# 9 Applications, relations

## 9.1 Retour sur la notion d'application

Dans cette partie, nous poursuivons l'étude de la notion d'application entre ensembles définie au chapitre 3.

### 9.1.1 Image directe, image réciproque

**Définition 9.1 –** Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$, et soit $A \subset E$. On appelle **image directe** de $A$ par $f$ et on note $f(A)$ la partie de $F$ définie par

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\}.$$

**Rédaction** ✎
Quand on souhaite prendre un élément dans $f(A)$, la rédaction n'est surtout pas «soit $f(x) \in f(A)$», mais «soit $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$».

L'image directe de $A$ est donc l'ensemble des éléments de $F$ qui possèdent au moins un antécédent **dans** $A$. C'est également l'ensemble des images de tous les éléments de $A$.

On

**Exemples 9.2**

- Si $f : \left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & x^2+1\end{array}\right.$, alors $f(\mathbf{R}) = f([0, +\infty[) = f(]-\infty, 0]) = [1, +\infty[$ et $f(]-3, 2[) = [1, 10[$.
- $\sin(\mathbf{R}) = [-1, 1]$ et $\mathrm{Arctan}([0, +\infty[) = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
- L'image de $\mathbf{R}$ par la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est $\mathbf{U}$.
En revanche, l'image de $\mathbf{C}$ par la même application est $\mathbf{C}^*$. En effet, si $z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}^*$, alors $r \neq 0$ et donc $z = e^{\ln r + i\theta}$ est bien dans l'image de l'exponentielle.
- On a toujours $f(\emptyset) = \emptyset$, et si $A \neq \emptyset$, alors $f(A) \neq \emptyset$. En effet, dans ce cas, $A$ contient au moins un élément $x$, et donc $f(A)$ contient au moins l'élément $f(x)$.

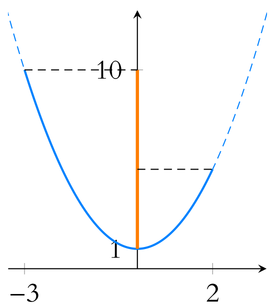


Figure 9.1– L'image (en orange) de $[-3, 2]$ par $x \mapsto x^2 + 1$.

**Définition 9.3 –** Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$. On appelle alors **image de** $f$ et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble $f(E)$.
On a donc $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$.

Pour le dire autrement, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des éléments de $F$ qui admettent au moins un antécédent par $f$.

**Définition 9.4 –** Soit $f \in \mathscr{F}(E, F)$, et soit $B \subset F$. On appelle **image réciproque de** $B$ **par** $f$ la partie de $E$ définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

⚠ **Attention !**
On ne peut considérer que l'image réciproque d'une partie de $F$ (l'ensemble d'arrivée de $f$), et cette image réciproque est une partie de $E$ (l'ensemble de départ).

⚠ La notation $f^{-1}(B)$, bien qu'étant celle que tout le monde utilise est source de confusion : la fonction s'appelle toujours $f$, et il n'y a pas nécessairement d'application nommée $f^{-1}$ derrière cette notation.

Toutefois, il se peut qu'un tel $f^{-1}$ existe[1], et alors comment savoir si $f^{-1}(B)$ désigne l'image réciproque de $B$ par $f$ ou l'image directe de $B$ par $f^{-1}$ ?
Bonne nouvelle, il s'agit de la même chose comme nous le prouverons plus loin.

[1] Cf. ci-dessous, mais vous connaissez déjà la notion de bijection pour les fonctions définies sur (une partie de) $\mathbf{R}$.

**Exemples 9.5**

Si $f : A \to \mathbf{R}$, où $A$ est une partie de $\mathbf{R}$, alors déterminer l'image réciproque d'un singleton $\{y\}$, c'est trouver l'ensemble des solutions à l'équation $y = f(x)$.
De même, déterminer l'image réciproque d'un intervalle $[a, b]$, c'est résoudre l'inéquation $a \leqslant f(x) \leqslant b$, d'inconnue $x \in A$.

Contrairement à l'image directe, on peut avoir $f^{-1}(B) = \emptyset$ sans que $B$ soit vide.
Par exemple, pour la fonction $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on a $\sin^{-1}([3, 4]) = \emptyset$.

**Exercice**
Prouver que $f^{-1}(B) = \emptyset$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \cap B = \emptyset$.

## 9.1.2 Restriction, prolongements

La notion de restriction a déjà été rencontrée pour les fonctions numériques, elle est encore valable pour n'importe quelle application :

**Définition 9.6 –** Soit $f : E \to F$ et soit $A$ une partie de $E$. On appelle **restriction de $f$ à $A$** l'application $f_{|A} : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.
Autrement dit, $f_{|A}$ n'est rien d'autre que l'application $f$, mais vue comme une application définie sur $A$ uniquement.

**Définition 9.7 –** Soit $f : E \to F$ et soit $E'$ un ensemble tel que $E \subset E'$. On appelle **prolongement de $f$ à $E'$** toute application $g : E' \to F$ telle que $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

**Autrement dit**
Un prolongement de $f$ à $E'$ est toute application définie sur un ensemble $E'$ contenant $E$, telle que $g : E' \to F$ telle que $g_{|E} = f$.

On prendra garde au fait qu'un prolongement de $f$ n'est pas nécessairement unique.
Par exemple, les deux fonctions $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$ sont deux prolongement à $\mathbf{R}$ de la fonction $\mathrm{id}_{[0,+\infty[}$, puisque pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = g(x) = x$.

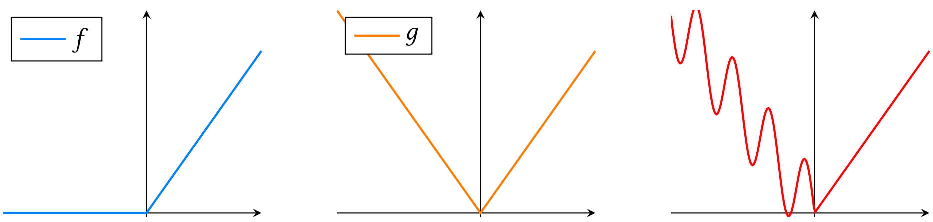



Figure 9.2 – Trois prolongements possibles de $\mathrm{id}_{[0,+\infty[}$.

**Définition 9.8 –** Soit $f : E \to F$, et soit $B$ une partie de $F$. On dit que $f$ **est à valeurs dans $B$** si $\mathrm{Im}(f) \subset B$. Soit encore si : $\forall x \in E,\ f(x) \in B$.

**Exemples 9.9**

La fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array} \right.$ est à valeurs dans $[1, +\infty[$.

L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x^2, y^3) \end{array} \right.$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

**Définition 9.10 –** Soit $f : E \to F$ et soit $B$ une partie de $F$ telle que $f$ soit à valeurs dans $B$.
La corestriction de $f$ à $B$ est alors l'application $f^{|B} : \begin{vmatrix} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{vmatrix}$.

La plupart du temps on confond[2] $f$ et $f^{|B}$, par exemple, lorsqu'on dit que Arctan réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il faudrait plutôt dire que $\text{Arctan}^{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est une bijection, mais cette notation est inutilement lourde, et on préfère se contenter d'une phrase qui précisera quels sont les ensembles de départ et d'arrivée que l'on considère.

[2] Abusivement !

**Définition 9.11 –** Soit $f : E \to E$ et soit $A \subset E$. On dit que $A$ est **stable par** $f$ si : $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.

**Exemple 9.12**

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+$, $[0, 1]$ est stable par $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.
En effet, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors par croissance de $f_\alpha$, $0 = f_\alpha(0) \leqslant f_\alpha(x) \leqslant f_\alpha(1) = 1$.
Donc $f_\alpha(x) \in [0, 1]$.

**Définition 9.13 –** Soit $f : E \to F$ et soit $A$ une partie de $E$ stable par $f$. On appelle **application induite par** $f$ **sur** $A$ l'application

$$u_{|A}^{|A} : \begin{vmatrix} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & u(x) \end{vmatrix}.$$

## 9.2 INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS

### 9.2.1 Définitions

**Définition 9.14 –** Soient $E$ et $F$ deux ensembles et soit $f$ une application de $E$ dans $F$. On dit que $f$ est **injective** (ou encore que $f$ est une **injection**) si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

i) $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
ii) pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au plus une solution $x \in E$
iii) tout élément de $F$ possède **au plus** un antécédent par $f$.

