TD 10 : Applications, relations binaires

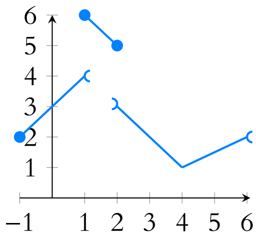
▶ Généralités sur les applications

Exercice 10.1 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & xe^x \end{array} \right.$. **PD**

1. Déterminer $f(\mathbf{R})$, $f(\mathbf{R}_-)$ et $f(\mathbf{R}_+^*)$.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbf{R})$, $f^{-1}(\mathbf{R}_+)$, $f^{-1}(\mathbf{R}_-)$, $f^{-1}([-1,0])$ et $f^{-1}([-2,-1])$.
3. Pour $a \in \mathbf{R}$, déterminer le cardinal de $f^{-1}(\{a\})$ (*on pourra distinguer plusieurs cas*).

Exercice 10.2 **Lecture graphique** **F**

Soit f la fonction définie sur $[-1,6[$ dont le graphe est ci-contre.
Déterminer



1. $f([-1,6[)$
2. $f([1,2[)$
3. $f^{-1}([0,6])$
4. $f^{-1}([-2,6[)$
5. $f^{-1}([4,5])$
6. $f^{-1}(]2,3])$

Exercice 10.3 Déterminer l'image des deux applications suivantes : **AD**

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x}\sin(x) \end{array} \right.$
2. $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \left(x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt\right) \end{array} \right.$ où E désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 10.4 Soit E un ensemble. Pour $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on pose $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. **PD**

1. Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.
2. Montrer que pour $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, on a $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

Exercice 10.5 Soit $f : E \to F$. Prouver que : **AD**

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$ et pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Pour tout $A, A' \in \mathscr{P}(E)$, $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ et $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
3. Pour tout $B, B' \in \mathscr{P}(F)$, $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

▶ Injections, surjections, bijections

Exercice 10.6 Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ? **F**

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$
2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x-y, y) \end{array} \right.$
3. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, y-x) \end{array} \right.$
4. $i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z, y, -x-4y+z) \end{array} \right.$

Exercice 10.7 Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $|a| \neq 1$. Montrer que $f_a : z \mapsto \dfrac{z+a}{\bar{a}z+1}$ réalise une bijection de $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{U}$, et déterminer sa bijection réciproque. **PD**

Exercice 10.8 **PD**

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x}{x^2+x+1}$ réalise une bijection de $[-1,1]$ sur un intervalle à préciser. Déterminer alors sa bijection réciproque.
2. Mêmes question pour la fonction ch sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 10.9 Soit $f : E \to F$. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes : **PD**

1. «f n'est pas injective»
2. «f n'est pas surjective»
3. «tout élément de F admet au moins deux antécédents par f»

Exercice 10.10 Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x+y, xy)$. f est-elle injective ? Surjective ? Mêmes questions en changeant espace de départ et d'arrivée en $\mathbf{C}^2$. PD

Exercice 10.11 Soient $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ PD

1. Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$. Que vaut $f \circ g$?
2. Les applications f et g sont-elle bijectives ?

Exercice 10.12 Soit E un ensemble, et soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. AD
Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 10.13 Vrai ou faux AD
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(F)$.

1. Si f est surjective, f réalise une bijection de E sur F.
2. f réalise une bijection de E sur $f(E)$
3. Si f est injective, alors f réalise une bijection de E sur $f(E)$.
4. Si f est injective et g surjective, alors $g \circ f$ est bijective.
5. Si $(g \circ f)^3$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.
6. $f(f^{-1})(B) \subset B$.
7. Si f est surjective, alors $f(f^{-1}(B)) = B$.
8. $f(A) = B \Leftrightarrow f^{-1}(B) = A$.
9. Si f est injective, alors $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$
10. $f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{-1}(B)}$.

