6 Nombres complexes

6.1 L'ensemble des nombres complexes

6.1.1 Définition

La définition précise de $\mathbf{C}$ est hors-programme[1], donc nous nous contenterons **d'admettre** qu'il existe un ensemble noté $\mathbf{C}$, dont tous les éléments s'écrivent de manière unique sous la forme $a+ib$, $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, sur lequel sont définies deux opérations $+$ et $\times$, satisfaisant aux mêmes règles de calcul que dans $\mathbf{R}$ et vérifiant $i^2=-1$.
Ainsi, si $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ sont deux éléments de $\mathbf{C}$, on a

- $z+z'=(a+a')+i(b+b')$
- $z\times z'=(a+ib)(a'+ib')=aa'+i(ab'+a'b)+\underbrace{i^2}_{=-1}bb'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$.

[1] Les curieux pourront se référer à l'appendice en fin de chapitre.

Remarquons tout de suite que $z+z'=z'+z$ et $zz'=z'z$ (on dit alors que l'addition et la multiplication sont commutatives), ce qui découle du fait que la l'addition et la multiplication de réels sont des opérations commutatives.

L'écriture $z=a+ib$, avec $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ est appelée **forme algébrique** du complexe z.
L'unicité de l'écriture sous forme algébrique signifie que $a+ib=a'+ib'$ si et seulement si on a à la fois $\begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$.

Autrement dit — Une égalité entre deux complexes signifie qu'on a deux égalités de réels.

Définition 6.1 – Si $z=a+ib\in\mathbf{C}$, alors on appelle :
- **partie réelle de** z le nombre réel a, que l'on note $\mathrm{Re}(z)$
- **partie imaginaire de** z le nombre réel b, que l'on note $\mathrm{Im}(z)$

On a donc $z=\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)$.

Un nombre complexe est donc entièrement caractérisé par la donnée de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.
Si $\mathrm{Im}(z)=0$, alors on identifie le complexe z et le réel $\mathrm{Re}(z)$, de sorte qu'on considère que $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.
Un complexe z est donc un réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z)=0 \Leftrightarrow z=\mathrm{Re}(z)$. Un complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur.** On note $i\mathbf{R}$ l'ensemble des imaginaires purs, c'est-à-dire l'ensemble des $\{ib,\ b\in\mathbf{R}\}$.

Proposition 6.2 : *Si z,z' sont deux nombres complexes, alors on a*

$$\mathrm{Re}(z+z')=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z+z')=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z').$$

☠ Danger ! — La partie réelle (resp. imaginaire) d'un produit n'est pas le produit des parties réelles (resp. imaginaires).

Démonstration. Immédiat. □

Si $z=a+ib$ est un nombre complexe non nul[2] possède un inverse car si on note $z^{-1}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-i\dfrac{b}{a^2+b^2}$, alors

$$zz^{-1}=(a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+i\left(-\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{ab}{a^2+b^2}\right)=1.$$

[2] C'est-à-dire tel que $a\neq 0$ **ou** $b\neq 0$.

Ceci implique notamment que, à l'instar de ce qui se passe dans $\mathbf{R}$, si z et z' sont deux complexes tels que $zz'=0$, alors $z=0$ ou $z'=0$.

Autrement dit — Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

En effet, supposons que $zz' = 0$, et que z soit non nul. Alors en multipliant $zz' = 0$ par z^{-1}, il vient

$$z^{-1}zz' = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot z' = 0 \Leftrightarrow z' = 0.$$

Ceci nous permet également de définir la division de deux complexes en posant, pour $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = z(z')^{-1}$.

Définition 6.3 – Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Alors tout point M est caractérisé de manière unique par ses coordonnées (x, y).
Si M a pour coordonnées (x, y), on dit que le complexe $z = x + iy$ est **l'affixe de** M.
On dit également que M est l'image du complexe $z = x + iy$.
De même, si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est un vecteur du plan, on dit que le complexe $z = x + iy$ est l'affixe de $\vec{u}$.

Les réels sont donc les complexes dont l'image est située sur l'axe des abscisses, et les imaginaires purs ceux dont l'image est situé sur l'axe des ordonnées.
Remarquons alors qu'il y a une correspondance entre les complexes et les points du plan : à chaque complexe correspond un unique point du plan et vice versa.
Nous dirons bientôt que l'application qui à un point du plan associe son affixe réalise une bijection du plan sur $\mathbf{C}$.

6.1.2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 6.4 – Si $z = a + ib$ est un complexe, le complexe $\overline{z} = a - ib$ est appelé **nombre conjugué**[3] de z.
Autrement dit, $\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$.

[3] Ou plus simple conjugué.

Géométriquement, l'image de $\overline{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

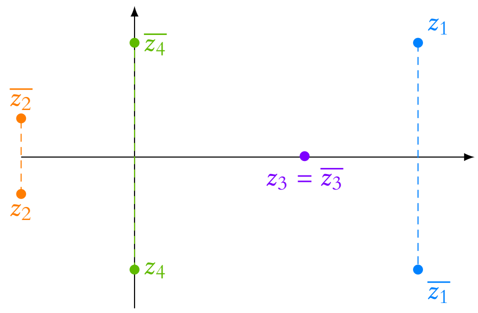


FIGURE 6.1 – Quelques complexes et leurs conjugués (on confond ici un complexe et son image dans le plan).

Remarques. ► Un complexe z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
► De même, $z \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.
► Notons tout de suite que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$. On dit alors que $f : z \mapsto \overline{z}$ est une *involution*, c'est-à-dire une application telle que $f \circ f = \mathrm{id}$.

Géométriquement
Un point est invariant par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses si et seulement si il est sur cet a xe.

Proposition 6.5 : *Si z et z' sont deux complexes, alors*

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \text{ et } \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}.$$

De plus, si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et plus généralement, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

Démonstration. Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Alors

$$\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') = \overline{z} + \overline{z'}.$$

De même,

$$\overline{zz'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + a'b) = \overline{(aa' + bb') + i(a'b + ab')} = \overline{z}\,\overline{z'}.$$

Et si $z \neq 0$, en utilisant le point précédent, on a

$$\overline{\frac{1}{z}}\,\overline{z} = \overline{\frac{1}{z}z} = \overline{1} = 1.$$

Et donc $\dfrac{1}{\overline{z}} = \overline{\dfrac{1}{z}}$.
Enfin, en combinant les deux formules précédentes,

$$\overline{\frac{z'}{z}} = \overline{z'\frac{1}{z}} = \overline{z'}\,\overline{\frac{1}{z}} = \overline{z'}\frac{1}{\overline{z}} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}.$$

□

Proposition 6.6 : *Si $z \in \mathbf{C}$, alors $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.*

Démonstration. Si $z = a + ib$ est la forme algébrique de z, $\overline{z} = a - ib$ de sorte que $z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$.
Et $z - \overline{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$. □

6.1.3 Module d'un nombre complexe

Définition 6.7 – Si $z = a + ib \in \mathbf{C}$, on appelle **module de** z le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$.

Géométriquement, $|z|$ n'est autre que la longueur du segment joignant l'origine O au point d'affixe z.

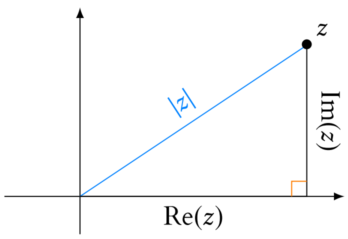


FIGURE 6.2 – Le module d'un complexe. Merci Pythagore !

En particulier, si z est un réel, alors $z = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} = \sqrt{z^2}$ est égal à la valeur absolue de z.

Remarque
Ceci justifie qu'on utilise la même notation pour le module et la valeur absolue, puisque dans le cas d'un réel, ces deux notations désignent la même quantité.

Proposition 6.8 : *Si $z \in \mathbf{C}$, alors $z\overline{z} = |z|^2$.*

Démonstration. C'est un simple calcul, si $z = a + ib$, alors,

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - \underbrace{i^2}_{=-1} b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

□

Corollaire 6.9 – *Si $z \in \mathbf{C}^*$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.*

Cette formule s'écrit encore, si $z = a + ib$, sous la forme $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Proposition 6.10 (Propriétés du module) :

1. *Pour tout* $z \in \mathbf{C}$, $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ *et* $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$
2. *Si* $z \in \mathbf{C}$, *alors* $|\overline{z}| = |z|$. *De plus, on a* $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.
3. *Si* z, z' *sont deux complexes, alors* $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ *et si* $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

   En particulier, $|-z| = |z|$ *et* $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

Démonstration. 1. Soit $z \in \mathbf{C}$, $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.
Alors $|\operatorname{Re}(z)|^2 = |a|^2 = a^2 \leqslant a^2 + b^2 \leqslant |z|^2$.
Et donc par croissance de la racine carrée, $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$.
De même, $|\operatorname{Im}(z)| = |b| \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant |z|$.

> **Cas d'égalité**
> On a alors $|\operatorname{Re}(z)| = |z|$ si et seulement si $b = 0$, soit si et seulement si $z \in \mathbf{R}$.