**Danger !** Cela ne veut pas dire que tout élément a un antécédent, mais qu'il ne peut pas en avoir deux distincts.

*Démonstration.* Il faut prouver que ces trois points sont bien équivalents. Montrons pour cela que *i)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* $\Rightarrow$ *i)* (on parle de raisonnement circulaire).
▸ *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Supposons que $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
Soit alors $y \in F$, et supposons que $x_1, x_2$ sont deux solutions de $y = f(x)$.
Alors $f(x_1) = y = f(x_2)$, et donc $x_1 = x_2$. Donc l'équation $y = f(x)$ possède au plus une solution.
▸ *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* Par définition, un antécédent de $y \in F$ est une solution de $y = f(x)$.
Donc pour $y \in F$, $y = f(x)$ possède au plus une solution si et seulement si $y$ possède au plus un antécédent. Nous avons donc prouvé plus qu'annoncé : *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii)*.
▸ *iii)* $\Rightarrow$ *i)*. Supposons que tout élément de $F$ possède au plus un antécédent, et soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$.
Alors, par définition, $x$ est un antécédent de $f(x)$. Mais puisque $f(x') = f(x)$, $x'$ est aussi un antécédent de $f(x)$.
Et donc $x = x'$. Donc *iii)* $\Rightarrow$ *i)*, de sorte que nos trois assertions sont bien équivalentes. □

**Danger !** Rien ne garantit qu'elle en possède toujours une !

**Exemples 9.15**

- Pour tout ensemble $E$, $\mathrm{id}_E$ est injective.

En effet, si $x, y \in E$ sont tels que $\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(y)$, alors $x = \mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(y) = y$.

- $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas injective, puisque $f(2) = 4 = f(-2)$.

En revanche, $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est injective.

**Méthode**

Si vous trouvez deux éléments distincts de même image, vous avez tout de suite prouvé que votre application n'est pas injective.

**Proposition 9.16 :** *Soit $A$ une partie de $\mathbf{R}$ et soit $f : A \to \mathbf{R}$. Si $f$ est strictement monotone, alors elle est injective.*

**⚠ Attention !**

Ce résultat est faux si on se contente d'applications monotones.

*Démonstration.* Donnons la preuve dans le cas d'une fonction strictement croissante.
Soient donc $x, x'$ deux éléments de $E$ tels que $f(x) = f(x')$.
On ne peut avoir $x < x'$ car on aurait alors $f(x) < f(x')$.
De même, $x' < x$ impliquerait $f(x') < f(x)$.
Donc nécessairement, $x = x'$. □

**Définition 9.17 –** Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. On dit que $f$ est **surjective** (ou que $f$ est une **surjection**) si tout élément de $F$ possède au moins un antécédent par $f$. Autrement dit si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Notons que cela revient à dire que pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$ possède au moins une solution.
En particulier, puisque $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des éléments de $F$ qui possède au moins un antécédent par $f$, alors $f$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

**Exemples 9.18**

- L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y \end{array} \right.$ est surjective.

En effet, le réel $x$ admet pour antécédent $(0, x)$.

- L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z^2 - 2z + 5 \end{array} \right.$ est surjective.

En effet, pour $\alpha \in \mathbf{C}$, l'équation $f(z) = \alpha \Leftrightarrow z^2 - 2z + (5 - \alpha) = 0$ possède toujours au moins une solution[3] dans $\mathbf{C}$.

En revanche, $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2x + 5 \end{array} \right.$ n'est pas surjective, car $0$ n'admet pas d'antécédent : l'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$ n'admet pas de solution réelle.

- Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y + z - x) \end{array} \right.$.

Pour étudier la surjectivité de $f$, il s'agit de déterminer si tout élément $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ possède un antécédent par $f$.
Soit donc $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Alors $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ est un antécédent de $(\alpha, \beta)$ par $f$ si et seulement si $f(x, y, z) = (\alpha, \beta)$ soit encore si et seulement si

$$\begin{cases} x = \alpha \\ -x + y + z = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta - z + \alpha \end{cases}$$

Or, nous savons qu'un tel système possède une infinité de solutions, qui sont les $(\alpha, \alpha + \beta - z, z)$, pour $z \in \mathbf{R}$.
Et donc tout élément de $\mathbf{R}^2$ possède au moins un[4] antécédent par $f$, donc $f$ est surjective.

[3] Et le plus souvent deux solutions.

[4] Et même une infinité, mais ce n'est pas important ici.

### 9.2.2 Comportement vis-à-vis de la composition

**Proposition 9.19 :** *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.*

1. *Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.*
3. *Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
4. *Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective.*

**Autrement dit**
La composée de deux applications injectives est injective.

*Démonstration.*

1. Supposons $f$ et $g$ injectives. Soient $(x, y) \in E^2$ tels que
$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)).$$
Puisque $g$ est injective, alors $f(x) = f(y)$. Et donc par injectivité de $f$, $x = y$. Ainsi, $g \circ f$ est injective.
2. Supposons $g \circ f$ injective, et soient $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$.
Alors[5] $g(f(x)) = g(f(y))$, et donc par injectivité de $g \circ f$, $x = y$. Donc $f$ est injective.
3. Supposons $f$ et $g$ surjectives, et soit $z \in G$.
Par surjectivité de $g$, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Et par surjectivité de $f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et donc $z = (g \circ f)(x)$.
Ainsi, $x$ est un antécédent de $z$ par $g \circ f$, de sorte que tout élément de $G$ possède un antécédent par $g \circ f$, qui est donc surjective.
4. Supposons $g \circ f$ surjective.
Alors pour tout $y \in G$, il existe un élément $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Et donc en posant $z = f(x)$, il existe $z \in F$ tel que $y = g(z)$ : $g$ est surjective.

□

[5] Deux éléments égaux ont même image par $g$ !

*Remarque.* Toutes ces implications ne sont en aucun cas des équivalences, et c'est d'ailleurs un bon exercice que de chercher des cas où les implications réciproques sont fausses.

### 9.2.3 Bijections

**Définition 9.20 –** Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.
Autrement dit, si tout élément de $F$ possède un **unique** antécédent par $f$ :
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E : y = f(x).$$

**Explication**
La surjectivité garantit l'existence d'au moins un antécédent, l'injectivité fournit alors l'unicité.

*Remarque.* On dit généralement que $f$ est une bijection, ou mieux : qu'elle réalise une bijection de $E$ sur $F$.
En particulier, on utilisera cette terminologie lorsque que $f$ est injective, mais que son image n'est pas $F$ tout entier. Dans ce cas, $f$ n'est pas bijective, mais en revanche sa corestriction à $\operatorname{Im} f$ l'est.
Comme on ne fait généralement pas vraiment la différence entre $f$ et $f^{|\operatorname{Im} f}$, on dit généralement que « $f$ réalise une bijection de $E$ sur $\operatorname{Im} f$ » plutôt que $f^{|\operatorname{Im} f}$ est bijective».
Par exemple, l'exponentielle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, plutôt que $\exp^{|\mathbf{R}_+^*}$ est bijective.

**Exemples 9.21**

► $\mathrm{id}_E$ est toujours bijective : tout élément $x$ de $E$ est son unique antécédent par $\mathrm{id}_E$.
► Le théorème de la bijection stipule que si $f$ est continue sur $[a, b]$, strictement croissante (resp. décroissante), alors $f$ réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$).
L'injectivité provient en fait de la stricte monotonie, et la surjectivité du théorème des valeurs intermédiaires[6].

[6] Que nous prouverons rigoureusement bientôt.

**Proposition 9.22 :** *Soit $f : E \to F$. Alors $f$ est une bijection si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}$.*
*Un tel $g$, lorsqu'il existe est unique. On l'appelle **bijection réciproque de** $f$, on le note $f^{-1}$, et il s'agit de l'application qui à tout $x \in F$ associe son unique antécédent par $f$.*

*Démonstration.* Supposons que $f$ soit bijective. Alors tout élément $x \in F$ possède un unique antécédent par $f$. Notons $g(x)$ cet antécédent, définissant ainsi une application $g : F \to E$.
Par définition[7], pour tout $x \in F$, on a $f(g(x)) = x = \mathrm{id}_F(x)$, et donc $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
D'autre part, pour $x \in E$, $f(x) \in F$ possède $x$ comme antécédent, nécessairement unique car $f$ est bijective, et donc $g(f(x)) = x = \mathrm{id}_E(x)$, de sorte que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

[7] $g(x)$ est un antécédent de $x$ par $f$.

Inversement, supposons qu'il existe $g : F \to E$ tel que $\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}$.
Puisque $g \circ f = \mathrm{id}_E$ est injective, alors par la proposition 9.19, $f$ est injective.
De même, $f \circ g = \mathrm{id}_F$ est surjective, et donc $f$ est surjective.
Donc $f$ est une bijection.

