en utilisant la parité (resp. l'imparité) du cosinus (resp. du sinus). □

[7] Un vecteur s'écrit de manière **unique** comme un multiple de $\vec{i}$ plus un multiple de $\vec{j}$.

Notons qu'on retrouve alors des formules déjà rencontrées précédemment :

Corollaire 5.17 – *Pour $x \in \mathbf{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
\cos(x+\pi) &= -\cos(x), \ \sin(x+\pi) = -\sin(x) \\
\cos(\pi - x) &= -\cos(x), \ \sin(\pi - x) = \sin(x) \\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), \ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x), \ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)
\end{aligned}$$

Remarque

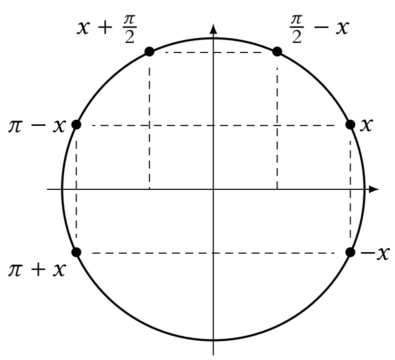
Ce n'est rien d'autre que le lemme 5.15.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les formules de la proposition précédente. □

Remarques. ► Il n'est pas question d'apprendre toutes ces formules par cœur : une fois de plus, elles se retrouvent facilement avec un cercle trigonométrique.

Astuce

Si vous voulez les retrouver sur un dessin comme ci-dessous, surtout ne prenez pas un angle proche de $\frac{\pi}{4}$, vous ne sauriez alors plus distinguer $\sin x$ de $\cos x$. Prendre x proche de 0 (par exemple environ $\frac{\pi}{6}$) est plus sage.



► Notons en particulier que

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) = \sin'(x) \ \text{ et } \ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) = \cos'(x).$$

Et donc dériver sinus ou cosinus, c'est déphaser de $\frac{\pi}{2}$. Ceci permet aisément de calculer les dérivées successives de sin ou cos :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

En particulier

La dérivée 4^{eme} de sin (resp. de cos) est sin (resp. cos). En effet,

$$\begin{aligned}
\sin^{(4)}(x) &= \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin(x + 2\pi) \\
&= \sin(x).
\end{aligned}$$

Proposition 5.18 (Formules d'addition : cas de la tangente) : *Soient a, b deux réels. Sous réserve que toutes les tangentes suivantes existent[8], on a*

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

[8] C'est-à-dire si ni a, ni b, ni $a+b$ (ou $a-b$ pour la seconde formule) ne soient congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

Démonstration. 1) On a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b + \cos a \sin b}{\cos a\cos b - \sin a\sin b} = \frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}\,\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b} + \frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b} - \frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}.$$

La formule 2) s'en déduit aisément en changeant b en $-b$ et en utilisant l'imparité de la tangente. □

Proposition 5.19 (Formules de duplication) : *Pour $x \in \mathbf{R}$, on a*

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x.$$

Démonstration. On a $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
Mais $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Donc

$$\cos(2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Et de même, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et donc $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.
Enfin, $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\cos x\sin x$. □

Corollaire 5.20 – *Pour $x \in \mathbf{R}$, on a*

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \textit{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Démonstration. Immédiat en utilisant les formules pour $\cos(2x)$. □

Exemples 5.21

▶ Les formules précédentes sont particulièrement intéressantes lorsqu'il s'agit de trouver une primitive de $\cos^2$ (ou de $\sin^2$).
En effet, une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{2}$, de sorte qu'une primitive de $\cos^2$ est $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$.

▶ Résolvons l'équation $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
On sait que $\cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x))(\cos^2(x) - \sin^2(x))$.
Or, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.
Donc au final, il s'agit de résoudre $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de sorte que x est solution si et seulement si $2x \equiv \pm\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \pm\frac{\pi}{12}\ [\pi]$.