2. Si $z = a + ib$, alors $\overline{z} = a - ib$, de sorte que $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$.
De plus, on a $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$.
Or, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls, donc

$$|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0.$$

> **Géométriquement**
> Le seul point a distance nulle de l'origine est l'origine.

3. On a
$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2.$$
Mais des modules sont toujours positifs, donc en passant à la racine,
$$|zz'| = |z| \cdot |z'|.$$
En particulier, pour $z \neq 0$, il vient $\left|\dfrac{1}{z}\right||z| = \left|z\dfrac{1}{z}\right| = |1| = 1$.
Et donc $\dfrac{1}{|z|} = \left|\dfrac{1}{z}\right|$.
On en déduit que si $z' \neq 0$,
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z\frac{1}{z'}\right| = \left|\frac{1}{z'}\right||z| = \frac{1}{|z'|}|z| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

□

En revanche, les choses se passent moins bien pour la somme, et le module d'une somme n'est que rarement la somme des modules. Par exemple, $|1 + i| = \sqrt{2}| \neq |1| + |i|$.
Plus précisément, on dispose de l'inégalité suivante.

Théorème 6.11 (Inégalité triangulaire) : *Si* z_1, z_2 *sont deux nombres complexes, alors*
$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$
Cette inégalité est une égalité si et seulement si $z_1 = 0$ *ou s'il existe* $\lambda \in \mathbf{R}_+$ *tel que* $z_2 = \lambda z_1$.

> **Cas d'égalité**
> Le cas d'égalité signifie que les vecteurs d'affixes z_1 et z_2 sont colinéaires et de même sens.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant |z_1|^2 + 2\,|\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2)| + |z_2|^2 \\
&\leqslant |z_1|^2 + 2\,|\overline{z_1}z_2| + |z_2|^2 \\
&\leqslant (|z_1| + |z_2|)^2 .
\end{aligned}
$$

Donc $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
De plus il y a égalité si et seulement si chacune des inégalités ci-dessus est une égalité, soit si et seulement si $|\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}_2)| = \mathrm{Re}\,(\overline{z_1}_2)$ et $|\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}_2)| = |\overline{z_1}z_2|$.
La première condition équivaut au fait que $\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2)$ soit positif, et la seconde au fait que $\overline{z_1}z_2$ soit réel.
Donc au final, il y a égalité si et seulement si $\overline{z_1}z_2 \in \mathbf{R}_+$.
Si $z_1 = 0$, alors il y a égalité.
Si $z_1 \neq 0$, si il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $\overline{z_1}z_2 = \lambda$ et donc $z_2 = \lambda \dfrac{1}{\overline{z_1}} = \underbrace{\dfrac{\lambda}{|z_1|^2}}_{\geqslant 0} z_1$.
Et inversement, si $z_2 = \lambda z_1$ avec $\lambda \in \mathbf{R}_+$, alors $z_1 + z_2 = (1+\lambda)z_1$ et donc $|z_1 + z_2| = (1+\lambda)|z_1| = |z_1| + \lambda|z_1| = |z_1| + |z_2|$, donc l'inégalité triangulaire est une égalité.
Au final, il y a bien égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$. □

Corollaire 6.12 – *Quels que soient les complexes z et z', on a $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'|$.*

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas réel. □

Notons qu'en utilisant à la fois l'inégalité triangulaire et l'inégalité triangulaire renversée, et en changeant z' en son opposé, on arrive à

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Corollaire 6.13 – *Si $z_1, \dots, z_n$ sont des complexes, alors $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$.*

Si on suppose de plus que $z_1 \neq 0$, alors cette inégalité est une égalité si et seulement si pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_j \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_j = \lambda_j z_1$.

Remarque
Si l'un au moins des z_j est non nul, alors quitte à les renuméroter, on peut supposer que $z_1 \neq 0$. Sauf si tous sont nuls, mais alors le résultat est évident.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, comme pour le cas réel. Si $n = 1$ c'est évident, et si $n = 2$, c'est la proposition précédente.

Supposons donc que pour tous complexes $z_1, \dots, z_n$, $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$ et soient $z_1, \dots, z_{n+1}$ $n+1$ nombres complexes. Alors

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} z_i + z_{n+1}\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + |z_{n+1}| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i| + |z_{n+1}| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+} |z_i|.
\end{aligned}
$$

C'est la proposition précédente.

Hypothèse de récurrence.

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tous complexes $z_1, \dots, z_n$, $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$. Pour le cas d'égalité, lorsque $z_1 \neq 0$ il s'agit de remarquer que s'il y a égalité, alors toutes les inégalités qui précèdent sont des égalités. En particulier,

$$|z_{n+1}| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \text{ et } \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Par hypothèse de récurrence, la seconde égalité implique que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe un réel positif λ_j tel que $z_j = \lambda_j z_1$.
Et par l'inégalité triangulaire, il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_{n+1} = \lambda(z_1 + \cdots + z_n) = \underbrace{\lambda(1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)}_{\in \mathbf{R}_+} z_1$.

Inversement, si pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, $z_j = \lambda_j z_1$, avec $\lambda_j \in \mathbf{R}_+$, alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z_1\right| = |z_1| \left|\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i}_{\in \mathbf{R}_+}\right| = |z_1| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i |z_1| = \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|.$$

Et donc l'inégalité triangulaire est une égalité. □

6.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Souvenons-nous qu'il est possible d'identifier les nombres complexes aux points du plan. Le plus simple pour caractériser un point du plan est de se donner son abscisse et son ordonnée, ce qui en termes de nombres complexes, correspond à la partie réelle et la partie imaginaire. C'est ce que nous avons appelé la forme algébrique d'un complexe. Elle est particulièrement adaptée aux calculs de sommes, mais les calculs de produits ou de quotients sont plus désagréables.

Dans le chapitre 5, nous avons mentionné qu'il existait un autre moyen de repérer un point du plan, en se donnant le rayon d'un cercle centré en $(0, 0)$ (donc un réel strictement positif) et un angle. Il s'agit des coordonnées polaires utilisées en physique. La caractérisation d'un complexe par un rayon et un angle est appelée écriture exponentielle, et nous allons voir qu'elle est particulièrement efficace pour le calcul de produits.

6.2.1 Groupe des nombres complexes de module 1

Définition 6.14 – On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}.$$

Autrement dit
$\mathbf{U}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique.

Remarque. Si z est un complexe non nul, alors $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbf{U}$.
En effet, $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{1}{|z|}|z| = 1$.

Exemples 6.15

- $1, i, -i$ et -1 sont dans $\mathbf{U}$.
Puisque $|1 + i| = \sqrt{2}$, $1 + i \notin \mathbf{U}$ mais $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \in \mathbf{U}$.
- Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$. Alors $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbf{R}$ si et seulement si $z \in \mathbf{U}$.
En effet, on a $\dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{(z+1)(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} = \dfrac{|z|^2 - z + \overline{z} - 1}{|z-1|^2} = \dfrac{|z|^2-1}{|z-1|^2} - i\dfrac{2\operatorname{Im}(z)}{|z-1|^2}$.
Et donc ce nombre est imaginaire pur si et seulement si

$$|z|^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}.$$

Les propriétés qui suivent expliquent qu'on appelle $\mathbf{U}$ un groupe, notion que nous rencontrerons bientôt dans un cadre plus général.

Proposition 6.16 : $1 \in \mathbf{U}$ *et pour tout* $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$, $z_1 z_2 \in \mathbf{U}$ *et* $\dfrac{1}{z_1} \in \mathbf{U}$.

Démonstration. Cela découle directement des propriétés du module. □

Proposition 6.17 : *Si* $z \in \mathbf{C}$ *est non nul, alors* $z \in \mathbf{U}$ *si et seulement si* $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

En particulier

L'inverse de i est son conjugué : $-i$.

Démonstration. Nous savons que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ et donc $\dfrac{1}{z} = \overline{z} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}$. □

6.2.2 Notation $e^{i\theta}$

Proposition 6.18 : *Soit* $z \in \mathbf{U}$. *Alors il existe* $\theta \in \mathbf{R}$ *tel que* $z = \cos\theta + i \sin\theta$.
Un tel réel θ *est appelé un argument de* z.

Terminologie

Il existe une infinité de tels réels θ, donc on veillera bien à dire **un** argument, et pas l'argument.

Démonstration. Soit $z = a + ib$ un élément de $\mathbf{U}$. Alors $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.
Autrement dit, (a, b) appartient au cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. Mais nous avons vu précédemment[4] qu'alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$, unique modulo 2π, tel que $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$.
Et donc $z = \cos\theta + i\sin\theta$. □

[4] C'est ce que nous avons appelé la paramétrisation du cercle trigonométrique.