Il reste à prouver l'unicité de $g$. Supposons donc qu'il existe deux applications $g_1$ et $g_2$ de $F$ dans $E$ telles que $\begin{cases} g_1 \circ f = g_2 \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g_1 = f \circ g_2 = \mathrm{id}_F \end{cases}$.
Composons alors à droite la première relation par $g_1$. Il vient alors

$$g_2 \circ f \circ g_1 = \mathrm{id}_E \circ g_1 \Leftrightarrow g_2 \circ \mathrm{id}_F = g_1 \Leftrightarrow g_2 = g_1.$$

□

Remarquons que si $f$ est bijective, alors pour $x \in E$ et $y \in F$, on a $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
En effet, $y = f(x)$ si et seulement si $x$ est l'unique antécédent de $y$ par $f$, qui est $f^{-1}(y)$.

**Danger !** Ceci ne vaut que si vous savez déjà $f$ bijective. Sans ça, il est **interdit** d'écrire $f^{-1}$.

**Corollaire 9.23 –** *Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est bijective, et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

*Démonstration.* On a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.
Par la proposition précédente, ceci prouve que $f^{-1}$ est bijective et que sa bijection réciproque est $f$. □

**Exemple 9.24** **Détermination d'une bijection réciproque**

Soit $f$ l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y-3z, -x+y-z, -x+y) \end{array} \right.$.
Nous allons prouver que $f$ est bijective, et déterminer du même coup sa bijection réciproque.

Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. Alors pour $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, on a

$$(a,b,c) = f(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3z = a \\ -x + y - z = b \\ -x + y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -c \\ y - 3z = a \\ z = -b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 3b + 2c \\ y = a - 3b + 3c \\ z = -b + c \end{cases}$$

Ainsi, tout élément de $\mathbf{R}^3$ possède un **unique** antécédent, donc $f$ est bijective.
Mieux : nous avons déterminé quel est l'unique antécédent de $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ par $f$, donc nous connaissons $f^{-1}$ : il s'agit de l'application

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a-3b+2c, a-3b+3c, -b+c) \end{array} \right. .$$

Il est bien entendu possible de vérifier qu'alors $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$, mais ce n'est pas indispensable !

**Proposition 9.25 :** *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est une bijection de $E$ dans $G$, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

*Démonstration.* Notons que $g \circ f : E \to G$ et $f^{-1} \circ g^{-1} : G \to E$. On a alors

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Et de même,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \mathrm{id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_G.$$

Et donc $g \circ f$ est bijective, de réciproque égale à $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

⚠ On prendra bien garde au fait que l'ordre change lorsqu'on passe à la bijection réciproque : la bijection réciproque de $g \circ f$ n'est pas $g^{-1} \circ f^{-1}$ !
De toutes façons, si $E \neq G$, $g^{-1} \circ f^{-1}$ n'a aucun sens[8], alors que $f^{-1} \circ g^{-1}$ est bien définie.
Une analogie simple mais efficace : le matin vous commencez par mettre vos chaussettes (c'est $f$), puis vous enfilez vos chaussures (c'est $g$).
Le soir, pour vous déshabiller (c'est donc $(g \circ f)^{-1}$) vous commencez par enlever vos chaussures (donc $g^{-1}$), puis vous enlevez vos chaussettes (c'est $f^{-1}$). Et sûrement pas le contraire !

[8] L'espace de départ de $g^{-1}$ n'est pas l'espace d'arrivée de $f^{-1}$.

**Corollaire 9.26 –** *Si $f : E \to E$ est bijective, alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $f^n$ est bijective, et $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n \text{ fois}}$.*

*Démonstration.* Par récurrence sur $n$. □

**Définition 9.27 –** Si $f : E \to E$ est bijective[9], alors pour $n$ entier strictement négatif, on note $f^n = (f^{-1})^{|n|}$.

[9] Et seulement dans ce cas-là : bijective avec espace de départ et d'arrivée égaux. De toutes façons, sans cette seconde condition, les composées $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, etc ne sont pas définies.

*Remarques.* ► La valeur absolue est confusante : on a bien $f^{-2} = f^{-1} \circ f^{-1}$, $f^{-3} = f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1}$, etc.
► On a alors, pour tous $(k, n) \in \mathbf{Z}^2$, $f^n \circ f^k = f^{n+k}$.

Prouvons à présent un fait énoncé précédemment : si $f : E \to F$ est bijective, alors l'image réciproque de $B \subset F$ par $f$ et l'image directe de $B$ par $f^{-1}$ sont égales (et donc la notation $f^{-1}(B)$ ne prête pas à confusion).
Notons $A_1 = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ l'image réciproque de $B$ par $f^{-1}$ et $A_2 = \{f^{-1}(y),\ y \in B\}$ l'image directe de $B$ par $f^{-1}$. Alors

$$x \in A_1 \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow \exists y \in B,\ f(x) = y \Leftrightarrow \exists y \in B,\ x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x \in A_2.$$

Et donc on a bien $A_1 = A_2$.

### 9.2.4 Fonction indicatrice d'une partie

Nous définissons à présent des fonctions qui sont d'apparence assez simple, mais sont en fait assez utiles, et nous les utiliserons notamment en probabilités.

**Définition 9.28 –** Soit $E$ un ensemble, et soit $A$ une partie de $E$. On appelle **fonction indicatrice de** $A$ et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction de $E$ dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Autrement dit, un élément $x \in E$ est dans $A$ si et seulement si $\mathbb{1}_A(x) = 1$.
Notons que $\mathbb{1}_A$ ne prend que les valeurs 0 et 1 (et même que la valeur 0 si $A = \emptyset$), et qu'en particulier, $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.
Beaucoup de propriétés ensemblistes se lisent sur les fonctions indicatrices :

**Exercice**
Inversement, montrer que si $f : E \to \mathbf{R}$ vérifie $f^2 = f$, alors il existe $A \in \mathscr{P}(E)$ telle que $f = \mathbb{1}_A$.

**Proposition 9.29 :** *Soit $E$ un ensemble, et soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Alors*

- $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$ *(c'est-à-dire si et seulement si $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$)*
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

*Démonstration.* ▸ Supposons $A \subset B$. Alors pour $x \in A$, $x \in B$, et donc $\mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)$.
Et pour $x \in E \setminus A$, $\mathbb{1}_A(x) = 0 \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.
Inversement, si $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$, alors pour $x \in A$, on a $\mathbb{1}_A(x) = 1$, et donc[10] nécessairement, $\mathbb{1}_B(x) = 1$, de sorte que $x \in B$.
Donc $A \subset B$.
▸ Pour $x \in E$, on a deux cas de figure :
Soit $x \in A$, et alors $1 - \mathbb{1}_A(x) = 0 = \mathbb{1}_{\overline{A}}(x)$.
Soit $x \notin A$, et alors $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_{\overline{A}}(x)$.
Donc on a bien $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
▸ Si $A$ et $B$ sont deux parties de $E$, alors $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
En effet, si $x \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$, et donc $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.
Inversement, si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, de sorte que $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$, et donc $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 0 = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.
Ainsi, pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$, et donc $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
▸ Nous pourrions là aussi distinguer plusieurs cas, mais notons plutôt que $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ et donc

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}\mathbb{1}_{\overline{B}} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) = 1 - 1 + \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B.$$

□

[10] $\mathbb{1}_B(x) \in \{0, 1\}$.

La proposition qui suit énonce un résultat plus simple qu'il n'y paraît, et vient formaliser l'intuition suivante : pour se donner une partie $A$ de $E$ il suffit, pour chaque élément $x$ de $E$, de dire si on le «prend» ou non dans $A$.
Mais c'est exactement ce que fait la fonction indicatrice de $A$ : pour tout $x \in E$, elle nous dit si $x$ est dans $A$ (lorsque $\mathbb{1}_A(x) = 1$) ou non (lorsque $\mathbb{1}_A(x) = 0$).
Et donc une partie de $E$ est entièrement caractérisé par sa fonction indicatrice.

**Proposition 9.30 :** *Soit $E$ un ensemble. Alors* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ *est une bijection de $\mathscr{P}(E)$ sur $\mathscr{F}(E, \{0,1\})$.*

*Démonstration.* Montrons que $f$ est injective. Soient donc $A, B$ deux parties de $E$ telles que $f(A) = f(B) \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
Alors pour tout $x \in E$, on a $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$.
Et par conséquent, pour tout $x \in E$,

$$x \in A \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B.$$

Donc $A = B$, de sorte que $f$ est injective.

Prouvons à présent que $f$ est bijective. Soit $\chi : E \to \{0, 1\}$.
Il s'agit de prouver qu'il existe $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\chi = \mathbb{1}_A$.
Posons $A = \chi^{-1}(\{1\}) = \{x \in E \mid \chi(x) = 1\}$.
Alors $A \subset E$, et on a, pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow \chi(x) = 1$.
Et de même, $\mathbb{1}_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow \chi(x) = 0$.
Et donc $\mathbb{1}_A = \chi$, de sorte que $\chi = f(A)$.
Donc $f$ est surjective, et par conséquent bijective. □

**Remarque**
Cette deuxième équivalence tient au fait que $\mathbb{1}_A$ et $\chi$ ne peuvent prendre que deux valeurs, 0 ou 1. Et donc quand elles ne valent pas 1, elles valent 0.