Exercice 10.14 Déterminer toutes les injections $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leqslant n$. AD

Exercice 10.15 Soit $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$. D

Exercice 10.16 Soit E un ensemble, et soient A et B deux parties de E. D
On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective (respectivement surjective, resp. bijective).

Exercice 10.17 (Oral Polytechnique 2017) TD
Déterminer toutes les applications $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ telles que $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{id}$.

▸ Relations binaires

Exercice 10.18 On définit une relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbf{N}$ en posant $p \preccurlyeq q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N} / q = p^n$. PD
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 10.19 Soit E un ensemble non vide. On suppose qu'il existe sur E une relation $\mathscr{R}$ qui soit à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence. Que dire des classes d'équivalence de $\mathscr{R}$? PD
Si on suppose de plus que la relation d'ordre $\mathscr{R}$ est totale, que dire de E ?

Exercice 10.20 Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbf{C}$ par $z \mathscr{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ est une relation d'équivalence. F
Décrire géométriquement ses classes d'équivalence.

Exercice 10.21 AD

1. Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer le cardinal des classes d'équivalence de la relation $\mathscr{R}$.

Exercice 10.22 Soit E un ensemble, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$. PD
On définit alors une relation $\sim$ sur $\mathscr{P}(E)$ par $X \sim Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
2. ($\star$) Exhiber une bijection entre $\mathscr{P}(A)$ et l'ensemble (inclus dans $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$) des classes d'équivalence de $\sim$.

Exercice 10.23 Soit E un ensemble possédant au moins deux éléments. Montrer que $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$ ne possède pas de plus grand élément pour l'inclusion. AD

Exercice 10.24 Soit E un ensemble ordonné tel que toute partie non vide de E possède un plus grand et un plus petit élément. Montrer que E est fini. D

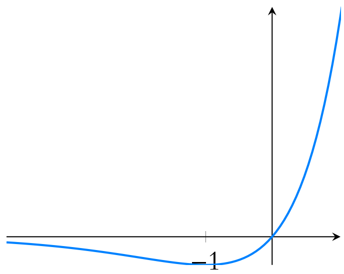
Exercice 10.25 Dans cet exercice, on travaille dans $\mathscr{P}(\mathbf{R})$, ordonné par la relation d'inclusion. D
L'ensemble $A = \left\{ \left[-\frac{1}{n}, n \right], n \in \mathbf{N}^* \right\}$ possède-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

Correction des exercices du TD 10

Solution de l'exercice 10.1

Commençons par noter que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ car produit de fonctions dérivables, et que sa dérivée est $f' : x \mapsto (x+1)e^x$.
Donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.
De plus, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$.
Le tableau de variations de f est donc donné par :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$



1. Le tableau de variations nous suffirait à constater que $f(\mathbf{R}) = [-e^{-1}, +\infty[$, mais bien que ceci soit très intuitif, ce n'est pas tout à fait une preuve...
Notons déjà que le minimum de f vaut $-e^{-1}$, et donc que f ne prend que des valeurs supérieures à $-e^{-1}$. Ce qui signifie déjà que $f(\mathbf{R}) \subset [-e^{-1}, +\infty[$.
D'autre part, pour $a \in [-e^{-1}, +\infty[$, puisque f est continue, que $f(-1) = -e^{-1}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires[1], il existe $x \in [-1, +\infty[$ tel que $f(x) = a$. Et donc $a \in f(\mathbf{R})$.
Et donc ceci prouve que $[-e^{-1}, +\infty[\subset f(\mathbf{R})$, et donc que $f(\mathbf{R}) = [-e^{-1}, +\infty[$.