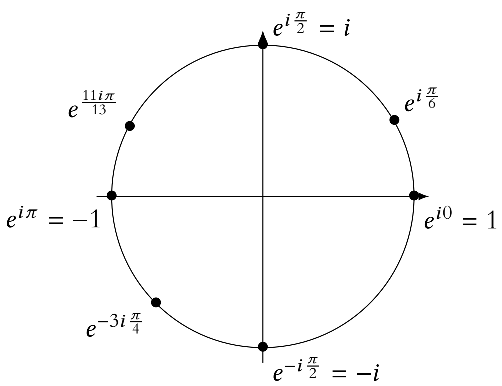
Définition 6.19 – Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Remarques. ▸ Notons qu'en particulier, $e^{i0} = 1$. Et plus généralement, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $e^{2ik\pi} = 1$.
On a également $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-1 = e^{i\pi}$.
Cette dernière formule, souvent écrite $e^{i\pi} + 1 = 0$, est nommée identité d'Euler, et est souvent décrite comme «l'une des plus belles formules mathématiques» du fait qu'elle relie cinq nombres d'importance capitale : $0, 1, i, e$ et π.
▸ Un complexe non nul z est un réel positif si et seulement si $\arg(z) = 0$ et c'est un réel négatif si et seulement si $\arg(z) = \pi$.
Enfin, $z \in i\mathbf{R}$ si et seulement si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
▸ Avec cette notation, $\mathbf{U} = \left\{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbf{R}\right\}$.
Graphiquement, le point M_θ d'affixe $e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM_\theta}\right) = \theta$.

Plus belle ?

On pourrait discuter des heures pour décider si c'est ou non **la** plus belle des formules, mais il faut bien reconnaître qu'elle est assez fascinante !



⚠ Pour l'instant il ne s'agit que d'une notation, et a priori, rien ne justifie qu'il existe un quelconque rapport avec la fonction exponentielle que nous utilisons en analyse[5].

[5] La bijection réciproque du logarithme.

Il y a bien un lien, et il existe une formule qui permet de définir de la même manière $e^x, x \in \mathbf{R}$ et $e^{i\theta}, \theta \in \mathbf{R}$, et vous apprendrez tout cela quand vous serez plus grands[6].
En particulier, vous noterez bien que je n'ai à aucun moment définit ce que serait le logarithme d'un nombre complexe,
Pour l'instant, contentons-nous de constater que $e^{i\theta}$ partage bien des propriétés avec l'exponentielle réelle dont nous avons l'habitude :

[6] L'an prochain !

Proposition 6.20 : *Soient $\theta, \theta_1, \theta_2$ des réels. Alors*

1. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$. *Et donc,* $e^{i\theta} \in \mathbf{U}$
2. $\forall k \in \mathbf{Z}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
3. $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta_2 \quad [2\pi]$
4. $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
5. $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, *donc* $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
6. $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Démonstration.

1. On a
$$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1.$$
2. Pour $k \in \mathbf{Z}$, on a, par 2π-périodicité des fonctions cos et sin
$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}.$$
3. Nous savons qu'à tout point du cercle trigonométrique correspond un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$. Autrement dit, pour $\theta_1, \theta_2 \in]-\pi, \pi]$, $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$.
Mais il existe un (unique) entier k_1 tel que $\theta_1 + 2k_1\pi \in]-\pi, \pi]$ et de même il existe un entier k_2 tel que $\theta_2 + 2k_2\pi \in]-\pi, \pi]$.
Et alors, si $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$, alors $e^{i\theta_1} = e^{i(\theta_1+2k_1\pi)} = e^{i(\theta_2+2k_2\pi)}$ de sorte que $\theta_1 + 2k_1\pi = \theta_2 + 2k_2\pi \Rightarrow \theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi]$.
La réciproque est évidente d'après le point précédent.
4. Il s'agit d'utiliser les formules de trigonométrie vues au chapitre précédent :
$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$
5. On a $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = 1$. Et donc $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
Et puisque $e^{i\theta}$ est de module 1, son inverse est égal à son conjugué, de sorte que $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
6. $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}\dfrac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

□

Astuce

Si on utilise ici les formules d'addition pour prouver le résultat, c'est un bon moyen de les retrouver si on les oublie : $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ est la partie réelle de $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$.

6.2.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe, argument(s)

Proposition 6.21 : *Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors il existe $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ tel que*
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$
On a alors $r = |z|$, et si $z \neq 0$, alors θ est unique modulo 2π, autrement dit si
$$z = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$$
alors $r_1 = r_2 = |z|$ et $\theta_1 \equiv \theta_2 \quad [2\pi]$.

Démonstration. Si $z = 0$, alors pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $z = 0e^{i\theta}$.
Et si $z \neq 0$, alors $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1, donc dans $\mathbf{U}$.
Par conséquent, il existe θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \underbrace{|z|}_{\in \mathbf{R}_+} e^{i\theta}$.

Si $z \in \mathbf{C}$ s'écrit $z = re^{i\theta}$, alors $|z| = |r| \underbrace{\left|e^{i\theta}\right|}_{=1} = |r|$.

Et donc pour $z \neq 0$, si $z = r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$, alors $r_1 = r_2 = |z| \neq 0$, de sorte que $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ et donc $\theta_1 \equiv \theta_2 \quad [2\pi]$. □

L'écriture $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbf{R}_+$ est appelée **forme exponentielle** de z.
Notons que cette écriture est particulièrement bien adaptée au calcul de produits, puisque si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, alors $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Méthode

Bien qu'il soit possible de calculer des produits/quotients de complexes sous forme algébrique, on privilégiera autant que possible la forme exponentielle.

⚠ Méfions tout de même d'une chose : r doit être positif, et pas seulement réel !
Par exemple, $z = -2e^{i\pi/6}$ n'est pas une forme exponentielle, car son module ne peut valoir -2.
En revanche, en notant que $-1 = e^{i\pi}$, alors $z = 2e^{7i\pi/6}$, qui est bien une écriture sous forme exponentielle, avec 2 pour module.

Définition 6.22 – Soit $z \in \mathbf{C}$. On appelle **argument** de z tout réel tel que $z = |z|e^{i\theta}$.
Si z est non nul, et possède θ comme argument, alors les arguments de z sont exactement les éléments de $\theta + 2\pi\mathbf{Z} = \{\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.
En revanche, $z \in \mathbf{C}^*$ possède un unique argument dans $]-\pi, \pi]$, qu'on appelle **argument principal de** z, et qu'on note $\arg(z)$.

Autrement dit

Deux arguments de z sont congrus modulo 2π.

Géométriquement, si M est le point d'affixe $z \neq 0$, alors $\arg(z)$ est l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
Puisque $|z|$ est la distance OM, définir un complexe par sa forme exponentielle $re^{i\theta}$, c'est définir M par sa distance à l'origine et l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Et de même, si $\vec{u}$ a pour affixe $z = re^{i\theta}$, alors $r = \|\vec{u}\|$ et $\theta \equiv \left(\vec{i}, \vec{u}\right) \quad [2\pi]$.

Exemples 6.23

▸ Soit $z = 1 + i$. Alors $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Et alors

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}\right).$$

Donc $\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de z, et même l'argument principal de z.

Terminologie

Avez-vous bien saisi la subtilité ? __Un__ argument et pas __l'__argument, mais si on parle d'argument principal, alors il y en a un seul, qu'on appelle donc __l'__argument principal.

▸ Soit $z = 2 - 3i$. Alors $|z| = \sqrt{13}$.
Et donc $z = \sqrt{13}\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}} - i\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$.
Notons $\theta = \arg(z)$.
On a alors $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$. Donc $\theta = \operatorname{Arccos}\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ ou $\theta = -\operatorname{Arccos}\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.
Mais puisque $\sin\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{13}} \leqslant 0$, $\theta \in]-\pi, 0]$.
Et donc $\theta = -\operatorname{Arccos}\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.
De même, nous aurions pu remarquer que $\tan\theta = \dfrac{|z|\sin\theta}{|z|\cos\theta} = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \dfrac{-3}{2}$.
Puisque $\operatorname{Re}(z) > 0$, $\cos\theta > 0$ et donc $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Et donc $\theta = \operatorname{Arctan}\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\operatorname{Arctan}\dfrac{3}{2}$.

Remarque

Notons au passage que nous venons de prouver une égalité non triviale entre un arccosinus et une arctangente.

Exercice : prouver que si $z = a + ib \in \mathbf{C} \setminus i\mathbf{R}$, alors

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} & \text{si } a > 0 \\ \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} - \pi & \text{si } a < 0 \textbf{ et } b \leqslant 0 \\ \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} + \pi & \text{si } a < 0 \textbf{ et } b < 0 \end{cases}$$

Proposition 6.24 : *Soient z, z' deux complexes non nuls. Alors*

1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$
2. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$
3. $\forall n \in \mathbf{Z}, \arg(z^n) \equiv n \arg(z) \ [2\pi]$

Égal ou congru ?
Si

$$\arg(z) + \arg(z') \in]-\pi, \pi]$$

alors c'est l'argument principal de zz', mais sinon il faut ajouter $\pm 2\pi$ à $\theta + \theta'$ pour tomber dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Démonstration. 1. Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, alors $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, de sorte que $\theta + \theta' = \arg(z) + arg(z')$ est un argument de zz'. Et donc est congrue à $\arg(zz')$ modulo 2π.