*Remarque.* Notons au passage que la preuve de la surjectivité nous a donné l'unique antécédent de $\chi$ par $f$, et donc la bijection réciproque de $f$ est

$$f^{-1}: \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E,\{0,1\}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ \chi & \longmapsto & \chi^{-1}(\{1\}) \end{array} \right. .$$

## 9.3 INTRODUCTION À LA NOTION DE CARDINAL

Cette partie n'est pas essentielle pour l'instant, même si elle sera plus tard à la base de tout notre chapitre de dénombrement.
Si nous choisissons de l'aborder dès maintenant, c'est essentiellement pour illustrer la notion de bijection : deux ensembles sont en bijection si et seulement à chaque élément de l'un correspond un unique élément de l'autre. C'est grâce

### 9.3.1 Ensembles finis

**Définition 9.31 –** Un ensemble $E$ est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et une bijection $\varphi : [\![1,n]\!] \to E$.
Si un tel $n$ n'existe pas, on dit que $E$ est **infini**.

L'intuition derrière cette définition est qu'un ensemble fini est un ensemble dont on peut «compter» les éléments.
C'est exactement ce que fait une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $E$ : elle établit une correspondance entre les nombres de 1 à $n$ et les éléments de $E$, telle qu'à chaque nombre correspond un unique élément de $E$ et vice-versa.
Notons qu'il existe une bijection $\varphi : [\![1,n]\!] \to E$ si et seulement si[11] il existe une bijection $\psi : E \to [\![1,n]\!]$.
On dira souvent que $E$ et $[\![1,n]\!]$ «sont en bijection» pour désigner n'importe laquelle de ces deux assertions.

[11] Penser à la bijection réciproque.

**Exemple 9.32**

L'ensemble des élèves de MPSI2 est fini : on peut les numéroter à l'aide des éléments de $[\![1,48]\!]$.
Et il y a plein de manières de le faire : je peux prendre l'ordre alphabétique, votre classement au dernier DS, etc.

S'il existe une bijection $[\![1,n]\!] \to E$, alors $n$ doit moralement être égal au nombre d'éléments de $E$, et donc doit être unique. Le lemme suivant a pour but de prouver cette unicité.

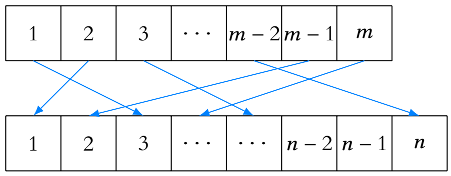
**Lemme 9.33.** Soient $(m,n) \in (\mathbf{N}^*)^2$. Alors il existe une injection $[\![1,m]\!] \to [\![1,n]\!]$ si et seulement si $m \leqslant n$.

*Démonstration.* Si $m \leqslant n$, il est clair que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,m]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ k & \longmapsto & k \end{array} \right.$ est une injection.
Pour la réciproque, raisonnons par récurrence sur $m$, en prouvant la propriété $\mathcal{P}(m)$ : «s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et une injection de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, alors $m \leqslant n$.»
Pour $m = 1$, la proposition est évidemment vraie, puisqu'un élément $n \in \mathbf{N}^*$ est supérieur ou égal à 1.
Supposons donc $\mathcal{P}(m)$ vraie, et supposons qu'il existe une injection $f$ de $[\![1,m+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
Notons qu'on ne peut avoir $n = 1$, car alors on aurait $f(1) = f(2) = 1$, contredisant l'injectivité de $f$.
Alors, pour tout $k \in [\![1,m]\!]$, $f(k) \neq f(m+1)$.

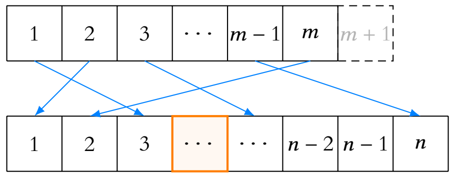
Soit alors $g : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,m]\!] & \longrightarrow & [\![1,n-1]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} f(k) & \text{si } f(k) < f(m+1) \\ f(k)-1 & \text{si } f(k) > f(m+1) \end{cases} \end{array} \right.$

Alors $g$ est injective. En voici la preuve en image :

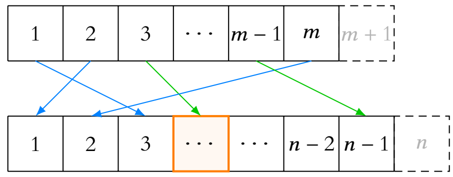
**Un dessin ?**
Je vois venir la question : «quand est-ce qu'un dessin est une preuve ?». La réponse est simple : quand c'est moi qui le fais !




Au départ $f$ est une injection, donc deux éléments distincts pointent sur deux cases distinctes.




On «libère» la case $f(m+1)$ vers laquelle plus rien ne pointe.




Toutes les flèches qui arrivaient à droite de la case libérée sont décalées d'un rang vers la gauche. Il n'y a donc toujours pas deux flèches qui pointent vers la même case : $g$ est une injection.

Notez bien que si jamais $f(m+1) = n$, alors $g$ n'est rien d'autre que la restriction de $f$ à $[\![1,m]\!]$ : $\forall k \in [\![1,m-1]\!]$, $g(k) = f(k)$ (autrement dit, on n'a rien décalé, on a juste supprimé la dernière flèche).

Comme je sens qu'un dessin vous convainc moyennement, écrivons les détails.
Soient donc $k, \ell \in [\![1,m]\!]$ tels que $g(k) = g(\ell)$ Distinguons trois cas :

- si $f(k) < f(m+1)$ et $f(\ell) < f(m+1)$, alors $g(k) = f(k)$ et $g(\ell) = f(\ell)$.
  On a donc $f(k) = f(\ell)$, et par injectivité de $f$, alors $k = \ell$.
- Si $f(k) < f(m+1)$ et $f(\ell) > f(m+1)$, alors $g(k) = f(k) < f(m+1)$ et $g(k) = f(k) - 1 > f(m+1) - 1 \geqslant f(m+1)$.
  Comme nous avons supposé $g(k) = g(\ell)$, ce cas est impossible.
  De la même manière, on ne peut avoir $f(\ell) < f(m+1)$ et $f(k) > f(m+1)$.
- Si $f(k)$ et $f(\ell)$ sont tous les deux supérieurs[12] à $f(m+1)$, alors $g(k) = f(k) - 1$ et $g(\ell) = f(\ell) - 1$.
  Ces deux quantités étant égales par hypothèse, $f(k) = f(\ell)$ et donc par injectivité de $f$, nécessairement $\ell = k$.

[12] Strictement puisqu'ils ne peuvent être égaux à $f(m+1)$.

Conclusion : dans tous les cas, $g(k) = g(\ell)$ implique $k = \ell$, $g$ est injective.
Au final, nous avons donc prouvé qu'il existe une injection de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n-1]\!]$.
Donc par hypothèse de récurrence, $m \leqslant n-1$ et donc $m+1 \leqslant n$. Ainsi, $\mathscr{P}(m+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence $\mathscr{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbf{N}^*$. □

**Heureux ?**
Vous êtes vraiment plus convaincus par cette preuve que par le dessin ? Pas moi !

**Proposition 9.34 :** *Soient $(m,n) \in (\mathbf{N}^*)^2$. Alors il existe une bijection de $[\![1,m]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ si et seulement si $m = n$.*

*Démonstration.* Si $m = n$, il est évident que $\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$ convient.
Inversement, si $f : [\![1,m]\!] \to [\![1,n]\!]$ est bijective, alors $f$ est injective, donc $m \leqslant n$.
Mais $f^{-1} : [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!]$ est injective également, et donc $n \leqslant m$. □

**Corollaire 9.35 –** *Si $E$ est un ensemble fini non vide, il existe un unique $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $E$ soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$.*
*Cet entier $n$ est appelé le cardinal de $E$, et on le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $\#E$.*
*Par convention, le cardinal de l'ensemble vide est nul.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe deux entiers non nuls $m$ et $n$ et deux bijections $\varphi : [\![1,n]\!] \to E$ et $\psi : [\![1,m]\!] \to E$.
Alors $\psi^{-1} \circ \varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!]$ est une bijection, et donc $m = n$. □

⚠ Si $n$ est unique, la bijection n'est l'est pas[13]
Si $\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ et $\psi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ sont deux bijections, alors $\varphi \circ \psi$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $E$.
Composer par une telle bijection revient à changer le «numéro» qu'on attribue à chaque élément de $E$.

[13] Sauf si $n = 1$.