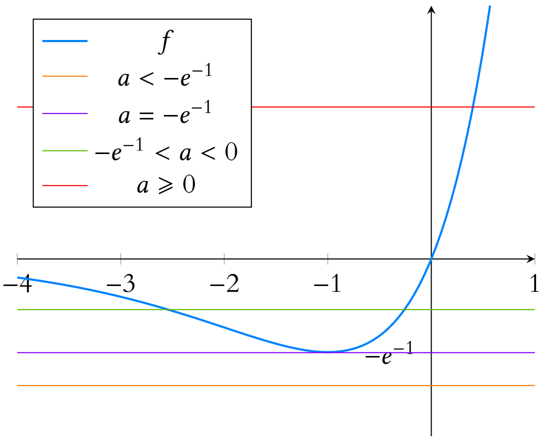
Remarque
Ici nous avons tout rédigé pour que ceci soit fait une bonne fois pour toutes, mais à partir de maintenant, on s'autorisera à lire directement une image directe sur un tableau de variations, à **condition d'avoir affaire à une fonction continue.**

De la même manière, en restreignant notre tableau de variations à $\mathbf{R}_-$, et en notant que $f(0) = 0$, on obtient $f(\mathbf{R}_-) = [-e^{-1}, 0]$.
Enfin, on a $f(\mathbf{R}_+^*) =]0, +\infty[= \mathbf{R}_+^*$.
Justifions rapidement que cet intervalle soit ouvert en 0 : puisque $f(0) = 0$ et que f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) > f(0) = 0$.

Remarque
Plus généralement, si $f : E \to F$, alors $f^{-1}(F) = E$.

2. On a évidemment $f^{-1}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.
En revanche, on a $f^{-1}(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R}_+$ car $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
De la même manière, on a $f^{-1}(\mathbf{R}_-) = \mathbf{R}_-$.
Notons que $f(\mathbf{R}) \cap \mathbf{R}_- = [-e^{-1}, 0] \subset [-1, 0]$.
Autrement dit, lorsque f prend des valeurs négatives, celles-ci sont automatiquement entre -1 et 0 (et même entre $-e^{-1}$ et 0).
Et donc pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) \in [-1, 0] \Leftrightarrow f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}_-$.
Donc $f^{-1}([-1, 0]) = \mathbf{R}_-$.
Enfin, puisque f ne prend pas de valeurs dans $[-2, -1]$, $f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$.

3. Soit $a \in \mathbf{R}$. Notons que graphiquement, déterminer le nombre d'éléments de $f^{-1}(\{a\})$, c'est déterminer le nombre de points d'intersection du graphe de f avec la droite horizontale d'équation $y = a$.
À l'aide du tableau de variation de f, ou d'un graphique, il est assez facile de comprendre quels cas vont être à distinguer :



► Par définition, si $a \notin f(\mathbf{R}) = [-e^{-1}, +\infty[$, a n'a pas d'antécédent par f, et donc $f^{-1}(\{a\}) = \emptyset$.

Rappel
$f^{-1}(\{a\})$ est l'ensemble des antécédents de a par f.

► Si $a = -e^{-1}$, alors a possède un unique antécédent par f, qui est -1.
En effet, nous savons déjà que $f(-1) = -e^{-1}$, et que par stricte décroissance (resp. croissance) de f sur $]-\infty, -1]$[(resp. sur $[-1, +\infty[$), pour $x < -1$ (resp. $x > -1$), $f(x) > f(-1)$ et donc $f(x) \neq -e^{-1}$.
Ainsi, $f^{-1}(\{-e^{-1}\}) = \{-1\}$, qui ne contient donc qu'un seul élément.

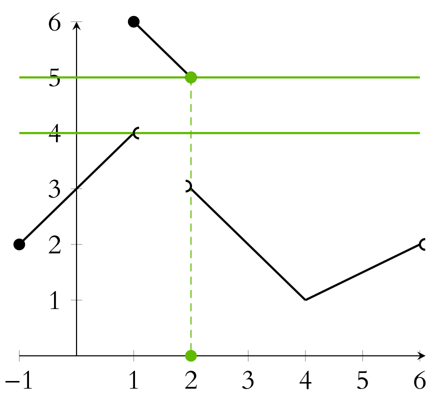
► Si $a \in]-e^{-1}, 0[$, alors nous pouvons appliquer deux fois le théorème de la bijection : une fois entre $-\infty$ et -1 et une fois entre -1 et $+\infty$, et sur chacun de ces deux intervalles, a possède un et un seul antécédent. Et donc $f^{-1}(\{a\})$ contient deux éléments.