2. Si $z = re^{i\theta}$, alors $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Et donc $-\theta$ est un argument de $\overline{z}$. Notons que sauf si $\theta = \pi$, $-\arg(z)$ est dans $]-\pi, \pi]$ et donc est égal à $\arg(\overline{z})$.

3. Si $n \geqslant 0$, la preuve se fait par récurrence en utilisant le point 1.
Et si $n < 0$, il suffit de noter que $z^n = \left(\dfrac{1}{z}\right)^{-n}$, avec $-n \geqslant 0$. Et donc

$$\arg(z^n) \equiv -n \arg \frac{1}{z} \equiv n \arg(z).$$

□

Revenons sur le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : si $z_1 \neq 0$ alors nous avons prouvé que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.
Mais alors, si $z_1 = re^{i\theta}$, il vient donc $z_2 = \underbrace{\lambda r}_{\in \mathbf{R}_+} e^{i\theta_1}$.
Et donc z_1 et z_2 ont même argument θ_1.
Et inversement, si z_1 et z_2 ont même argument θ, $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$, $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$ et donc en posant $\lambda = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} \in \mathbf{R}_+$, on a $z_2 = \lambda z_1$, et donc il y a égalité dans l'inégalité triangulaire.
On retiendra donc que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $z_1 z_2 = 0$, ou si $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

6.2.4 Formules de Moivre et d'Euler

Proposition 6.25 (Formules d'Euler) : *Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Alors*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. C'est un simple calcul : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}} = 2\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\right) = 2\cos\theta$ et de même

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}} = 2i \operatorname{Im}\left(e^{i\theta}\right) = 2i\sin\theta.$$

□

Exemples 6.26 Factorisation par l'angle moitié

Comme nous avions factorisé les sommes d'exponentielles réelles $e^a \pm e^b$ par $e^{(a+b)/2}$, il est souvent judicieux de factoriser $e^{ia} \pm e^{ib}$ par $e^{i(a+b)/2}$.

Par exemple, on a

$$e^{ia}-e^{ib} = e^{i(a+b)/2}\left(e^{i(a-b)/2}-e^{i(b-a)/2}\right) = e^{i(a+b)/2}\left(e^{i(a-b)/2}-e^{-i(a-b)/2}\right) = 2i\sin\frac{a-b}{2}e^{i(a+b)/2}.$$

Ceci permet notamment d'obtenir à peu de frais le module et un argument de $e^{ia}\pm e^{ib}$.

Cette astuce permet notamment de retrouver certaines formules de trigonométrie : si θ,θ' sont deux réels, alors $\cos\theta+\cos\theta'$ est la partie réelle de $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$. Mais

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{\frac{i\theta-\theta'}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}.$$

Mais la partie réelle du membre de droite est $2\cos\dfrac{\theta+\theta'}{2}\cos\dfrac{\theta-\theta'}{2}$ et donc

$$\cos\theta+\cos\theta' = 2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}.$$

Exemples 6.27 Application à la trigonométrie : linéarisation

► Linéarisons $\cos^4(\theta)$, c'est-à-dire essayons de l'écrire comme somme de fonctions de la forme $\theta\mapsto\cos(k\theta)$ ou $\theta\mapsto\sin(k\theta)$. On a

$$\begin{aligned}\cos^4\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^4\\ &= \frac{1}{16}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4+4\left(e^{i\theta}\right)^3e^{-i\theta}+6\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^2+4e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^3+\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(2\frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2}+8\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+6\right)\\ &= \frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Formule du binôme.

Cette écriture est particulièrement intéressante lorsqu'on cherche à déterminer une primitive de $\theta\mapsto\cos^4\theta$. Une telle primitive est par exemple

$$\theta\mapsto\frac{1}{32}\sin(4\theta)+\frac{1}{4}\sin(2\theta)+\frac{3\theta}{8}.$$

► De même, linéarisons $\sin^3\theta$:

$$\begin{aligned}\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\\ &= \frac{1}{-8i}\left(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{-8i}\left(2i\sin(3\theta)-6i\sin(\theta)\right)\\ &= \frac{3}{4}\sin(\theta)-\frac{1}{4}\sin(3\theta).\end{aligned}$$

Proposition 6.28 (Formule de Moivre) : *Soit $\theta\in\mathbf{R}$. Alors*

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta).$$

Démonstration.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

□

6.2.5 Exponentielle complexe

Définition 6.29 (Exponentielle complexe) – Si $z = a+ib$, on note e^z le complexe défini par $e^z = e^a e^{ib}$.

Remarque. Notons que dans cette définition, e^a désigne l'exponentielle du nombre réel a, c'est-à-dire celle dont nous avons l'habitude[7] et e^{ib} désigne $\cos b + i\sin b$.
L'écriture $e^z = e^a e^{ib}$ est donc la forme exponentielle de e^z, avec $|e^z| = e^a = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et où un argument de e^z est $\mathrm{Im}(z)$. Une conséquence immédiate en est que $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) \equiv \mathrm{Im}(z')\ [2\pi]$.
Donc si et seulement si z et z' diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$: $e^z = e^{z'}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z' = z + 2ik\pi$.

[7] La bijection réciproque de ln si vous préférez.

Proposition 6.30 :
1. *L'application $z \mapsto e^z$ est $2i\pi$-périodique : pour tout $z \in \mathbf{C}$, $e^{z+2i\pi} = e^z$.*
2. *$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.*

Démonstration. 1. Voir la remarque suivant la définition de l'exponentielle.
2. On a, par linéarité des parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned} e^{z+z'} &= e^{\mathrm{Re}(z+z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z+z')} = e^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z)+i\,\mathrm{Im}(z')} \\ &= e^{\mathrm{Re}(z)} e^{\mathrm{Re}(z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z')} \\ &= e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)} \times e^{\mathrm{Re}(z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z')} = e^z e^{z'}. \end{aligned}$$

□

⚠ On ne parlera pas de logarithme complexe, et je ne veux voir dans vos copies que des logarithmes de nombres réels strictement positifs.
Il est vrai que tout complexe non nul possède un antécédent par $z \mapsto e^z$, car si $z = re^{i\theta}$, alors $z = e^{\ln r} e^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$.
En revanche il n'y a pas unicité d'un tel antécédent (ils sont même en nombre infini par $2i\pi$-périodicité), et donc il n'y en a pas un qu'on aurait, plus que les autres, envie d'appeler le logarithme.

6.3 ÉQUATIONS POLYNOMIALES DANS C

L'un des principaux inconvénients[8] de $\mathbf{R}$ est l'absence de racine carrée pour les nombres négatifs : si $a \in \mathbf{R}_-$, l'équation $x^2 = a$ ne possède pas de solution réelle.
En revanche, elle possède deux solutions complexes, qui sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.
Mieux, nous allons voir dans la suite que tout nombre complexe possède des racines carrées, et que plus généralement, toute équation polynomiale de degré 2 à coefficients complexes possède des solutions complexes.

[8] Et c'est d'ailleurs historiquement ce qui a conduit à l'introduction des complexes.

Mieux
Nous verrons un peu plus tard que toute équation polynomiale, quel que soit son degré, admet des solutions dans **C**.

6.3.1 Racine carrée d'un nombre complexe

Définition 6.31 – Si $a \in \mathbf{C}$, et si $z \in \mathbf{C}$ est tel que $z^2 = a$, on dit que z est une racine carrée de a.

⚠ On prendra bien garde à dire **une** racine carrée de z et non **la** racine carrée de z.
En effet, si z est une racine carrée de a, alors $-z$ est aussi une racine carrée de a car

$(-z)^2 = (-1)^2 z^2 = z^2 = a$.
Il n'y a pas de raison de préférer l'une à l'autre, et donc aucune des deux ne mérite d'être **la** racine carrée de a.
En revanche, si z est un réel positif, alors des deux nombres $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, un seul des deux est positif, et c'est alors celui qu'on appelle la racine carrée de a.

Danger !
On n'utilisera jamais les notations $\sqrt{z}$ ou $z^{\frac{1}{2}}$ pour un complexe z, et on les réservera au cas où z est un réel positif.

Exemples 6.32

- Les deux nombres i et $-i$ sont des racines carrées de -1.
- On a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Et donc $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine carrée de i.
Son opposé est donc une autre racine carrée de i.

Proposition 6.33 : *Soit $a \in \mathbf{C}$. Alors a possède des racines carrées.*
Plus précisément : la seule racine carrée de 0 est 0, et si $a = re^{i\theta}$ est non nul, alors z possède exactement deux racines carrées qui sont $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -z_1$.

Démonstration. Il est évident que $z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
Si $a \neq 0$, considérons l'écriture exponentielle de a : $a = re^{i\theta}$.
Posons alors $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, de sorte que $z_1^2 = re^{i\theta} = a$.
On a alors, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$z^2 = a \Leftrightarrow z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z^2 - z_1^2 = 0 \Leftrightarrow (z - z_1)(z + z_1) = 0.$$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc $z^2 = a \Leftrightarrow z = z_1$ ou $z = -z_1$. □

Notons que ce qui précède n'est vraiment utile que si on connaît la forme exponentielle[9] de a, ce qui n'est pas toujours le cas.
Si on ne dispose que de la forme algébrique de a : $a = c + id$, cherchons les racines carrées de a également sous forme algébrique : $z = C + iD$.
On a alors $z^2 = (C^2 - D^2) + 2iCD$. Pour déterminer C et D tels que $z^2 = a$, on utilise alors :

- l'égalité des parties réelles : $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(a) \Leftrightarrow C^2 - D^2 = c$
- l'égalité des parties imaginaires : $\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(a) \Leftrightarrow 2CD = d$
- l'égalité des modules $|z|^2 = |a| \Leftrightarrow C^2 + D^2 = \sqrt{c^2 + d^2}$.