**Proposition 9.36 :** *Soient $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a < b$. Alors $[\![a,b]\!]$ est de cardinal $b - a + 1$.*

*Démonstration.* Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [\![1, b-a+1]\!] & \longrightarrow & [\![a,b]\!] \\ k & \longmapsto & k+a-1 \end{array} \right.$.
Alors $\varphi$ est injective car strictement croissante et surjective car si $\ell \in [\![a,b]\!]$, alors

$$\ell = \underbrace{\ell - a + 1}_{\in [\![1, b-a+1]\!]} + a - 1 = \varphi(\ell - a + 1).$$

Donc $\varphi$ est bijective. □

Nous nous contentons pour l'instant de cette définition du cardinal, et continuons à nous en tenir à l'intuition pour la plupart des propriétés usuelles du cardinal (par exemple, une partie $A$ d'un ensemble fini $E$ est elle-même finie, avec $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$), mais nous reviendrons sur cette notion plus tard dans l'année.

### 9.3.2 Équipotence (Hors programme)

**Définition 9.37 –** Deux ensembles $E$ et $F$ sont dits **équipotents**[14] s'il existe une bijection $E \to F$.

[14] Le terme est un peu tombé en désuétude, on dire plutôt que $E$ et $F$ sont en bijection.

L'idée est que deux ensembles qui sont en bijection sont sensiblement de la même taille, puisqu'à tout élément de l'un correspond un unique élément de l'autre.

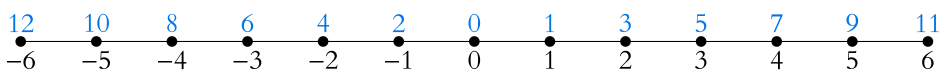
Contrairement à ce que l'on pourrait penser, les ensembles ne se résument pas aux ensembles finis vs. les ensembles infinis : deux ensembles infinis ne sont pas forcément équipotents.

**Exemples 9.38**

- $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^*$ sont équipotents[15].
En effet, l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$ est une bijection.

[15] Et donc ont «autant d'éléments». Même si ceci est un peu dérangeant, puisque $\mathbf{N}^*$ a «un élément de moins» que $\mathbf{N}$.

- $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ sont équipotents. En effet, $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $\quad n \mapsto \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.
est une bijection.

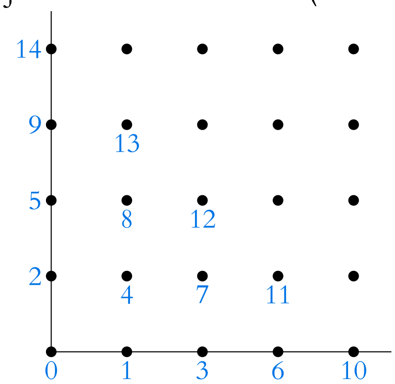



**Intuition**
Un ensemble est en bijection avec $\mathbf{N}$ si on peut «numéroter» ses éléments à l'aide des entiers naturels.
C'est le cas de $\mathbf{Z}$ comme le montre la figure ci-contre.

- Plus surprenant, $\mathbf{N}^2$ et $\mathbf{N}$ sont équipotents. En effet,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} &\to \mathbf{N} \\ (p,q) &\mapsto \frac{(p+q+1)(p+q)}{2} + p \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ (difficile), donc $\varphi^{-1} : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est une bijection.




- On peut en revanche prouver que $\mathbf{R}$ n'est pas équipotent à $\mathbf{N}$.

Il est assez facile de prouver que :

1. tout ensemble est équipotent à lui-même ;
2. si $E$ est équipotent à $F$, alors $F$ est équipotent à $E$ ;
3. si $E$ est équipotent à $F$ et si $F$ est équipotent à $G$, alors $E$ est équipotent à $G$.

Nous sommes donc tentés de dire que l'équipotence est une relation d'équivalence. Mais sur quel ensemble ? Sur l'ensemble de tous les ensembles ? Le problème est qu'un tel ensemble n'existe pas.
En effet, supposons que l'ensemble $X$ de tous les ensembles soit un ensemble.
Soit alors $A = \{E \in X \mid E \notin E\}$, qui est donc bien un ensemble[16], et donc un élément de $X$.
On a alors deux cas de figure possibles :

- soit $A \in A$, auquel cas, par définition de $A$, on a $A \notin A$, ce qui est absurde.
- soit $A \notin A$, auquel cas $A \in A$, ce qui est également absurde.

Donc il ne peut pas exister d'ensemble de tous les ensembles (c'est le *paradoxe de Russel*).

[16] Car partie de $X$.

Bref, l'équipotence a toutes les propriétés d'une relation d'équivalence, mais on n'a pas le droit de dire que c'en est une.
Notons que la classe d'équivalence d'un ensemble $E$, si elle existait, ne serait rien d'autre que l'ensemble des ensembles équipotents à $E$. Autrement dit, de même «taille» que $E$.
Pour $E$ fini, la classe de $E$ contiendrait tous les ensembles de même cardinal que $E$.
La classe de $\mathbf{N}$ contiendrait $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, mais pas $\mathbf{R}$.
La classe de $\mathbf{R}$ contiendrait $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}^2$.
Une notion plus rigoureusement définie, mais qu'il faut interpréter comme ces classes d'équivalence est la notion de cardinal[17].
L'énoncé suivant permet de prouver l'existence d'une infinité de cardinaux infinis.

[17] Mais il faut un cours avancé de théorie des ensembles pour bien l'appréhender, ce qui dépasse largement le programme de prépa.

**Proposition 9.39 (Théorème de Cantor) :** *Quel que soit l'ensemble $E$, il n'existe pas de surjection de $E$ sur $\mathscr{P}(E)$.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un ensemble $E$ et une surjection $f : E \to \mathscr{P}(E)$.
Soit alors $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$.
Alors $A$ ne peut pas posséder d'antécédent par $f$. En effet, s'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = A$, alors :

- soit $x \in A$, et donc $x \in f(x)$, donc $x \notin A$ : absurde.
- soit $x \notin A$, et donc $x \notin f(x)$, donc $x \in A$ : absurde.

□

**Corollaire 9.40 –** *Pour tout ensemble $E$, $E$ et $\mathscr{P}(E)$ ne sont pas équipotents.*

*Démonstration.* Puisqu'il n'existe pas de surjection de $E$ sur $\mathscr{P}(E)$, il n'existe pas non plus de bijection. □

Ceci permet donc de construire des ensembles de plus en plus «grands» : $\mathbf{N}$, $\mathscr{P}(\mathbf{N})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbf{N}))$, etc, chacun étant «strictement plus grand[18]» que le précédent.

[18] Gardons à l'esprit que nous parlons d'ensembles infinis.

## 9.4 Relations binaires

En maths, on a régulièrement envie de comparer plusieurs éléments, soit pour dire qu'ils partagent certaines propriétés, soit au contraire pour dire qu'ils différent sur certains points et que tel élément est plus *trucmuche* que tel autre.
Par exemple que tel ensemble est plus petit que (= inclus dans) tel autre, qu'une suite tend plus rapidement vers 0 qu'une autre, que deux droites sont parallèles (= ont même direction), que deux fonctions ont même limite en $+\infty$, etc.

### 9.4.1 Définitions

**Définition 9.41 (Relation binaire) –** Soit $E$ un ensemble non vide. On appelle **relation binaire sur** $E$ toute partie $\mathscr{R}$ de $E \times E$.
On note alors $x \mathscr{R} y$ pour signifier que $(x, y) \in \mathscr{R}$.

**Exemples 9.42**

► L'ensemble $\mathscr{R} = \{(x, x),\ x \in E\}$ est une relation binaire sur tout ensemble $E$.
On a alors $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x = y$.
► La relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbf{Z}$ par $p \mathscr{R} q$ si et seulement si $p$ divise $q$ est une relation binaire sur $\mathbf{Z}$.
► La relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x^2 + y = 1$ est une relation binaire.

**Définition 9.43 –** Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur $E$. On dit que $\mathscr{R}$ est :

- **réflexive** si $\forall x \in E,\ x \mathscr{R} x$
- **symétrique** si $\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathscr{R} y \Rightarrow y \mathscr{R} x$
- **transitive** si $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z \Rightarrow x \mathscr{R} z$
- **antisymétrique** si $\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} x \Rightarrow x = y$.

**Exemples 9.44**

► La relation de divisibilité sur $\mathbf{Z}$ est réflexive (tout entier se divise), elle est transitive (si $a$ divise $b$ et $b$ divise $c$, alors $a$ divise $c$). Elle n'est pas symétrique puisque 2 divise 4 mais 4 ne divise pas 2.
► La relation «être frontalier de», définie sur l'ensemble des pays est une relation symétrique, mais elle n'est pas transitive.[19]

[19] Par exemple parce que la Norvège est frontalière de la Russie, que la Russie est frontalière de la Corée du Nord, mais la Norvège n'est pas frontalière de la Corée du Nord.