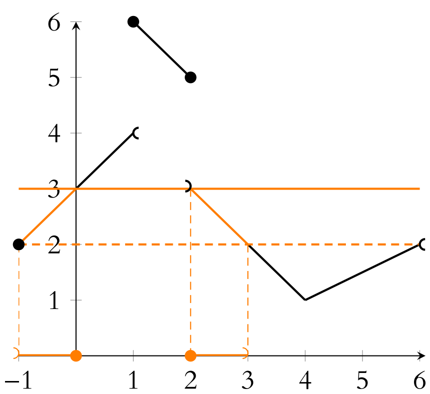
► Enfin, si $a \geqslant 0$, alors a ne possède pas d'antécédent par f sur $\mathbf{R}_-^*$ et possède un unique[2] antécédent par f sur $\mathbf{R}_+$, et donc $f^{-1}(\{a\})$ contient un seul élément.

[2] C'est encore le théorème de la bijection.

Solution de l'exercice 10.2

1. Notons que $f([-1, 6[)$ est l'image de tout l'ensemble de départ, c'est ce que nous avons appelé $\mathrm{Im}(f)$.
   Il s'agit donc de l'ensemble des valeurs prises par la fonction, c'est $[1, 4[\cup[5, 6]$.
2. Il s'agit cette fois de trouver l'ensemble des valeurs atteintes par f sur $[1, 2[$, c'est $]5, 6]$.
3. Il s'agit de trouver tous les antécédents par f des réels de $[0, 6]$, c'est $f^{-1}([0, 6]) = [-1, 6[$.
4. Puisque f ne prend pas de valeurs entre -2 et 1, on a $f^{-1}([0, 6[) = [-1, 6[\setminus\{1\}$.
5. Remarquons qu'il s'agit de trouver les x tels que $f(x) \in [4, 5]$, c'est-à-dire de résoudre $4 \leqslant f(x) \leqslant 5$.
   Graphiquement, il faut donc trouver tous les $x \in [-1, 6[$ dont l'image «tombe» entre les droites d'équations $y = 4$ et $y = 5$.
   Ce n'est le cas que pour $x = 2$, et donc $f^{-1}([4, 5]) = \{2\}$.
6. Sur le même principe, en cherchant les nombres x d'image entre 2 et 3, on trouve $f^{-1}(]2, 3]) =]-1, 0] \cup [2, 3[$.





Solution de l'exercice 10.3

1. Un tableau de variation peut-être un bon support, même si ici, en raison de la présence du sin, il sera difficile de le dresser sur $\mathbf{R}_+$ tout entier.
Contentons nous d'une étude sur $[0, 2\pi]$ dans un premier temps.
La fonction f est dérivable, et pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$f'(x) = e^{-x}\left(\cos(x) - \sin(x)\right) = e^{-x}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right) = e^{-x}\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

En particulier, f' est positive si et seulement si

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{4}\right].$$

Détails
$x + \frac{\pi}{4}$ est dans $\left[\frac{\pi}{4}, 9\frac{\pi}{4}\right]$, nous cherchons donc où la fonction cos est positive dans cet intervalle.

Soit si et seulement si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$.
Donc le tableau de variations de f sur cet intervalle est le suivant

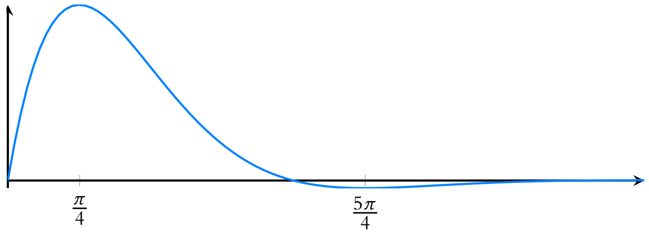


FIGURE 10.1 – OK, ce n'est pas tout à fait un tableau de variations...