En ajoutant et soustrayant la première et la dernière équation, on obtient les valeurs de C^2 et D^2. Ce qui nous donne 2 valeurs pour C et 2 valeurs pour D, soit 4 couples (C, D) possibles.
Mais CD doit être du signe de d, ce qui ne nous laisse donc plus que deux couples (C, D) possibles, qui sont donc les deux racines carrées de a.

[9] Et donc un argument.

Exemple 6.34

Cherchons les racines carrées de $-8 + 6i$, sous la forme $z = a + ib$.
On a $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$.
On a donc $z^2 = -8 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10 \\ 2ab = 6 \end{cases}$
En ajoutant les deux premières équations, il vient $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$ et en soustrayant les deux premières équations, il vient $b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$.
Enfin, on a $ab = 3$, et donc a et b doivent être de même signe.
Ainsi, $z_1 = 1 + 3i$ et $z_2 = -1 - 3i$ sont les deux racines complexes de $-8 + 6i$.

Remarque
Si on oublie l'égalité des modules, il ne reste qu'un système de deux équations à deux inconnues, qui, bien que correct, est bien plus difficile à résoudre.

6.3.2 Équations de degré 2 à coefficients complexes

Théorème 6.35 : *Soient a, b, c trois complexes avec $a \neq 0$, soit $\Delta = b^2 - 4ac$, et soit δ une racine carrée de Δ.*

1. *Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède une unique solution dans $\mathbf{C}$ qui est $z = -\dfrac{b}{2a}$.*
   Dans ce cas, on a la factorisation suivante :
$$\forall z \in \mathbf{C},\ az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2.$$
2. *Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions complexes qui sont $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$. Dans ce cas,*
$$\forall z \in \mathbf{C},\ az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Terminologie
Δ est appelé le **discriminant** de l'équation.

Terminologie
On dit alors que $-\frac{b}{2a}$ est une racine **double** du polynôme $az^2 + bz + c$.

Démonstration. Notons qu'on a toujours

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right). \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Méthode
Cette étape est la mise sous forme canonique d'un polynôme de degré 2, qu'il est bon de savoir refaire. Rappelons que la méthode est simple : il s'agit de «trouver» le bon λ de sorte que les termes en z^2 et en z soient ceux qui apparaissent en développant $(z+\lambda)^2$.

Identité remarquable.

Et donc

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} = 0 \text{ ou } z = z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b-\delta}{2a}.
\end{aligned}$$

Si $\Delta = 0$, alors ces deux nombres sont confondus, et sinon, ils sont distincts.
Dans les deux cas, les factorisations annoncées découlent directement de $(\star)$. □

Remarque. Dans les deux cas, nous avons factorisé $az^2 + bz + c$ en produit de deux termes de degré 1, éventuellement confondus dans le cas où $\Delta = 0$.
On dit alors que $-\dfrac{b}{2a}$ est une racine double de $az^2 + bz + c$ car le facteur $z + \dfrac{b}{2a}$ apparaît deux fois dans la factorisation de $az^2 + bz + c$.

Exemple 6.36

Résolvons l'équation $z^2 + (-3+i)z + 4 - 3i = 0$.
On a $\Delta = (-3+i)^2 - 4(4-3i) = 8 - 6i - 16 + 12i = -8 + 6i$.
Nous avons alors prouvé précédemment qu'on pouvait prendre $\delta = 1 + 3i$.

Choix de δ
Il y a deux choix possibles pour δ, mais bien entendu, ces deux choix conduisent aux mêmes solutions.

Et donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{3-i+\delta}{2} = 2+i \text{ et } z_2 = \frac{3-i-\delta}{2} = 1-2i.$$

Corollaire 6.37 – *Si a, b, c sont trois réels avec $a \neq 0$, alors l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ possède :*

- *deux solutions réelles qui sont $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$*
- *une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$*
- *deux solutions complexes conjuguées si $\Delta < 0$, qui sont*

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration. Cela découle du théorème précédent, en notant que $\Delta \in \mathbf{R}$.

- si $\Delta = 0$, il n'y a rien à dire.
- Si $\Delta > 0$, alors on peut prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$, et les deux solutions obtenues sont alors des réels.
- Si $\Delta < 0$, alors on peut prendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$, et on remarque alors que les deux solutions sont conjuguées, puisqu'elles ont même partie réelle $\dfrac{-b}{2a}$.

□

Exemple 6.38 **Un cas important**

Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Intéressons nous à l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
Alors $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4\left(\cos^2\theta - 1\right) = -4\sin^2\theta < 0$.
On peut donc prendre $\delta = 2i\sin\theta$. Donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = e^{-i\theta}.$$

Exercice

Pour quelle(s) valeurs(s) de θ ces solutions sont-elles réelles ?

Proposition 6.39 (Relations racines-coefficients) : *Soient a, b, c trois complexes avec $a \neq 0$, et soient z_1, z_2 les deux solutions, éventuellement confondues[10] de l'équation $az^2+bz+c=0$. Alors*

$$z_1z_2 = \frac{c}{a} \text{ et } z_1+z_2 = -\frac{b}{a}.$$

[10] Si $\Delta = 0$.

Démonstration. Nous savons déjà que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$.
En développant, il vient donc

$$az^2+bz+c = a\left(z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2\right) = az^2 - a(z_1+z_2)z + az_1z_2.$$

Pour $z=0$, il vient donc $c = az_1z_2 \Leftrightarrow z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$.
Et pour $z=1$, on obtient

$$a+b+c = a - a(z_1+z_2) + az_1z_2 \Leftrightarrow b = -a(z_1+z_2).$$

□

Remarque

Plutôt que de prendre successivement $z=0$ et $z=1$, on pourrait arguer que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. Mais ce résultat, qui a été admis en terminale, sera prouvé un peu plus tard dans l'année.

Ces relations, liant les racines du polynôme az^2+bz+c à ses coefficients[11] seront largement généralisées plus tard dans l'année.
Une application classique est la résolution d'un certain type de systèmes non linéaires de deux équations à deux inconnues :

[11] a, b et c.

Exemple 6.40 **Système somme-produit**

Soit le système $\begin{cases} xy = -1+i \\ x+y = 1+2i \end{cases}$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{C}^2$.
Si x et y sont les deux solutions[12] de $z^2 - (1+2i)z + (-1+i) = 0$, alors par la question précédente, (x, y) est solution du système.
Inversement, si (x, y) est une solution du système, alors x et y sont les seules solutions de

$$(z-x)(z-y) = 0 \Leftrightarrow z^2 - (x+y)z + xy = 0 \Leftrightarrow z^2 - (1+2i)z + (-1+y) = 0.$$

Autrement dit, nous venons de prouver que (x, y) est solution du système si et seulement si x et y sont les solutions de $z^2 - (1+2i))z + (-1+i) = 0$.
Le discriminant de cette dernière équation est alors $\Delta = (1+2i)^2 + 4(1-i) = 1$, et donc les deux solutions de cette équation sont $x_1 = \dfrac{1+2i-1}{2} = i$ et $x_2 = 1+i$.
Et donc les deux solutions du système sont $(i, 1+i)$ et $(1+i, i)$.

[12] Éventuellement confondues.

Sur le même principe, on prouve que les solutions du système $\begin{cases} x+y = s \\ xy = p \end{cases}$ sont les couples formés des deux solutions[13] de $z^2 - sz + p = 0$.

[13] Confondues si $\Delta = 0$.

Remarque. Il existe une manière plus synthétique[14] de dire que «(x, y) est solution du système si et seulement si x et y sont les deux solutions (éventuellement confondues) de $z^2 - sz + p = 0$» qui est le suivant :
«Un couple (x, y) est solution de $\begin{cases} x+y = z \\ xy = p \end{cases}$ si et seulement si $\{x, y\}$ est l'ensemble des solutions de $z^2 - sz + p = 0$.»

[14] Je dirais même plus esthétique.

6.3.3 Racines $n^{\text{èmes}}$

Définition 6.41 – Soit $z \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On dit que z est une **racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité** si $z^n = 1$.
On note $\mathbf{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité : $\mathbf{U}_n = \{z \in \mathbf{C},\ z^n = 1\}$.

Exemples 6.42

- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, donc i est une racine $4^{\text{ème}}$ de l'unité.
  C'est aussi une racine $8^{\text{ème}}$ de l'unité puisque $i^8 = \left(i^4\right)^2 = 1^2 = 1$.
- $e^{\frac{5i\pi}{6}}$ est une racine $12^{\text{ème}}$ de l'unité, puisque $\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^{12} = e^{10i\pi} = 1$.