### 9.4.2 Relations d'équivalence

**Définition 9.45 –** Une relation binaire $\mathscr{R}$ qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive est appelée **relation d'équivalence**.

**Exemples 9.46**

► Si $f : E \to F$, alors la relation $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur $E$.
En effet, on a toujours $f(x) = f(x)$, donc $x \mathscr{R} x$.
Si $x \mathscr{R} y$, alors $f(y) = f(x)$, et donc $y \mathscr{R} x$.
Et si $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$, alors $f(x) = f(y) = f(z)$, et donc en particulier, $f(x) = f(z)$, de sorte que $x \mathscr{R} z$.
► Si $\alpha \neq 0$, alors la relation $x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y\ [\alpha]$ est une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$.
Rappelons que $x \equiv y\ [\alpha]$ si et seulement si $\exists k \in \mathbf{Z}$ tel que $y = x + k\alpha$
En effet, on a toujours $x \equiv x\ [\alpha]$.
Si $x \equiv y\ [\alpha]$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $y = x + k\alpha \Leftrightarrow x = y + \underbrace{(-k)}_{\in \mathbf{Z}} \alpha$, et donc $y \equiv x\ [\alpha]$.
Enfin, si $x \equiv y\ [\alpha]$ et $y \equiv z\ [\alpha]$, alors il existe deux entiers $k_1$ et $k_2$ tels que $y = x + k_1\alpha$ et $z = y + k_2\alpha$, de sorte que $z = x + (k_1 + k_2)\alpha$ et donc $z \equiv x\ [\alpha]$.
► De même, la relation de congruence modulo $n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$.

**Remarque**

Nous utilisons ici le fait que, sur n'importe quel ensemble, l'égalité est elle-même une relation d'équivalence !

► Sur l'ensemble $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ des suites à valeurs réelles, on définit une relation $\sim$ par $(u_n) \sim (v_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.
Alors $(u_n) \sim (u_n)$ puisque la suite nulle tend vers 0.
Si $(u_n) \sim (v_n)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$. Donc $\sim$ est symétrique.
Enfin, si $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$, alors on à la fois $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n - w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par somme de limites $u_n - w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que $(u_n) \sim (w_n)$.
Donc $\sim$ est transitive, et donc est une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

**Définition 9.47 –** Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$ et si $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence de** $x$ et on note $\mathrm{cl}(x)$ ou $\overline{x}$ (ou encore $\dot{x}$) l'ensemble défini par $\mathrm{cl}(x) = \overline{x} = \{y \in E \mid x \mathscr{R} y\}$.

### Exemples 9.48

► Pour la relation de congruence modulo 2 sur $\mathbf{Z}$, alors la classe d'équivalence de $n \in \mathbf{Z}$ est l'ensemble des entiers de même parité que $n$.
En effet, si $n$ est pair, $n = 2p$, alors

$$\overline{n} = \{m \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z}, m = 2k+n\} = \{m \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z}, m = 2(k+p)\} = \{m \in \mathbf{Z} \mid \exists \ell \in \mathbf{Z}, m = 2\ell\} = \{2\ell, \ell \in \mathbf{Z}\}$$

est l'ensemble des entiers pairs.
On prouve sur le même principe que si $n$ est impair, alors $\overline{n}$ est l'ensemble des entiers impairs.
► Pour la relation d'équivalence définie sur $\mathbf{R}$ par $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$, alors la classe d'équivalence de $x \neq 0$ est $\{x, -x\}$, et la classe d'équivalence de 0 est $\{0\}$.
► Pour la relation $\sim$ précédemment introduite sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, on prouve facilement que si une suite $(u_n)$ converge vers une limite finie $\ell$, alors la classe d'équivalence de $(u_n)$ est l'ensemble des suites de limite $\ell$.
En effet, si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$.
Et donc $\left\{(v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell\right\} \subset \overline{(u_n)}$.
Et inversement, si $(v_n) \in \overline{(u_n)}$, alors $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$v_n = u_n + v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - 0 = \ell$$

et donc $\overline{(u_n)} \subset \left\{(v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell\right\}$.

C'est en revanche plus compliqué pour les suites de limite infinie, puisque $u_n = n$ et $v_n = n^2$ tendent toutes deux vers $+\infty$, mais leur différence ne tend pas vers 0. Donc elles ne sont pas dans la même classe d'équivalence.
Et c'est sans compter sur toutes les classes d'équivalence de suites divergentes, par exemple qu'y a-t-il dans la classe d'équivalence de $((-1)^n)_n$ ?

**Proposition 9.49 :** *Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors :*

1. *Pour tout $x \in E$, $\overline{x} \neq \emptyset$.*
2. *Pour $(x, y) \in E^2$, on a soit $\overline{x} = \overline{y}$, soit $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$*
3. $\displaystyle\bigcup_{x\in E} \overline{x} = E$.

*Autrement dit, les classes d'équivalence forment une partition de E.*

**En français**
Deux classes d'équivalence sont soit égales, soit disjointes.

**Rappel**
On appelle partition de $E$ toute famille de parties non vides de $E$, deux à deux disjointes, et dont l'union vaut $E$ tout entier.

*Démonstration.* 1. On a toujours $x \in \overline{x}$ car $x \mathscr{R} x$, donc $\overline{x} \neq \emptyset$.

2. Soient $x, y \in E$ tels que $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$, et montrons que $\overline{x} = \overline{y}$.
   Soit $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$. Alors $x \mathcal{R} z$ et $y \mathcal{R} z$.
   Par symétrie, on a donc $z \mathcal{R} y$ et par transitivité, $x \mathcal{R} y$.
   En particulier, si $u \in \overline{x}$, alors $x \mathcal{R} u$ et donc $u \mathcal{R} x$. Puisque de plus $x \mathcal{R} y$, par transitivité, $u \mathcal{R} y$ et donc $y \mathcal{R} u$, de sorte que $u \in \overline{y}$.
   Ainsi, nous venons de prouver que $\overline{x} \subset \overline{y}$.
   On prouve de la même manière l'inclusion réciproque $\overline{y} \subset \overline{x}$ et donc $\overline{x} = \overline{y}$.
3. Puisque les classes d'équivalence sont incluses dans $E$ par définition, on a $\bigcup_{x \in E} \overline{x} \subset E$.
   Inversement, si $y \in E$, alors $y \in \overline{y}$ et donc $y \in \bigcup_{x \in E} \overline{x}$.
   Et donc par double inclusion, on a bien $E = \bigcup_{x \in E} \overline{x}$.

□

**Exemple 9.50**

Pour la relation de congruence modulo 2, il y a deux classes d'équivalence, qui sont $\overline{0}$, l'ensemble des entiers pairs, et $\overline{1}$, l'ensemble des entiers impairs.
Ces deux ensembles sont disjoints, non vides, et leur union est bien $\mathbf{Z}$ tout entier.

### 9.4.3 Relations d'ordre

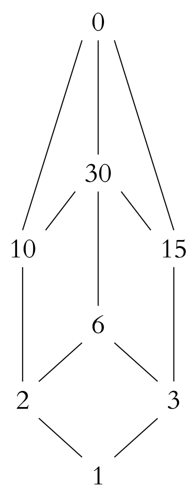
**Définition 9.51 –** Une relation binaire $\preccurlyeq$ qui est à la fois réflexive, transitive et antisymétrique est appelée **relation d'ordre.**
On dit alors que le couple[20] $(E, \preccurlyeq)$ est un **ensemble ordonné.**

[20] Formé d'un ensemble et d'une relation d'ordre sur cet ensemble.

**Exemples 9.52**

▸ Si $E$ est un ensemble, la relation d'inclusion $A \subset B$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.
En effet, on a toujours $A \subset A$. Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.
Et enfin, si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.
▸ Sur $\mathbf{N}$ la relation de divisibilité : $a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{N}, b = ka$ est une relation d'ordre.
En effet, on a toujours $a = 1a$, de sorte que $a \mid a$.
Si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors il existe deux entiers $k_1$ et $k_2$ tels que $a = k_1 b$ et $b = k_2 a$, donc $a = k_1 k_2 a$. Ce qui implique que $k_1 k_2 = 1$, et donc $k_1 = k_2 = 1$, donc $a = b$. Donc la relation est antisymétrique.
Enfin, si $a \mid b$ et $b \mid c$, il existe deux entiers $k_1$ et $k_2$ tels que $b = k_1 a$ et $c = k_2 b$, de sorte que $c = (k_1 k_2) a$, et donc $a \mid c$ : la relation est transitive.
En revanche, la relation de divisibilité sur $\mathbf{Z}$ : $a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, b = ka$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique : on a $1 \mid -1$ et $-1 \mid 1$ alors que $1 \neq -1$.
▸ Si $E$ est un ensemble et si $(F, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné, alors on définit une relation d'ordre (encore notée $\preccurlyeq$) sur $\mathscr{F}(E, F)$ par

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \preccurlyeq g(x).$$



Un moyen de représenter les relations de divisibilité sur quelques entiers.
Un trait indique que deux éléments sont comparables, celui du bas divisant celui du haut.