En particulier, f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.
Par le théorème de la bijection[3], elle réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ sur $\left[f\left(\frac{5\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.
Donc tous les éléments de cet intervalle possèdent un antécédent, et donc sont dans $\operatorname{Im}(f)$.
Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, alors $0 \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, donc $f(x) \in \left[f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$.
Reste donc à traiter le cas où $x \geqslant \frac{5\pi}{4}$.
Mais la même étude de la dérivée prouve que f est croissante sur les intervalles de la forme $\left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right]$, $k \geqslant 1$, et décroissante sur $\left[\frac{9\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + (2k+1)\pi\right]$.
Donc pour $x \in \left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + (2k+1)\pi\right]$, on a donc $f\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right)$.
Or, $f\left(\frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{9\pi}{4}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$. Et de même, $f\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \geqslant f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.
Et donc f est bien à valeurs dans $\left[f\left(\frac{5\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.
Au final, l'image de f est $\left[f\left(\frac{5\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}\right]$.

[3] f est dérivable, donc continue.

2. Commençons par noter que si $f \in E$, alors $\varphi(f)$ est l'unique primitive de f qui s'annule en 0.
En particulier, elle est $\mathscr{C}^1$, et même deux fois dérivable puisque sa sa dérivée est f qui est elle-même $\mathscr{C}^1$.
Donc f est deux fois dérivable, sa dérivée seconde est continue, et f s'annule en 0.

Inversement, soit g une fonction deux fois dérivable, à dérivé seconde continue, et qui s'annule en 0. Alors sa dérivée est de classe $\mathscr{C}^1$.
Et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)\,dt \Leftrightarrow g(x) = \int_0^x g'(t)\,dt = \varphi(g')(x)$.
Donc $g \in \operatorname{Im}\varphi$.

⚠ Attention !
$\varphi(g')$ est elle-même une fonction. Donc on peut écrire $\varphi(g')(x)$.
Mais on ne peut pas écrire $\varphi(g'(x))$, car $g'(x)$ est un réel, qui n'est pas dans l'espace de départ de φ, de sorte que $\varphi(g'(x))$ n'a pas de sens.

Et donc $\operatorname{Im}\varphi$ est l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbf{R}$, à dérivée seconde continue (nous appellerons bientôt de telles fonctions des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$), et qui s'annulent en 0.

Solution de l'exercice 10.4

1. 1ère **méthode** : pour montrer que deux applications sont égales, il faut montrer qu'elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée, et qu'elles coïncident en tout point de leur ensemble de départ.
Ici, les ensembles de départ et d'arrivée sur E et $\{0,1\}$.
Soit donc $x \in E$.

   - Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 0$, et puisque $x \in A$ et $x \in B$, $\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x) = 0$.
   Donc $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = (\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x))^2$.
   - Si $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A\Delta B$, et donc $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 1$. Mais $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 0$, donc $(\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x))^2 = 1^2 = 1$.
   - Si $x \in B \setminus A$. Alors de même $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 1$ et $(\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x))^2 = (-1)^2 = 1$.
   - Enfin, si $x \notin A \cup B$, alors $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 0$ et $(\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x))^2 = 0^2 = 0$.

   Donc dans tous les cas, $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = (\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x))^2$, donc $\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.

   2ème **méthode** : il est également possible de se débrouiller avec les propriétés des indicatrices déjà vues en cours.
   Puisque $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ et $A \cap B$ sont disjoints, et que leur unions vaut $A \cup B$, on a

   $$\mathbb{1}_{A\cup} = \mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} + \mathbb{1}_{A\cap B} \Leftrightarrow \mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)}.$$

   Et donc,

   $$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_{A\cup B} - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A^2 + \mathbb{1}_B^2 - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2.$$

Attention ! Cette propriété

$$\mathbb{1}_{E\setminus F} = \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_F$$

ne vaut que si $F \subset E$.