Remarque

Rappelons que si dériver un produit est chose facile, il est bien plus dur d'intégrer un produit.
On ne dispose pas de formules générales pour intégrer u^2 (mais seulement pour $u'u^2$).

Proposition 5.22 (Formules de développement) : *Si a et b sont deux réels, alors*

1. $\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
2. $\sin a\sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
3. $\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

Démonstration. Il suffit de développer le membre de droite à l'aide des formules d'addition. Prouvons par exemple la dernière :

$$\begin{aligned}\sin(a+b)+\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\\ &= 2\sin(a)\cos(b).\end{aligned}$$

Donc en divisant par 2, on a le résultat souhaité. □

Les formules qui suivent ne sont pas explicitement au programme, et donc pas à connaître par cœur, mais il faut savoir les retrouver si nécessaire.

Terminologie
Ces formules, ainsi que celles de la proposition précédente sont appelées **formules de Simpson.**

Corollaire 5.23 (Formules de factorisation) – *Si p et q sont deux réels, alors*

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Démonstration. Les preuves étant une fois de plus très similaires, nous ne prouvons que la première formule.
Notons que pour cela, il suffit de développer le membre de droite à l'aide des formules de développement, et de constater qu'on obtient bien $\cos p + \cos q$.
Mais pour savoir les retrouver, mieux vaut comprendre leur origine : on a reconnu le lien avec les formules de développement, et on sait déjà que

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b)+\cos(a-b).$$

On aimerait donc trouver deux réels a et b tels que $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}$

Ce système[9] possède une unique solution, qui est $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$, d'où la formule annoncée. □

[9] D'inconnues a et b.

Remarque. On ne donne pas de formule pour $\sin p - \sin q$, mais il suffit de changer q en $-q$ dans la dernière formule.

Exemple 5.24

Soit $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ et r non congru à 0 modulo 2π.

Essayons de calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(x+kr)$.

On a alors

$$\begin{aligned} S_n \sin\frac{r}{2} &= \sum_{k=0}^{n}\cos(x+kr)\sin\frac{r}{2}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\left(\sin\left(x+kr+\frac{r}{2}\right)-\sin\left(x+kr-\frac{r}{2}\right)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\left(\sin\left(x+kr+\frac{r}{2}\right)-\sin\left(x+(k-1)r+\frac{r}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(x+nr+\frac{r}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{r}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Somme télescopique.

Remarque
Si $r \equiv 0 \ [2\pi]$, alors il est facile de constater que cette somme vaut $(n+1)\cos(x)$.

Mais alors, en utilisant la formule pour $\sin(p) - \sin(q)$, il vient

$$S_n \sin\frac{r}{2} = \cos\left(x+\frac{nr}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}r\right).$$

Et enfin, comme $\frac{r}{2} \not\equiv 0 \ [\pi]$, $\sin\frac{r}{2} \neq 0$ et donc , $S_n = \dfrac{\cos\left(x + \frac{n}{2}r\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}r\right)}{\sin\frac{r}{2}}$.

5.4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

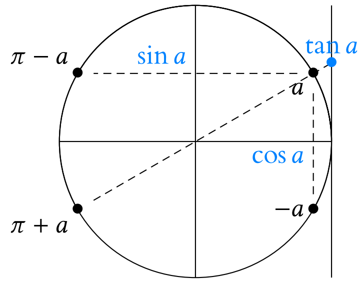
Proposition 5.25 : *On a*

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a \equiv b \quad [2\pi] \text{ ou } a \equiv -b \quad [2\pi].$$

Et de même,

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a \equiv b \quad [2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b \quad [2\pi].$$

Enfin, on a $\tan a = \tan b$ *si et seulement si* $a \equiv b \ [\pi]$.