Si $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $E$, on note souvent $x \prec y$ pour signifier que $x \preccurlyeq y$ **et** $x \neq y$.
Cette relation binaire est encore transitive, mais ce n'est plus une relation d'ordre, notamment du fait qu'elle n'est pas réflexive : on n'a jamais $x \prec x$.

**Exemple 9.53** **Ordre lexicographique**

Si $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné, alors on définit une relation d'ordre sur $E^2$ par

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \textbf{ ou } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 \leqslant y_2 \end{cases}$$

Alors $\preceq$ est une relation d'ordre sur $E^2$, qu'on appelle ordre lexicographique. En effet :

- Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a toujours $(x, y) \preceq (x, y)$.
- Si $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \preceq (x_3, y_3)$.
  Alors soit $x_1 < x_2$, et puisque $x_2 \leqslant x_3$, nécessairement, $x_1 < x_3$, de sorte que $(x_1, y_1) \preceq (x_3, y_3)$.
  Soit $x_1 = x_2$, et alors $y_1 \leqslant y_2$. Mais alors deux nouveaux cas se présentent :
  — soit $x_2 < x_3$, et alors $x_1 < x_3$, de sorte que $(x_1, y_1) \preceq (x_3, y_3)$.
  — soit $x_2 = x_3$ et $y_2 \leqslant y_3$, de sorte que $x_1 = x_2 = x_3$ et $y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3$, et donc $(x_1, y_1) \preceq (x_3, y_3)$.
  Dans tous les cas $\preceq$ est transitive.
- Enfin, si $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1)$, Alors, puisque $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$, soit $x_1 < x_2$, soit $x_1 = x_2$ et $y_1 \leqslant y_2$.
  Mais $x_1 < x_2$ n'est pas possible puisque $(x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1)$.
  Donc $x_1 = x_2$. Et alors on a à la fois $y_1 \leqslant y_2$ et $y_2 \leqslant y_1$, donc par antisymétrie de $\leqslant$, $y_1 = y_2$, et donc $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
  Donc $\preceq$ est antisymétrique, et donc est une relation d'ordre.

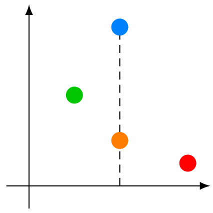


FIGURE 9.3– Pour l'ordre lexicographique sur $\mathbf{R}^2$, on a

$\preceq$ $\preceq$ $\preceq$

Notons que sur le même principe, il est possible de définir une relation d'ordre sur $\mathbf{C}$, en comparant d'abord les parties réelles, puis les parties imaginaires. Malheureusement, cette relation se comporte très mal vis-à-vis des opérations (surtout de la multiplication), et n'est d'aucun intérêt pour faire des calculs, raison pour laquelle on ne l'utilise jamais.

**Remarque**

Cette relation se généralise sans grande difficulté à $E^n$. Remarquons que c'est exactement l'ordre qu'on utilise dans un dictionnaire (d'où le nom) : on compare les premières lettres, si elles sont égales on compare les deuxièmes, etc.

**Définition 9.54 –** Soient $(E, \leqslant)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés. Une application $f : E \to F$ est dite **croissante** (resp. **décroissante**) si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \preccurlyeq f(y) \quad (\text{resp. } f(y) \preccurlyeq f(x)).$$

### Exemples 9.55

► Soit $E$ un ensemble, et soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array} \right.$.

Alors on sait que pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow f(B) \subset f(A)$.
Donc $f$ est décroissante pour la relation d'inclusion sur $\mathscr{P}(E)$.

► Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbf{R}$, et soit $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$.
Alors la relation $\preccurlyeq$ définie sur $[a, b]$ par $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall t \in [a, b], f(t) \leqslant g(t)$ est une relation d'ordre sur $E$.

L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \end{array} \right.$ est croissante de $(E, \preccurlyeq)$ dans $\mathbf{R}$ muni de son ordre usuel : c'est précisément ce que nous avons appelé la croissance de l'intégrale.

**⚠ Attention !**

La croissance de l'intégrale n'est pas une équivalence, on peut avoir

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

sans avoir $f \preccurlyeq g$.

**Définition 9.56 –** Une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur un ensemble $E$ est dite **totale** si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. On parle alors d'ensemble totalement ordonné.
On parle alors d'**ordre total**. Dans le cas contraire, on dit que $\preccurlyeq$ est un **ordre partiel**, et que $(E, \preccurlyeq)$ est partiellement ordonné.

### Exemples 9.57

▶ La relation d'ordre lexicographique $\preceq$ sur $\mathbf{R}^2$ est un ordre total. En effet,soient $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ deux éléments de $\mathbf{R}^2$.
Alors soit $x_1 < x_2$, auquel cas $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$, soit $x_2 < x_1$ auquel cas $(x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1)$, soit $x_1 = x_2$.
Mais dans ce cas, on aura soit $y_1 \leqslant y_2$ et donc $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$, soit $y_2 < y_1$ auquel cas $(x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1)$.
▶ Sur $\mathscr{P}(E)$, la relation d'inclusion est un ordre partiel dès que $E$ possède au moins deux éléments, car si $x$ et $y$ sont deux éléments distincts de $E$, on n'a ni $\{x\} \subset \{y\}$, ni $\{y\} \subset \{x\}$.
▶ La relation de divisibilité sur $\mathbf{N}$ est un ordre partiel car on n'a ni $2|3$, ni $3|2$.
▶ Même si $(F, \leqslant)$ est totalement ordonné, l'ordre $\leqslant$ défini précédemment sur $\mathscr{F}(E, F)$ n'est pas total dès que $E$ contient plus de deux éléments.
Par exemple, $\mathscr{F}([0, 1], \mathbf{R})$ n'est pas totalement ordonné : deux fonctions $f$ et $g$ dont les graphes se croisent ne sont pas comparables, au sens où on n'a ni $f \leqslant g$, ni $g \leqslant f$.

**Plus généralement**
Si $E$ est muni d'une relation d'ordre total, l'ordre lexicographique sur $E^n$ est aussi total.

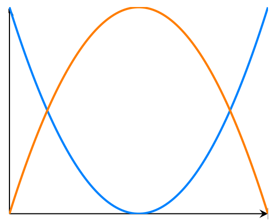



FIGURE 9.4– Deux fonctions non comparables de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$. Aucune des deux n'est toujours au-dessus de l'autre.

**Définition 9.58 –** Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, soit $A \subset E$ et soit $a \in A$.

1. On dit que $a$ est **le plus grand élément de** $A$ (ou le **maximum** de $A$) si $\forall x \in A, x \preccurlyeq a$. On note alors $a = \max(A)$.
2. On dit que $a$ est **le plus petit élément de** $A$ (ou le **minimum** de $A$) si $\forall x \in A$, $a \preccurlyeq x$. On note alors $a = \min(A)$.

*Remarques.* ▶ Un plus grand élément, s'il en existe un, est nécessairement unique. En effet, supposons que $a$ et $b$ soient tous deux le plus grand élément de $A$.
Alors on a $a \preccurlyeq b$ (car $b$ est le maximum de $A$) et $b \preccurlyeq a$ (car $a$ est le maximum de $A$).
Par antisymétrie, cela implique que $a = b$.
▶ Toute partie d'un ensemble ordonné n'a pas forcément de plus grand (resp. plus petit) élément. Par exemple, pour l'ordre usuel sur $\mathbf{R}$, $]0, 1[$ n'a ni plus grand ni plus petit élément, de même que $\mathbf{R}$ tout entier.
▶ Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels, alors on note $\max(a_1, \ldots, a_n)$ au lieu de $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$ le plus grand élément de $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

**Remarque**
Ceci justifie bien qu'on dise **le** plus grand élément et pas **un** plus grand élément.

### Exemples 9.59

▶ Un ensemble fini $E$, totalement ordonné, possède toujours un plus grand élément.
On peut le prouver par récurrence sur $n = \operatorname{Card}(E)$.
Pour $n = 2$, ça découle de la définition d'ordre total. Et dans le cas général, on prouve aisément que si $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$, alors $\max\{\max\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}, a_n\}$ est égal à $\max E$.
▶ L'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$ possède un plus grand élément, qui est $E$.
En effet, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on a $A \subset E$.
De même, il possède $\emptyset$ comme plus petit élément puisque pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $\emptyset \subset A$.