2. Puisque nous disposons d'une bijection entre les parties de E et leurs fonctions indicatrices, pour prouver que deux parties de E sont égales, il s'agit de prouver qu'elles ont les mêmes fonctions indicatrices.
On a donc

   $$\mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} = (\mathbb{1}_{A\cap B} - \mathbb{1}_{A\cap B})^2 = (\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C)^2. = \mathbb{1}_A^2(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C)^2 = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C} = \mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)}.$$

Solution de l'exercice 10.5

1. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$.
Mais c'est la définition de $x \in f^{-1}(f(A))$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$ et on a donc bien l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$.

   Soit $y \in f(f^{-1}(B))$
   Alors, par définition, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$.
   Mais puisque $x \in f^{-1}(B)$, on a donc $f(x) \in B$, et donc $y = f(x) \in B$.
   Ainsi, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
   Remarque : *il est facile de se convaincre que ces inclusions ne sont pas toujours des égalités.*

Méthode Une bonne habitude, sans que ce soit une obligation est de noter x les éléments de l'espace de départ et y ceux de l'espace d'arrivée. En effet, nous sommes bien plus habitués à $y = f(x)$ qu'à $x = f(y)$.

2. Soit $y \in f(A \cup A')$. Alors il existe $x \in A \cup A'$ tel que $y = f(x)$.
Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$, et de même, si $x \in A'$, alors $y = f(x) \in f(A')$. Donc déjà, $f(A\cup A') \in f(A) \cup f(A')$.
Réciproquement, soit $y \in f(A) \cup f(A')$. Alors si $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, et donc $x \in A \cup A'$, donc $y = f(x) \in f(A \cup A')$.
Et de même, si $y \in f(A')$, alors il existe $x \in A'$ tel que $y = f(x)$, et donc $y \in f(A \cup A')$ car $x \in A \cup A'$.
Donc on a toujours $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$, d'où[4] l'égalité : $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

   Soit $y \in f(A \cap A')$. Alors il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$.
   Et en particulier, $x \in A$, donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même, $x \in A'$ donc $y = f(x) \in f(A')$.
   Ainsi, $y \in f(A) \cap f(A')$, donc $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

[4] Par double inclusion.

Remarque Là encore, l'inclusion n'est pas nécessairement une égalité.

3. Raisonnons directement par équivalence plutôt que par double inclusion : soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cup B') &\Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B \textbf{ ou } f(x) \in B' \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \textbf{ ou } fx \in f^{-1}(B') \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

On a donc directement l'égalité $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
Et de même, en remplaçant les unions par des intersections[5], on prouve que $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

[5] Et donc les **ou** par des **et**.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.6

1. $f(0,0) = 0 = f(1,-1)$, donc f n'est pas injective.
En revanche, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x,0) = x$, donc x possède au moins un antécédent par f : f est surjective.
Étant injective et surjective, elle est bijective.
2. Soient (x,y) et (x',y') deux couples de réels tels que $f(x,y) = f(x',y')$. Alors $(x, x-y, y) = (x', x'-y', y')$ et donc en particulier, $x = x'$ et $y = y'$. Donc $(x,y) = (x',y')$: f est injective.
Montrons qu'elle n'est pas surjective, et que $(0,1,0)$ ne peut admettre d'antécédent.
Supposons qu'il existe $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $f(x,y) = (0,-1,0)$. Alors $(x, x-y, y) = (0,1,0)$, de sorte que $x = y = 0$ et $x - y = 1$, ce qui est impossible.
Nous avons donc exhibé un élément de $\mathbf{R}^3$ qui n'admet pas d'antécédent par f : elle n'est pas surjective.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.7