Démonstration. Prouvons le résultat pour le cosinus.
Par 2π-périodicité, on peut se contenter de supposer que a et b sont dans $[-\pi, \pi]$.
Sur $[0, \pi]$, la fonction cos est strictement décroissante, continue, avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, donc elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
Et de même, cos réalise une bijection de $]-\pi, 0[$ sur $]-1, 1[$.
Ainsi, tout réel de $]-1, 1[$ possède exactement deux antécédents par cos dans $]-\pi, \pi]$: un dans $]-\pi, 0[$ et un dans $[0, \pi]$.
En particulier si $a \in]-\pi, \pi]$ est tel que $\cos a \neq \pm 1$, alors nous connaissons déjà deux antécédents de $\cos a$ par cos : ce sont a et $-a$ (car $\cos(-a) = \cos(a)$).
Ce sont donc les seuls, de sorte que pour $b \in]-\pi, \pi]$, on a $\cos b = \cos a \Leftrightarrow a = b$ **ou** $a = -b$.
Les cas $\cos a = 1$ et $\cos a = -1$ demandent un peu plus de précautions, car sur $]-\pi, \pi]$, cos prend une seule fois les valeurs 1 (en 0) et -1 (en π). Cela ne contredit toutefois pas l'énoncé car $0 = -0$ et $\pi \equiv -\pi \ [2\pi]$.

Pour le sinus, il suffit de noter que $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$.
Et donc si et seulement si

$$\frac{\pi}{2} - a \equiv \frac{\pi}{2} - b \pmod{2\pi} \text{ **ou** } \frac{\pi}{2} - a \equiv -\frac{\pi}{2} + b \pmod{2\pi} \Leftrightarrow a \equiv \quad \pmod{2\pi} \text{ **ou** } b \equiv \pi - a \pmod{2\pi}.$$

Enfin, pour la tangente, notons qu'elle est π-périodique, et donc qu'il suffit de savoir résoudre $\tan x = \tan a$ pour $a, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Mais sur cet intervalle, la tangente est strictement croissante, donc ne prend qu'une seule fois la valeur $\tan a$, en $x = a$.

□

Exemple 5.26

On a $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$ si et seulement si

$$2x \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{-5\pi}{6} \quad [2\pi].$$

Soit encore si et seulement si

$$x \equiv \frac{5\pi}{12} \quad [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{-5\pi}{12} \quad [\pi].$$

Pour résoudre des inéquations trigonométriques, on n'hésitera pas à s'aider d'un cercle, sans oublier de travailler modulo 2π. Dans ce cas, on n'écrira pas des inégalités modulo

2π (ce dont nous n'avons jamais donné de définition), et on reviendra à la définition de congruence («il existe un entier k tel que ...»)

Exemple 5.27

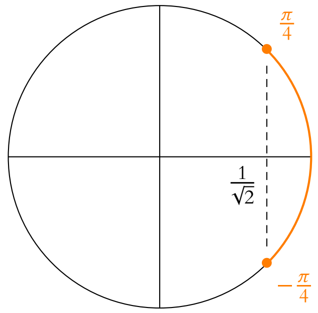
Résolvons l'inéquation $\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puisque la fonction cos est 2π-périodique, il suffit de la résoudre dans un intervalle de longueur 2π, puis de procéder à des translations de 2π.

Pour $x \in]-\pi, \pi]$, on a[10]

$$\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[.$$

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[.$$



[10] Ne justifions rien, ça se «voit» sur le cercle. Si on voulait le justifier rigoureusement, il faudra sûrement étudier les variations de cos sur $]-\pi, \pi]$, ce qui n'est pas bien difficile, mais dont on se passera volontiers.

Proposition 5.28 (Transformation de $a\cos x + b\sin x$) : *Soient a et b deux réels. Alors il existe un réel φ tel que*

$$\forall x \in \mathbf{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

Interprétation physique

La somme de deux signaux périodiques de même période est encore un signal périodique de même période. Son amplitude est $\sqrt{a^2+b^2}$ et son déphasage vaut φ.

Démonstration. Si $a = b = 0$, alors il n'y a rien à dire, n'importe quelle valeur de φ convient. Sinon, on a

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right).$$

Mais $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un réel[11] φ tel que $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi \end{cases}$.

[11] Unique modulo 2π.