**Définition 9.60 –** Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, soit $A$ une partie de $E$ et soit $a \in E$. On dit que $a$ est :

- un **majorant** de $A$ si $\forall x \in A, x \preccurlyeq a$
- un **minorant** de $A$ si $\forall x \in A, a \preccurlyeq x$.

Si $A$ possède (au moins) un majorant, on dit qu'elle est majorée, et si elle possède au moins un minorant, on dit qu'elle est minorée.

⚠ Contrairement au plus petit élément, un majorant n'est pas nécessairement unique.

**Remarque**
À la différence d'un plus grand (resp. petit) élément, un majorant (resp. minorant) n'a pas besoin de faire partie de $A$.
D'ailleurs, si $a \in A$ est un majorant de $A$ si et seulement si c'est le plus grand élément de $A$.

**Exemples 9.61**

▸ Pour l'ordre usuel sur $\mathbf{R}$, 1 est un majorant de $]0,1[$. Tout réel supérieur ou égal à 1, est également un majorant de $]0,1[$.
▸ Pour la relation de divisibilité sur $\mathbf{N}$, tout multiple de 6 est un majorant de $\{2,3\}$.

**Définition 9.62 –** Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, soit $A \in \mathscr{P}(E)$, et soit $a \in E$. On dit que $a$ est :

- la **borne supérieure de** $A$ si $a$ est le plus petit des majorants de $A$. On note alors $a = \sup(A)$.
- la **borne inférieure de** $A$ si $a$ est le plus grand des minorants de $A$. On note alors $a = \inf(A)$.

*Remarques.* ▸ Pour le dire avec des quantificateurs : $a$ est la borne supérieure de $A$ si

$$a = \min\{x \in E \mid x \text{ majorant de } A\} = \min\{x \in E \mid \forall y \in A,\ y \leqslant x\}.$$

Ou encore

$$a = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leqslant a \ (a \text{ est un majorant de } A) \\ \forall x \in E,\ \underbrace{(\forall y \in A \Rightarrow y \leqslant x)}_{y \text{ majorant de } A} \Rightarrow a \leqslant x \end{cases}.$$

▸ La terminologie le laisse penser, mais une telle borne supérieure, **si elle existe** est unique, car c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants, et qu'un tel plus petit élément est unique. Idem pour la borne inférieure.
▸ Une borne supérieure (resp. inférieure) ne peut exister que pour un ensemble majoré (resp. minoré) faut de quoi l'ensemble des majorants (resp. minorants) est vide, et donc ne contient pas de plus grand (resp. petit) élément.

**Exemple 9.63**

▸ Dans $(\mathbf{N}, |)$, $\sup\{2,3\} = 6$. En effet, nous avons déjà vu que les majorants de $\{2,3\}$ sont les multiples de 6. Et donc si $a$ est un majorant de $\{2,3\}$, alors $6|a$.
▸ Une partie peut-être majorée sans avoir de borne supérieure.
Par exemple dans l'ensemble ordonné $(\mathbf{R} \setminus \{1\})$, $A = [0,1[$ est majoré (par 2 par exemple), mais ne possède pas de borne supérieure.
En effet, l'ensemble des majorants de $A$ est $]1,+\infty[$, qui ne possède pas de plus petit élément.
Vous allez me dire que je l'ai un peu fait exprès, la borne supérieure de $[0,1[$ devant être égale à 1. En effet, mais nous verrons bientôt que des exemples moins triviaux existent, par exemple dans $\mathbf{Q}$, $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$ est majoré mais n'admet pas de borne supérieure.

**Théorème 9.64 :** *Si $A$ possède un plus grand (resp. petit) élément, alors $A$ possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$).*

*Démonstration.* Par définition, $\max A$ est un majorant de $A$. Il s'agit donc de prouver que $\max A$ est le plus petit des majorants de $A$.
Soit donc $M$ un majorant de $A$. Puisque $\max A \in A$, on a donc $\max A \leqslant M$.
Et donc $\max A$ est bien le plus petit des majorants de $A$ : $A$ possède une borne supérieure, qui est donc égale à $\max A$. □

*Remarque.* Inversement, il est aisé de constater que si $\sup(A)$ existe, et appartient à $A$, alors il s'agit d'un majorant de $A$, dans $A$, et donc du plus grand élément de $A$.

**Proposition 9.65 :** *Toute partie non vide de* $\mathbf{N}$ *possède un plus petit*[21] *élément.*

[21] Au sens de la relation d'ordre usuelle.

*Démonstration.* Soit $A$ une partie de $\mathbf{N}$ ne possédant pas de plus petit élément. Prouvons alors que $A = \emptyset$.
Pour cela, prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ que $n \notin A$.
Il est clair que $0 \notin A$ car ce serait nécessairement le plus petit élément de $A$.
Supposons donc que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $k \notin A$.
Alors on ne peut pas avoir $n+1 \in A$, car ce serait nécessairement le plus petit élément de $A$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \notin A$, et donc $A = \emptyset$.
Par contraposée[22], toute partie non vide $\mathbf{N}$ possède un plus petit élément. □

[22] Nous venons de prouver que $A$ ne possède pas de min $\Rightarrow A = \emptyset$.
La contraposée est donc $A \neq \emptyset \Rightarrow A$ possède un minimum.

Cette propriété est assez caractéristique de $\mathbf{N}$, et n'est par exemple plus vraie pour une partie non vide de $\mathbf{Z}$.

Juste pour la culture : notons que dans la preuve ci-dessus, nous avons utilisé un raisonnement par récurrence, dont la validité ne sera pas prouvée, puisqu'en général on inclut le principe de récurrence dans les axiomes définissant $\mathbf{N}$.
Mais notons que la proposition précédente est en fait équivalente au principe de récurrence (et donc dans une définition axiomatique de $\mathbf{N}$, on peut remplacer le principe de récurrence par le fait que toute partie non vide de $\mathbf{N}$ possède un plus petit élément).
En effet, supposons la propriété précédente vraie, et soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition logique dépendant d'un entier $n$ telle qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ soit vraie.
- pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$

Notons $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant n_0 \textbf{ et } (\textbf{non}\, \mathscr{P}(n))\}$.
Nous souhaitons donc prouver que $A$ est vide, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $A \neq \emptyset$.
Alors $A$ possède un plus petit élément $n_1$, qui est donc nécessairement supérieur ou égal à $n_0$, et même supérieur strict à $n_0$ puisque $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie par hypothèse.
La proposition $\mathscr{P}(n_1 - 1)$ ne peut alors pas être vraie, puisque $\mathscr{P}(n_1 - 1) \Rightarrow \mathscr{P}(n_1)$.
Donc $n_1 - 1 \in A$, contredisant le fait que $n_1$ est le plus petit élément de $A$.
On en déduit que $A = \emptyset$ et donc pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Rappelons que nous avons alors prouvé dans le chapitre 3 que les principes de récurrence double et récurrence forte découlent directement du principe de récurrence simple.

**Proposition 9.66 :** *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbf{N}$ *possède un plus grand élément.*

*Démonstration.* Soit $A$ une partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$. Si $A = \{0\}$, il n'y a rien à dire.
Supposons donc que $A$ contient des éléments non nuls.
Soit alors $B = \{n \in \mathbf{N},\ \forall a \in A,\ a \leqslant n\}$ l'ensemble des majorants entiers de $A$.
Alors $B$ est non vide par hypothèse, et donc possède un plus petit élément $b$. Ce minimum est alors non nul, faute de quoi on aurait : $\forall n \in A$, $n \leqslant 0$, et donc $n = 0$ : $A$ serait réduit à $\{0\}$.
Montrons alors que $b \in A$, ce qui prouvera le résultat, car alors $b$ sera un majorant de $A$, dans $A$.
Puisque $b - 1 \notin B$, et donc $b - 1$ n'est pas un majorant de $A$ : il existe $a \in A$ tel que $a > b - 1 \Leftrightarrow a \geqslant b$.
Mais un tel $a$ vérifie $a \leqslant b$. Donc $a = b$, et donc $b \in A$.
Ainsi, $A$ possède un majorant qui est dans $A$, c'est le plus grand élément de $A$. □

**Corollaire 9.67 –** *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbf{Z}$ *possède un plus grand élément.*

*Démonstration.* Soit $A \subset \mathbf{Z}$ non vide et majorée.
Alors soit $A \cap \mathbf{N} \neq \emptyset$, auquel cas elle possède un plus grand élément, qui est le plus grand élément de $A$.
Soit $A \cap \mathbf{N} = \emptyset$. Mais alors $-A = \{-a,\ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$, qui contient un plus petit élément $b$. Alors $-b$ est le plus grand élément de $A$. $\square$

Détails
Un nombre positif est toujours plus grand qu'un nombre négatif.

Sur le même principe, on prouve qu'une partie non vide et minorée de $\mathbf{Z}$ a toujours un plus petit élément.