TP 13 : Calcul approché d'intégrales

Le but de ce TP est de comparer différentes méthodes de calcul approché d'une intégrale.
S'il peut être intéressant de tester ces méthodes sur différentes intégrales, nous nous focaliserons surtout sur $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, dont je vous laisse vérifier qu'elle vaut $\frac{\pi}{4}$.

Afin d'illustrer autant que possible ces méthodes, commencez par importer matplotlib :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
```

Pour préciser la couleur d'un tracé, vous pourrez utiliser l'option `color='colorname'` de la commande `plt.plot`, où `colorname` peut prendre comme valeur les principaux noms de couleur en anglais (red, green, blue, grey, pink, violet, magenta, coral, etc, mais aussi chartreuse !).

▸ Les méthodes des rectangles

Contentons nous des rectangles à gauche, les rectangles à droite étant sensiblement les mêmes. Nous rappelons qu'il s'agit alors d'approcher $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

▸ **Question 1** : écrire une fonction `rectangles_gauche(f,a,b,n)` qui prend comme paramètres une fonction f, les bornes a et b d'un segment, et n, le nombre de points de la subdivision, et qui :

- retourne la valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ obtenue par la méthode des rectangles à gauche
- affiche sur un même graphique la courbe de f et les rectangles dont la somme des aires est la valeur approchée calculée.

Il a été prouvé en cours qu'un majorant de l'erreur, dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ est $\displaystyle\|f'\|_\infty\frac{(b-a)^2}{2n}$.

▸ **Question 2** : proposer un programme qui permet de vérifier graphiquement que l'erreur est bien de l'ordre de $\frac{1}{n}$. *On pourra à cet effet essayer la méthode des rectangles à l'aide de plusieurs valeurs de n, en allant par exemple jusqu'à* 10^6.

▸ **Question 3** (facultative) : comparer l'erreur obtenue avec la borne théorique donnée en cours.

Une variation de la méthode des rectangles est la méthode du point milieu, qui consiste à approcher $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1/2)\frac{b-a}{n}\right)$.

▸ **Question 4** : reprendre les deux premières questions en les adaptant pour la méthode du point milieu. L'erreur a-t-elle toujours l'air d'être de l'ordre de $\frac{1}{n}$? *On pourra consulter l'exercice 13 du TD25 pour une méthode permettant de majorer l'erreur dans le cas d'une fonction* $\mathscr{C}^2$.

▸ La méthode des trapèzes

Cette fois, on approche $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$.

▸ **Question 5** : reprendre la question 1, mais pour faire apparaître ces fois les trapèzes.

La majoration de l'erreur donnée en cours est cette fois, pour une fonction $\mathscr{C}^2$, $\|f''\|_\infty \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$.
Étudier l'écart entre cette borne et l'erreur réelle. *On admet que si* $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, *alors* $\|f''\|_\infty = 2$.

► Comparaison des différentes méthodes

On se propose de comparer ces trois méthodes.

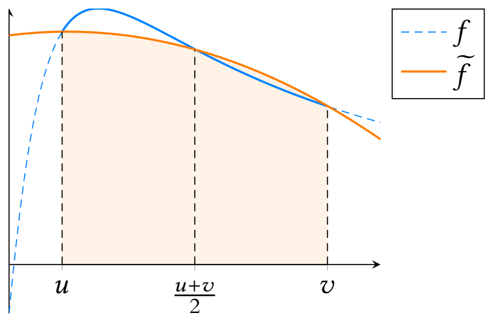
► **Question 6** : placer sur un même graphique les différentes erreurs des trois méthodes ci-dessus pour une vingtaine de valeurs de n variant entre 10 et 1000. *Il est sûrement pertinent de choisir des échelles logarithmiques.*

► La méthode de Simpson

Les méthodes des rectangles et des trapèzes proposent d'approcher f, sur chaque petit intervalle de longueur $\dfrac{b-a}{n}$, par une fonction constante (rectangles) ou affine (trapèzes).
La méthode de Simpson utilise le même principe, mais cette fois en approchant f sur chaque intervalle par un polynôme de degré 2.
Plus précisément : sur chaque petit intervalle $I = \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right]$, on approche f par l'unique polynôme de degré au plus 2 qui coïncide avec f aux bornes de I et au milieu de I, l'existence et l'unicité d'un tel polynôme étant garanties par l'interpolation de Lagrange.

► **Question 7** : dans cette question, on considère un segment $[u, v]$, et on note $\widetilde{f}$ l'unique polynôme de degré au plus 2 qui coïncide avec f en u, $\dfrac{u+v}{2}$ et en v.
Justifier qu'il existe trois réels $\omega_0, \omega_1, \omega_2$, indépendants de f, tels que

$$\int_u^v \widetilde{f}(t)\,dt = \omega_0 f(u) + \omega_1 f\left(\frac{u+v}{2}\right) + \omega_2 f(v).$$



On pourra s'inspirer de l'exercice 24 du TD 17.
En notant que si f est un polynôme de degré au plus 2, alors $f = \widetilde{f}$, et en appliquant ceci aux fonctions $t \mapsto 1, t \mapsto t-u$ et $t \mapsto (t-u)(v-t)$, déterminer un système de trois équations vérifié par $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$, et le résoudre.
Vérification : on doit trouver $\omega_0 = \omega_2 = \dfrac{v-u}{6}$ *et* $\omega_1 = \dfrac{4(v-u)}{6}$.

► **Question 8** : appliquer ce qui vient d'être dit pour écrire une fonction similaire aux fonctions `rectangles_gauches` ou `trapezes`, mais qui cette fois approche f par n morceaux polynomiaux de degré 2.
Les plus motivés pourront aussi tracer les polynômes par lesquels on approxime, mais cela demande un peu plus de travail.

► **Question 9** : reprendre le graphique de la question 6, et y ajouter la méthode de Simpson. Que constatez-vous ?

On peut prouver que si f est de classe au moins $\mathscr{C}^4$, alors l'erreur commise par la méthode de Simpson est majorée par $\|f^{(4)}\|_\infty \dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}$.