Et alors

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

□

Exemples 5.29

Résolvons l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = -1$.
On a

$$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos(x) + \sin\frac{\pi}{3}\sin(x)\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Et donc

$$\begin{aligned}\cos x + \sqrt{3}\sin(x) = -1 &\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{-2\pi}{3} \quad [2\pi]\\ &\Leftrightarrow x = \pi \quad [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi].\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

5.5 Fonctions circulaires réciproques

Vous avez sûrement déjà utilisé la touche $\cos^{-1}$ de votre calculatrice, qui permet de retrouver un angle à partir de son cosinus.
Il ne s'agit pas de **la** bijection réciproque de cos car celle-ci n'est pas bijective : comme toute fonction périodique, tout élément de son image possède une infinité d'antécédents.
En revanche, en restreignant cos à un intervalle plus petit, elle devient bijective, et donc il est possible d'introduire sa bijection réciproque.

5.5.1 Arc sinus et arc cosinus

Définition 5.30 – La fonction $\sin_{|\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
On appelle alors **arc sinus** et on note Arcsin sa bijection réciproque :

$$\mathrm{Arcsin}: \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \mathrm{Arcsin}(x) \end{array}\right. .$$

Démonstration. La fonction sin est continue[12] sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, et elle y est strictement croissante car sa dérivée, qui est la fonction cosinus, est strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Enfin, on a $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
Donc par le théorème de la bijection, sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$. □

[12] Car dérivable.

Rappel
Une dérivée qui s'annule uniquement en un nombre fini de points n'est pas un obstacle à la **stricte** monotonie.

Remarque. Puisque sin est strictement croissante, il en est de même de Arcsin. Et puisque sin est impaire, il en est de même de Arcsin.
En effet, pour $x \in [-1,1]$, on a

$$\sin(-\mathrm{Arcsin}(x)) = -\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = -x = \sin(\mathrm{Arcsin}(-x)).$$

Et donc en composant par Arcsin, il vient $-\mathrm{Arcsin}(x) = \mathrm{Arcsin}(-x)$.

⚠ On n'a pas, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$.
Ceci n'est vrai que pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
En effet, nous n'avons pas dit que Arcsin est la bijection réciproque de sin sur $\mathbf{R}$ tout entier[13], mais uniquement la bijection réciproque de sin restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
En revanche, pour $x \in [-1,1]$, on a bien $\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$, car $\mathrm{Arcsin}(x)$ est bien dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
On retiendra que pour $(x,\theta) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\theta = \mathrm{Arcsin}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta = x \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

En effet, $\theta = \mathrm{Arcsin}(x)$ si et seulement si il s'agit de l'antécédent[14] de x par sin **dans** $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
La seconde condition, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est absolument indispensable, on ne peut pas se contenter de $\sin\theta = x$. En effet, il existe une infinité de réels dont le sinus vaut x, ce sont tous les nombres congrus à $\mathrm{Arcsin}\, x$ ou à $\pi - \mathrm{Arcsin}(x)$ modulo 2π.

[13] Et pour cause, sin ne peut pas être bijective sur $\mathbf{R}$ puisqu'elle y est périodique, et prend donc une infinité de fois chaque valeur.

[14] Nécessairement unique.

Remarque
C'est le même principe que lorsqu'on dit que

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a \\ x \geqslant 0 \end{cases}.$$

La première condition implique que $x = \pm\sqrt{a}$, mais il faut la seconde pour décider de la valeur exacte de x.

Exemples 5.31

► Calculons $\text{Arcsin}\left(\sin\frac{18\pi}{7}\right)$.

$\text{Arcsin}\left(\sin\frac{18\pi}{7}\right) = \text{Arcsin}\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right) = \text{Arcsin}\left(-\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right) = -\text{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right)$.

Puisque $\frac{-3\pi}{17} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\text{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right) = -\frac{3\pi}{7}$ et donc $\text{Arcsin}\left(\sin\frac{18\pi}{7}\right) = \frac{3\pi}{7}$.