Plus généralement
Si $z \in \mathbf{U}_n$ et si n divise m, alors $z \in \mathbf{U}_m$.

Proposition 6.43 (Caractérisation des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité) : *Soit $z \in \mathbf{C}$, et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $z \in \mathbf{U}_n$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.*

Démonstration. Notons $z = re^{i\theta}$. Alors $z^n = r^n e^{in\theta}$.
Et donc $z^n = 1 \Leftrightarrow z^n = 1e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta \equiv 0 \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv 0 \quad \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$
En particulier, la seconde condition est équivalente au fait qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$.
Et donc $z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z},\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

□

Remarque. Ceci prouve en particulier qu'une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité est de module 1 et donc que $\mathbf{U}_n \subset \mathbf{U}$.

N'en déduisons pas trop vite qu'il existe une infinité de racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité : on a $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$ si et seulement si $\dfrac{2k\pi}{n} \equiv \dfrac{2k'\pi}{n} \quad [2\pi]$.
En revanche, si k et k' sont dans $[\![0, n-1]\!]$, alors $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$ si et seulement si $k = k'$.
Et donc nous pouvons raffiner la proposition précédente de la manière suivante :

> **Corollaire 6.44 –** *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors il existe exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, qui sont $1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$.*
> *Autrement dit, $\mathbf{U}_n = \{\zeta^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$ où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.*

Géométriquement, les éléments de $\mathbf{U}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique, et qui passe par 1.

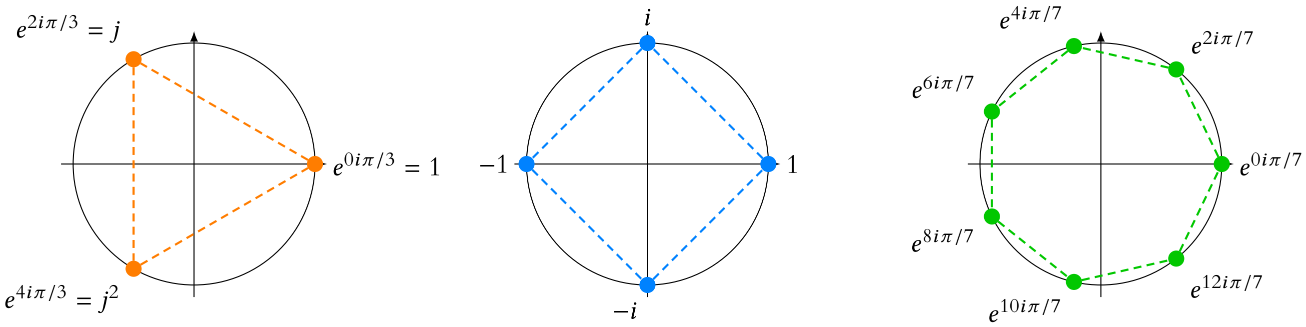


FIGURE 6.3 – Les éléments de $\mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4$ et $\mathbf{U}_7$.

Exemple 6.45 Racines cubiques de l'unité

Les éléments de $\mathbf{U}_3$, c'est-à-dire les racines cubiques de l'unité sont 1, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$.
On a alors $e^{2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, que l'on note généralement j.
Et alors $e^{4i\pi/3} = \overline{j} = j^2$. Autrement dit, $\mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{1, j, \overline{j}\}$.

Physiciens !
Les physiciens ont l'habitude de noter j ce que l'on note i (car i désigne déjà l'intensité). À ma connaissance, ils n'ont pas de notation standard pour ce que nous appellerons j.

> **Proposition 6.46 :** *Soit $n \geqslant 2$. Alors $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbf{U}_n} \omega = 0$.*
>
> *Autrement dit, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$.*

Démonstration. Le passage de la première somme à la seconde est immédiat puisque $\mathbf{U}_n = \{\zeta^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$ où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Mais on a alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta)^k = \frac{1-(\zeta)^n}{1-\zeta} = \frac{1-1}{1-\zeta} = 0.$$

□

Détails
Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\zeta \neq 1$.

Et si $a = 0$?
Si $a = 0$, il est évident que 0 est l'unique solution de $z^n = a$.

> **Proposition 6.47 :** *Soit $a \in \mathbf{C}^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :*
> 1. *si $a = re^{i\theta}$, avec $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, alors $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de a.*
> 2. *a possède exactement n racines $n^{\text{èmes}}$. Si a_0 est l'une d'entre elles, alors les racines $n^{\text{èmes}}$ de a sont les $a_0 \times \omega$, $\omega \in \mathbf{U}_n$.*

Démonstration. 1) Il est immédiat que que $\left(\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = re^{i\theta} = a$.
2) Soit a_0 une[15] racine $n^{\text{ème}}$ de a. Alors pour $z \in \mathbf{C}$, on a

$$z^n = a \Leftrightarrow z^n = a_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a_0}\right)^n = 1.$$

Donc z est une racine $n^{\text{ème}}$ de a si et seulement si $\frac{z}{b}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité. Soit si et seulement si il existe $\omega \in \mathbf{U}_n$ tel que $z = a_0\omega$.
Puisqu'il existe exactement n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, on obtient ainsi n racines $n^{\text{èmes}}$ de a. □

[15] Et il en existe par le point 1).

⚠ La notation $\sqrt[n]{z}$ est totalement interdite si z n'est pas un réel[16], puisqu'on ne saurait pas laquelle des n racines de z cela désigne.

[16] Et même un réel positif dans le cas où n est pair.

Exemple 6.48

Cherchons les racines $5^{\text{èmes}}$ de $a = 9 - i3\sqrt{3}$.
On a $|a| = \sqrt{81+27} = \sqrt{108} = \sqrt{4\times 27} = 6\sqrt{3}$.
Donc $a = 6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 6\sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Et donc les racines $5^{\text{èmes}}$ de a sont les $\sqrt[5]{6\sqrt{3}}e^{i\left(\frac{2\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$, $k \in [\![0,4]\!]$.

6.4 Application des complexes à l'étude de transformations géométriques

Dans cette partie, on munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
On rappelle qu'alors à tout point du plan correspond un unique complexe et vice-versa.
Alors à toute transformation du plan correspond une unique application $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. En effet, si $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est une transformation géométrique[17] du plan, on peut lui associer la fonction de $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui à $z \in \mathbf{C}$ associe l'affixe du point $f(M)$, où M a pour affixe z.
Et inversement, à $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, on peut associer la transformation qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $g(z)$.

[17] Une rotation, une symétrie axiale ou centrale, une translation, etc

6.4.1 Interprétation du module et de l'argument

L'interprétation d'un module comme une distance est bien connue, mais reprouvons la :

Proposition 6.49 : *Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.*
Alors $|z_A - z_B|$ est la distance AB.

Démonstration. Notons $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$ les formes algébriques respectives de z_A et z_B.
Alors $|z_A - z_B| = \sqrt{(x_A-x_B)^2 + (y_A-y_B)^2} = AB$. □

Proposition 6.50 : *Soient A, B, C, D quatre points du plan d'affixes respectives a, b, c et d. Alors tout argument du complexe $\frac{b-a}{d-c}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$.*

Démonstration. Notons $b - a = r_1e^{i\theta_1}$ et $d - c = r_2e^{i\theta_2}$.
Nous savons alors que $\theta_1 \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) \quad [2\pi]$ et $\theta_2 \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{CD}\right) \quad [2\pi]$.
Or, $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\frac{b-a}{d-c} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.
Et donc $\theta_1 - \theta_2 \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \vec{i}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right) \quad [2\pi]$.

Et puisque tous les autre arguments de $\dfrac{b-a}{d-c}$ sont congrus à $\theta_1 - \theta_2$ modulo 2π, tous sont des mesures de $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right)$. □

Corollaire 6.51 – *Avec les notations précédentes,*

- *les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{b-a}{c-a}$ est un réel.*
- *les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{b-a}{d-c} \in i\mathbf{R}$.*

Démonstration. ▸ Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv 0 \quad [\pi]$.
Mais un complexe possède 0 comme argument si et seulement si c'est un réel positif, et il possède π comme argument si et seulement si c'est un réel négatif.
Et donc $\dfrac{b-a}{c-a}$ est réel si et seulement si ses arguments sont congrus à 0 modulo π.
▸ De même, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
Soit si et seulement si un argument de $\dfrac{b-a}{d-c}$ est $\pm\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
Soit si et seulement si $\dfrac{b-a}{d-c}$ est imaginaire pur. □

Plus précisément
Cet angle est nul si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, et est égal à π si ils sont de sens opposés.