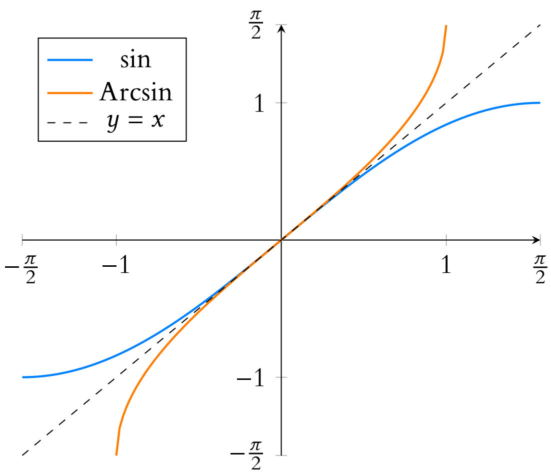
► Certaines valeurs de la fonction Arcsin doivent être connues sans hésitation, en lien avec les valeurs remarquables de la fonction sinus.

Par exemple, $\text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$, $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ et $\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Proposition 5.32 : *La fonction* Arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$, *et*

$$\forall x \in]-1,1[,\ (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Les propriétés générales des dérivées des bijections réciproques prouvent que Arcsin est dérivable là où $\sin' \circ \text{Arcsin}$ ne s'annule pas.
C'est-à-dire sur l'ensemble des $x \in]-1,1[$ tels que $\cos(\text{Arcsin}\, x) \neq 0$.
Mais $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) = 0 \Leftrightarrow \text{Arcsin}(x) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Et donc Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$, $(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))}$.
Il s'agit donc de calculer $\cos(\text{Arcsin}(x))$.
Or, nous savons que pour $x \in [-1,1]$, $\sin(\text{Arcsin}(x)) = 1$.
Et donc $\cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - x^2$.
Or, $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geqslant 0$.
On en déduit donc que $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{\cos^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1-x^2}$.
Et donc $\forall x \in]-1,1[$, $(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □



Notons que la fonction sin possédant des tangentes horizontales en $\pm\frac{\pi}{2}$, Arcsin possède des tangente verticales en ± 1.

Définition 5.33 – La fonction $\cos_{|[0,\pi]}$ réalise une bijection strictement croissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
On appelle alors **arc cosinus** et on note Arccos sa bijection réciproque :

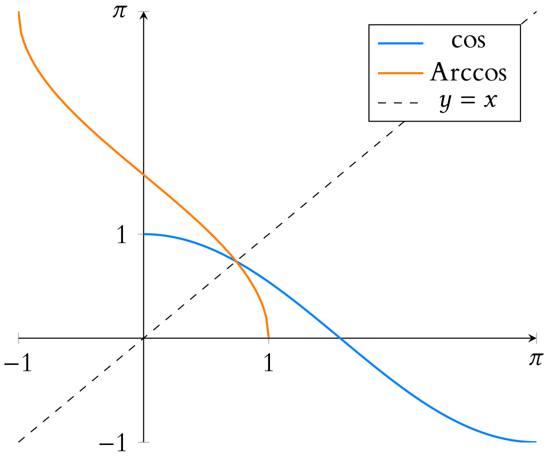
$$\text{Arccos} : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \text{Arccos}(x) \end{array} \right. .$$

Démonstration. La fonction cos est continue car dérivable, et sur $[0,\pi]$, sa dérivée est $x \mapsto -\sin(x) \leqslant 0$.
De plus, cette dérivée s'annule uniquement en 0 et en π, donc $\cos_{|[0,\pi]}$ est strictement décroissante.
Puisque $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, par le théorème de la bijection, $\cos_{|[0,\pi]}$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. □

Remarque. Puisque $\cos_{|[0,\pi]}$, est strictement décroissante, il en est de même de Arccos.
En revanche, la parité de cos n'induit pas une parité de Arccos, par exemple car son ensemble de définition n'est pas symétrique !
Enfin, toutes les valeurs déjà connues pour le cos se traduisent en termes d'Arccos.
Par exemple $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \text{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} = \text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$.
Comme pour l'arcsinus, on a toujours, pour $x \in [-1,1]$, $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$, mais on pas toujours $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$, ceci n'étant vrai que pour $x \in [0,\pi]$.

On retiendra que $\theta = \text{Arccos}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases}$.

Plus généralement — Une fonction paire n'est jamais bijective puisqu'elle prend au moins deux fois chaque valeur (à moins que son ensemble de définition soit réduit à $\{0\}$, ce qui est totalement inintéressant).



Exemple 5.34

Résolvons l'équation $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}\frac{12}{13}$, d'inconnue $x \in [-1,1]$.
Puisque $\text{Arcsin}\frac{12}{13} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, une solution, s'il en existe une, est dans $[0,1]$.
On aura alors, pour $x \in [0,1]$,

$$\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}\frac{12}{13} \Leftrightarrow \cos(\text{Arccos}\,x) = \cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$$

Mais $\cos^2\left(\text{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) + \cos^2\left(\text{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = 1$ soit encore $\cos^2\left(\text{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$.
Puisque $\text{Arcsin}\frac{12}{13} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\text{Arcsin}\frac{12}{13}\right) > 0$ et donc

$$\cos\left(\text{Arcsin}\,\frac{12}{13}\right) = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

Par conséquent, $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}\,\frac{12}{13} \Leftrightarrow x = \frac{5}{13}$.

Et donc, $\frac{5}{13}$ est l'unique solution de l'équation $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}\,\frac{12}{13}$.

Remarque

Comme prouvé ici, ainsi que dans la preuve de la proposition 5.32, on a, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Il faut, sinon le savoir par cœur, être capable de le redémontrer.

Proposition 5.35 :

$$\forall x \in [-1, 1],\ \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. Soit $x \in [-1, 1]$. Alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)\right) = \sin(\text{Arcsin}(x)) = x.$$

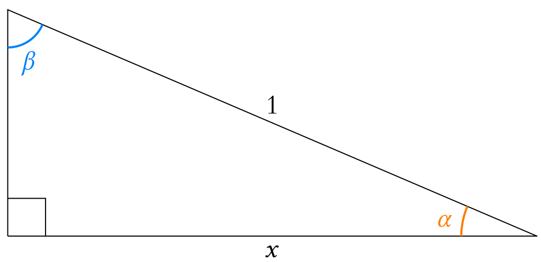
D'autre part, puisque $-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arcsin}(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) \leqslant \pi$.

Et donc $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)\right) = x \\ \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) \in [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) = \text{Arccos}(x).$ □

Remarque. Cette relation a en fait une interprétation géométrique très simple si $x \in]0, 1[$. En effet, si l'on se place, comme dans la figure ci-dessous dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 1 et l'un des côtés vaut x, on a $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Mais $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, de sorte que $\alpha = \text{Arccos}\,x$ et de même, $\sin\beta = \frac{x}{1}$, et donc $\beta = \text{Arcsin}(x)$.

Et donc $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = \text{Arccos}\,x + \text{Arcsin}\,x$.



Corollaire 5.36 – *La fonction* Arccos *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et pour tout* $x \in]-1, 1[$,

$$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Notons que ceci aurait pu être prouvé en reproduisant la preuve de la dérivabilité de Arcsin.

Mais en utilisant la relation précédentes'écrit encore $\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)$.