Exemple 6.52 Formule d'Al-Kashi (ou loi des cosinus)

Soient A, B, C trois points distincts d'affixes respectives a, b, c.
Notons $u = b - a$, $v = b - c$ et $w = c - a$.
Alors $u = v + w$, et donc

$$\begin{aligned} |u|^2 = |v+w|^2 &= (v+w)(\overline{v}+\overline{w}) \\ &= v\overline{v} + w\overline{w} - \overline{v}w - v\overline{w} \\ &= |v|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(v\overline{w}). \end{aligned}$$

Notons $\theta = \arg(v\overline{w}) \equiv \arg(\overline{w}) + \arg(v) \equiv \arg\left(\dfrac{v}{w}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{b-c}{c-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$.
Et donc $\operatorname{Re}(v\overline{w}) = |v\overline{w}|\cos\theta = |v||w|\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

Il vient donc $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cos\left(\widehat{BCA}\right)$.
Nous retrouvons donc la célèbre formule d'Al-Kashi[18].

Orientation
Puisque nous ne voyons l'angle ici qu'à travers son cosinus, il n'est pas utile de l'orienter (car le cosinus est pair).

[18] Qui implique entre autres Pythagore et sa réciproque.

6.4.2 Transformations géométriques

Définition 6.53 – Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle **translation de vecteur** $\vec{u}$ l'application qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Proposition 6.54 : *Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe a. Alors la fonction associée à la translation de vecteur $\vec{u}$ est* $f_a : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z+a \end{array}\right.$.

Démonstration. Il s'agit de remarquer que si $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives z_1 et z_2, alors $z_1 + z_2$ est l'affixe de $\vec{v_1} + \vec{v_2}$.
Donc si M est le point d'affixe z, $\overrightarrow{OM}$ possède pour affixe z. Et donc l'image M' de M par la

translation de vecteur $\vec{u}$ est tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$.
Donc $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe $z + a$. Mais l'affixe de M' est égale à celle de $\overrightarrow{OM'}$. □

Définition 6.55 – Soit A un point du plan, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle **homothétie de rapport λ et de centre A** l'application qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$.

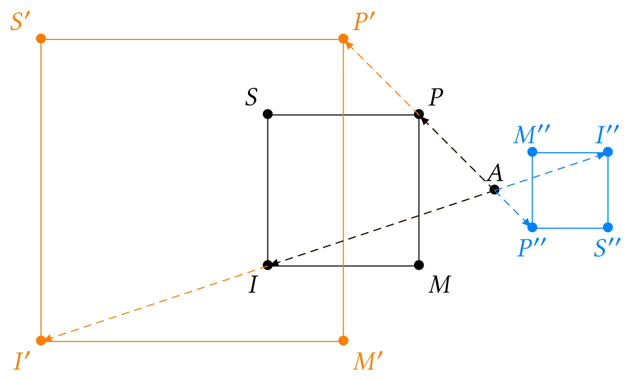


FIGURE 6.4 – En orange, l'image du carré $MPSI$ par l'homothétie de centre A et de rapport 2. En bleu, l'image de $MPSI$ par l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

Remarque. Une homothétie de rapport différent de 1 possède un unique point fixe, qui est son centre.
Une homothétie de rapport 1 est aussi la translation de vecteur nul.

Proposition 6.56 : *Soit A un point du plan d'affixe a et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors la fonction associée à l'homothétie de centre A et de rapport λ est* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \lambda(z-a)+a \end{array} \right.$.

Démonstration. Soit M' le point d'affixe $a + \lambda(z - a)$.
Alors $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $\lambda(z - a)$, qui est l'affixe de $\lambda\overrightarrow{AM}$.
Et donc $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$, de sorte que M' est bien l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport λ. □

Définition 6.57 – Soit Ω un point du plan, et soit $\theta \in \mathbf{R}$. On appelle **rotation de centre Ω et d'angle θ** l'application qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$.

Remarque. Une rotation d'angle $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$ possède un unique point fixe qui est son centre.
Une rotation d'angle congru à 0 modulo 2π est la translation de vecteur nul.
Une rotation d'angle π est une homothétie de même centre et de rapport -1.

Proposition 6.58 : *Soit Ω un point du plan d'affixe ω et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors la fonction associée à la rotation de centre Ω et d'angle θ est* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array} \right.$.

Démonstration. Soit M un point d'affixe z, et soit M' l'image de $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$. Alors

$$\Omega M' = \left|e^{i\theta}(z-\omega)\right| = |z-\omega| = \Omega M.$$

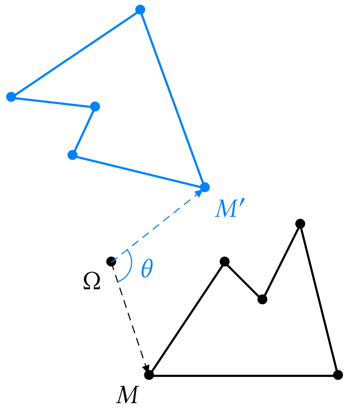


FIGURE 6.5 – Une rotation.

Et

$$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg \frac{z'-\omega}{z-\omega} \equiv \arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \theta \quad [2\pi].$$

□

Il est assez facile de se convaincre[19] qu'une rotation conserve les angles et les distances, et qu'une homothétie préserve les angles et les rapports de distances, c'est-à-dire que toutes les distances sont multipliées par une même constante (qui est le rapport de l'homothétie).

[19] Et c'est un bon exercice que de le faire.

6.4.3 Similitudes directes

Définition 6.59 – Soit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ une transformation du plan.
On dit que f est une **similitude directe** si :

- elle envoie deux points distincts sur deux points distincts :

$$\forall (M,N) \in \mathscr{P}^2,\ M \neq N \Rightarrow f(M) \neq f(N).$$

- elle préserve les rapports de distances : $\forall (M,N,P,Q) \in \mathscr{P}^4$:

$$\frac{f(M)f(N)}{f(P)f(Q)} = \frac{MN}{PQ}.$$

- elle préserve les angles orientés :

$$\forall (M,N,P,Q) \in \mathscr{P}^4,\ \left(\overrightarrow{f(M)f(N)}, \overrightarrow{f(P)f(Q)}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}\right).$$

Proposition 6.60 : *Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Alors la transformation du plan associée à f est une similitude directe si et seulement si f est une fonction affine non constante, c'est-à-dire si et seulement si il existe deux complexes $(a,b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) = az + b$.*

Démonstration. Supposons que la transformation associée à f soit une similitude directe, et soit $z \in \mathbf{C}$.
Notons M le point d'affixe z, A le point d'affixe 1 et O le point d'affixe 0.
Alors $|z| = \left|\frac{z-0}{1-0}\right| = \frac{OM}{OA}$, et $\arg\left(\frac{z-0}{z-1}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$.
Notons alors M', A' et O' le point d'affixes respectives $f(z), f(1)$ et $f(0)$.
Puisque f conserve les rapports de distances, $\left|\frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}\right| = \frac{O'M'}{O'A'} = \frac{OM}{OA} = |z|$.

Et puisque f conserve les angles, pour $z \neq 0$,

$$\arg\left(\frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}\right) = \left(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg(z).$$

Et donc les complexes, $\dfrac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}$ ont mêmes modules et mêmes arguments : ils sont égaux.
Ainsi, $f(z) = z(f(1)-f(0)) + f(0)$.
Ceci étant valable pour tout $z \in \mathbf{C}$, f est bien une fonction affine.
Notons que puisque f préserve les rapports de distances, deux points distincts ne peuvent avoir même image, donc $f(1) - f(0) \neq 0$.

Inversement, soient $(a,b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$, et soit $f : z \mapsto az+b$.
Puisque $a \neq 0$, deux points distincts sont toujours d'image distincte.
Et pour M,N,P,Q quatre points d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4, et d'images respectives M', N', P', Q', on a

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_3)-f(z_4)} = \frac{az_1+b-az_2-b}{az_3+b-az_4-b} = \frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}.$$

Donc par identification des modules et des arguments,

$$\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ} \text{ et } \left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}\right).$$

Et donc la transformation associée à f est une similitude directe.

□

Corollaire 6.61 – ► *La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.*
► *Les translations, rotations et homothéties sont des similitudes directes.*

Démonstration. ► Si $f : z \mapsto az+b$ et $g : z \mapsto cz+d$ sont deux similitudes, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, alors $g \circ f : z \mapsto c(az+b)+d = acz + (bc+d)$ est encore une fonction affine avec $ac \neq 0$, donc $g \circ f$ est encore une similitude directe.
► Pour le second point, il suffit de constater que les expressions complexes données pour les translations, rotations et homothéties sont toutes des fonctions polynomiales de degré 1 en z. □

Remarque. Le premier point aurait pu se prouver directement à l'aide de la définition d'une similitude directe.

Proposition 6.62 : *Soit Ω un point du plan, soit r une rotation de centre Ω et d'angle θ, et soit h une homothétie de centre Ω et de rapport λ. Alors $r \circ h = h \circ r$.*
L'application $r \circ h$ est alors appelée ***la similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ.***

Autrement dit

L'ordre dans lequel on effectue les deux transformations n'est pas important.

Démonstration. Prouvons le résultat sur les fonctions associées (que nous noterons[20] encore r et h). Soit z un complexe. Alors $h(z) = \omega + \lambda(z-\omega)$ et donc

$$r(h(z)) = \omega + e^{i\theta}\left(\lambda(z-\omega)+\omega) - \omega\right) = \omega + \lambda e^{i\theta}(z-\omega).$$

De même, $r(z) = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$, et donc

$$h(r(z))\omega + \lambda\left(e^{i\theta}(z-\omega)+\omega-\omega\right) = \omega + \lambda e^{i\theta}(z-\omega) = r(h(z)).$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbf{C}$, $h \circ r = r \circ h$. □

[20] Abusivement.