Et donc Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ car somme de deux fonctions dérivables, et sa dérivée est donnée pour tout $x \in]-1, 1[$ par $\text{Arccos}'(x) = -\text{Arcsin}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

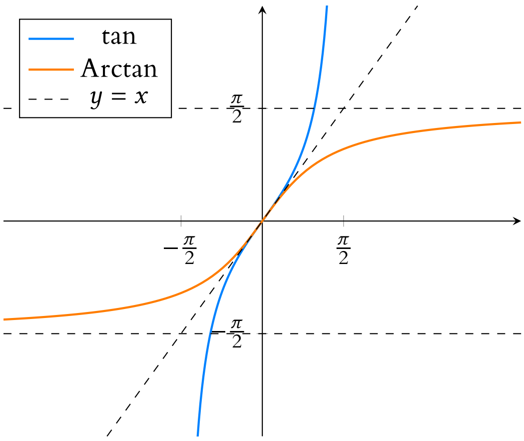
5.5.2 Arc tangente

Définition 5.37 – La fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$.
On appelle **arc tangente** et on note Arctan sa bijection réciproque :

$$\text{Arctan} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \text{Arctan}(x) \end{array} \right.$$

Démonstration. La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
Donc par le théorème de la bijection, $\tan_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$. □

⚠ Bien que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, on n'a absolument pas $\text{Arctan} = \dfrac{\text{Arcsin}}{\text{Arccos}}$!



Une fois n'est pas coutume, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$ mais $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$ n'est vrai que pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Enfin, on retiendra que $\theta = \text{Arctan}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan\theta \\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$.

Exemple 5.38

Calculons $\theta = \text{Arctan}\,\frac{1}{3} + \text{Arctan}\,\frac{1}{7}$. On a

$$\tan\theta = \frac{\tan \text{Arctan}\,\frac{1}{3} + \tan \text{Arctan}\,\frac{1}{7}}{1 - \tan \text{Arctan}\,\frac{1}{3} \tan \text{Arctan}\,\frac{1}{7}} = \frac{\frac{10}{21}}{1 - \frac{1}{21}} = \frac{1}{2}.$$

Nous serions tentés d'en déduire que $\theta = \text{Arctan}\,\frac{1}{2}$, mais encore faut-il s'assurer que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Mais puisque $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$, alors $0 \leqslant \text{Arctan}\,\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$ et de même $0 < \text{Arctan}\,\frac{1}{7} < \frac{\pi}{4}$.
On en déduit donc que $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \tan\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ et par conséquent $\theta = \text{Arctan}\,\frac{1}{2}$.

Proposition 5.39 : *La fonction* Arctan *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}$*, impaire, avec* $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.
De plus, elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ *et* $\forall x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Arctan}(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. La stricte croissance découle de celle de tan, de même que l'imparité.
En effet, si $x \in \mathbf{R}$, alors $\tan(-\mathrm{Arctan}(x)) = -\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = -x$ et donc par application de l'arctangente, $-\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(-x)$.
Les limites découlent aussi de celles de la tangente.
Enfin, puisque $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ n'est jamais nul, Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\mathrm{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Exemple 5.40

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \mathrm{Arcsin}(x)$.
En effet, si $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \mathrm{Arcsin}(x)$, alors f est dérivable[15] sur $]-1,1[$, et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Donc f est constante sur $]-1,1[$, avec $f(0) = \mathrm{Arctan}(0) - \mathrm{Arcsin}(0) = 0$.
On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

[15] Car composée de fonctions qui le sont.

Proposition 5.41 : *Pour* $x \in \mathbf{R}^*$*, on a*

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration. Notons g la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $g(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Alors g est dérivable car somme de composées de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

Il serait alors tentant d'en déduire que g est constante, mais $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle !
En revanche, $\mathbf{R}_+^*$ est un intervalle sur lequel g est donc constante.
Or, $g(1) = \mathrm{Arctan}(1) + \mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $g(x) = \frac{\pi}{2}$.
De même, g est constante sur $\mathbf{R}_-^*$, égale à $g(-1) = -\frac{\pi}{2}$. □

Notons que cette formule a une interprétation géométrique très simple si $x > 0$: dans le triangle rectangle suivant, $\tan\alpha = \frac{1}{x}$ et donc $\alpha = \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ et $\tan\beta = x$ et donc $\beta = \operatorname{Arctan}(x)$.
Or, il est évident que la somme des deux vaut $\frac{\pi}{2}$.