Remarques. ► Notons que la preuve ci-dessus nous donne la forme complexe de $r \circ h$: c'est $z \mapsto \lambda e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.
► Il n'y a pas unicité de λ et θ. En particulier, on vérifiera qu'une similitude d'angle θ et de rapport λ est égale à la similitude de même centre, d'angle $\theta+\pi$ et de rapport $-\lambda$.
L'idée étant qu'une homothétie de rapport -1 est également une rotation d'angle π.

Nous pouvons à présent classifier complètement les similitudes directes :

Proposition 6.63 : *Soit $f : z \mapsto az+b$ une similitude directe. Alors :*

1. *soit f est une translation, ce qui se produit si et seulement si $a = 1$*
2. *soit f possède un unique point fixe Ω. Dans ce cas, f est la similitude directe de centre Ω, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.*

Points fixes
Cette proposition donne une méthode pour déterminer le centre d'une similitude directe qui n'est pas une translation : c'est son unique point fixe.
Notons qu'une translation possède soit aucun point fixe, soit une infinité (dans le cas de l'identité, qui est la translation de vecteur nul), mais jamais un unique.

Démonstration. ► Si $a = 1$, alors $f : z \mapsto z+b$ est la translation de vecteur d'affixe b.
► Si $a \neq -1$, alors un complexe z est un point fixe de f si et seulement si $f(z) = z \Leftrightarrow az+b = z \Leftrightarrow z = -\frac{b}{a-1}$.
Donc f possède bien un unique point fixe. Notons Ω ce point, et notons h l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$, et soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$.
Alors les formules obtenues pour $h \circ r$ dans la preuve de la proposition précédente prouvent que pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$(h \circ r)(z) = -\frac{b}{a-1} + \underbrace{|a|e^{i\arg(a)}}_{=a}\left(z + \frac{b}{a-1}\right) = az + \frac{ab-b}{a-1} = az+b = f(z).$$

Et donc f est bien de la forme indiquée. □

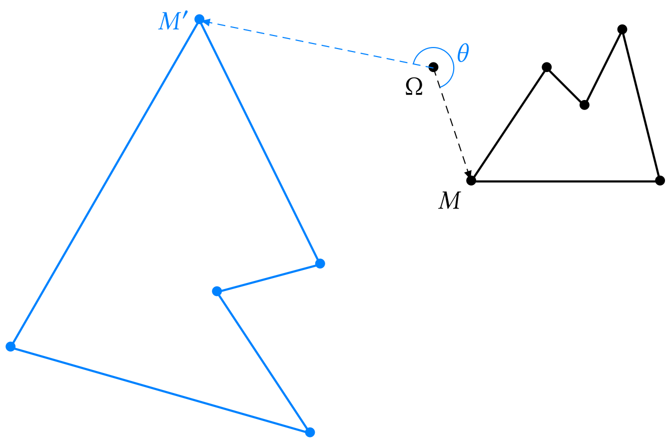


FIGURE 6.6 – Une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

Exemple 6.64

Caractérisons la transformation T du plan associée à $f : z \mapsto (2i+1)z-1$.
C'est une similitude directe par ce qui précède.
Son centre est l'unique point fixe de f, et on a $f(z) = z \Leftrightarrow z = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$.
De plus, son rapport est $|2i+1| = \sqrt{5}$, et son angle est $\arg(2i+1) = \operatorname{Arctan}(2)$. Ainsi, T est la similitude directe de centre $(1,2)$, de rapport $\sqrt{5}$ et d'angle $\operatorname{Arctan} 2$.

Il existe aussi des transformations appelées similitude indirectes, qui sont les composées des similitudes directes par une symétrie axiale. Elles transforment les angles en angles opposés. On peut prouver que ce sont les transformations associées aux fonctions de la forme $z \mapsto a\bar{z}+b$. Leur étude générale est hors programme.

Plus généralement, on appelle similitude toute transformation qui préserve les rapports de distance, et on peut prouver qu'alors il s'agit soit d'une similitude directe soit d'une similitude indirecte.

HORS PROGRAMME : CONSTRUCTION DU CORPS C

Expliquons rapidement comment définir concrètement $\mathbf{C}$ (il s'agit là d'une définition parmi d'autres possibles, bien que toutes soient équivalentes).

Il suffit de définir $\mathbf{C}$ comme étant l'ensemble $\mathbf{R}^2$ des couples de deux réels, l'idée étant qu'un complexe $z = a + ib$ est entièrement défini par le couple (a, b).
Pour $x \in \mathbf{R}$, on confond alors x et le complexe $(x, 0)$, de sorte que $\mathbf{R}$ est identifié à $\{(x, 0),\ x \in \mathbf{R}\}$, et donc que $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
Il faut alors définir ce que sont l'addition et la multiplication de deux couples de réels. Si $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ sont deux éléments de $\mathbf{C}$, posons

- $z + z' = (x + x', y + y')$
- $z \times z' = (xx' - yy', xy' + x'y)$

Ceci est bien compatible avec les opérations existant sur les réels, au sens où si x et x' sont deux réels, alors $x + x'$ désigne le même objet, qu'on voit x et x' comme de «vrais» réels ou comme les couples $(x, 0)$ et $(x', 0)$.
On vérifie alors que

1. $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$, $z + z' = z' + z$ (commutativité de l'addition)
2. $\forall z, z', z'' \in \mathbf{C}^3$, $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ (associativité de l'addition)
3. $\forall z \in \mathbf{C}$, $z + 0 = 0 + z = z$ (0 est élément neutre pour l'addition)
4. $\forall z \in \mathbf{C}$, $\exists ! z' \in \mathbf{C}$, $z + z' = z' + z = 0$ (existence d'un inverse pour l'addition)
5. $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$, $zz' = z'z$ (commutativité de la multiplication)
6. $\forall (z, z', z'') \in \mathbf{C}^3$, $z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$ (associativité de la multiplication)
7. $\forall z \in \mathbf{C}$, $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$ (existence d'un élément neutre pour la multiplication)
8. $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $\exists z \in \mathbf{C}$, $zz' = z'z = 1$ (existence d'un inverse pour la multiplication)
9. $\forall (z, z', z'') \in \mathbf{C}^3$, $(z + z') \cdot z'' = z \cdot z'' + z \cdot z'$ (distributivité de la multiplication sur l'addition).

Nous rencontrerons de nouveau ces neuf propriétés plus tard, elles donnent à $\mathbf{C}$ le droit de prétendre au titre de **corps (commutatif)** sur lequel nous reviendrons plus tard, et qui sera d'une importance capitale en algèbre linéaire.
Il n'aura probablement pas échappé à votre sagacité que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$ vérifient aussi ces neuf propriétés (et donc sont également des corps commutatifs).
La preuve de toutes ces propriétés est **très** rébarbative, donnons en quelques unes à titre d'exemple, les autres sont laissées comme exercices.

Démonstration. 1. Soient $z, z' \in \mathbf{C}$. Il existe alors quatre réels a, b, a' et b' tels que $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$.
Alors $z + z' = (a + a', b + b')$, et $z' + z = (a' + a, b' + b)$.
Mais la somme de deux réels ne dépend pas du sens dans lequel on effectue la somme[21] donc $z + z' = (a + a', b + b') = (a' + a, b' + b) = z' + z$.
4. Soit $z = (a, b) \in \mathbf{C}$.
Alors en posant $z' = (-a, -b)$, il vient $z + z' = (a, b) + (-a, -b) = (0, 0) = 0$.
Et par commutativité de l'addition (point 1.), on a aussi $z' + z = 0$.
8. Soit $z = (a, b) \in \mathbf{C}$. Soit alors $z' = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$. Alors

$$zz' = \left(a\frac{a}{a^2 + b^2} - b\frac{-b}{a^2 + b^2}, b\frac{a}{a^2 + b^2} + a\frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0) = 1.$$

□

[21] L'addition de réels est commutative.

Déjà vu ?
Avez-vous reconnu ce z' ? Pensez à l'inverse d'un complexe tel que vous le e connaissez.

Reste tout de même à se convaincre que $\mathbf{C}$ ainsi défini est bien l'ensemble dont nous avons l'habitude... Notons alors $i = (0, 1)$, de sorte que $z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$.

On vérifie alors aisément que $i^2 = (0,1) \times (0,1) = (0^2 - 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1,0) = -1$, et plus généralement, que

$$(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y') \text{ et } (x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+x'y).$$

Autrement dit que nous retrouvons bien les opérations auxquelles nous sommes habitués, et à partir desquelles nous avons construit tout le chapitre.
Insistons bien sur le fait que ce n'est en aucun cas une coïncidence : nous avons délibérément défini l'addition et la multiplication sur $\mathbf{R}^2$ pour qu'elles correspondent à celles dont nous avons l'habitude !