Commençons par remarquer qu'il n'est pas forcément évident sur la définition que qu'il s'agisse là d'une application qui, sur $\mathbf{U}$, prend ses valeurs dans $\mathbf{U}$. Pour le vérifier, considérons $z \in \mathbf{U}$, et prouvons que $f_a(z) \in \mathbf{U}$.
On a alors

$$|f_a(z)| = f_a(z)\overline{f_a(z)} = \frac{(z+a)(\overline{z}+\overline{a})}{(\overline{a}z+1)(a\overline{z}+A)} = \frac{|z|^2 + a\overline{z} + z\overline{a} + |a|^2}{|az|^2 + a\overline{z} + \overline{a}z + 1} = \frac{1 + a\overline{z} + z\overline{a} + |a|^2}{|a|^2 + a\overline{z} + \overline{a}z + 1} = 1.$$

Donc f_a est bien à valeurs dans $\mathbf{U}$.
Soit à présent $y \in \mathbf{U}$, et cherchons à résoudre l'équation $y = \dfrac{a+z}{\overline{a}z+1}$.
Après calculs[6], on obtient $z = \dfrac{y-a}{1-\overline{a}y}$.
Donc la bijection réciproque de f_a est f_{-a}.

Domaine de déf.
Notons que si l'on demande à ce que $|a| \neq 1$, c'est seulement pour s'assurer que le dénominateur ne s'annule pas sur l'ensemble de définition.

[6] Rien de bien méchant, multipliez tout par le dénominateur, puis isolez z en fonction de y.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.8

1. La fonction f est dérivable car quotient de fonctions dérivables sur $[-1,1]$, et on a $f'(x) = \dfrac{-x^2 - x - 1 + 2x^2 + x}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$.
Donc pour $x \in]-1,1[$, $f'(x) < 0$, de sorte que f est strictement décroissante sur $[-1,1]$.
Étant dérivable, elle est continue, et donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[-1,1]$ sur $[f(1), f(-1)] = \left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$.
Pour déterminer sa bijection réciproque, fixons $y \in \left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$, et cherchons l'unique solution dans $[-1,1]$ à l'équation $y = f(x)$.
Si $y = 0$, cette solution est $x = 0$.
Et si $y \neq 0$, alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow \frac{-x}{x^2+x+1} = y \Leftrightarrow -x = y(x^2+x+1) \Leftrightarrow yx^2 + x(y+1) + y = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta_y = (y+1)^2 - 4y^2 = -3y^2 + 2y + 1$.
Donc l'équation $y = f(x)$ possède deux solutions dans $\mathbf{R}$ qui sont $x_1 = \dfrac{y+1+\sqrt{-3y^2+2y+1}}{2y}$ et $x_2 = \dfrac{y+1-\sqrt{-3y^2+2y+1}}{2y}$.

Remarque
Il n'est pas évident au premier abord que $\Delta_y \geqslant 0$, et il faudrait peut-être une petite étude de fonction pour s'en convaincre. Mais comme nous savons que f est une bijection, l'équation $y = f(x)$ possède au moins une solution dans $\mathbf{R}$, et donc nécessairement $\Delta_y \geqslant 0$.

Mais une seule des deux est inférieure à 1, c'est x_2.
C'est loin d'être clair, mais on peut facilement se convaincre que x_1 tend ver s$\pm\infty$ en 0, et donc ne peut pas convenir.
Bref, admettons que c'est x_2 qui est dans $[-1,1]$. Alors $\forall x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$, on a

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1-\sqrt{-3x^2+2x+1}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. La fonction ch est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, avec $\text{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{ch}(x) = +\infty$.
Donc elle réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.
Soit $y \in [1,+\infty[$, et soit $x \in \mathbf{R}_+$.
On a alors $y = \text{ch}(x)$ si et seulement si

$$e^x + e^{-x} = 2y \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

Posons donc $X = e^x$, de sorte qu'il s'agit de déterminer l'unique solution dans $[1,+\infty[$ de l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2-1)$.
Et donc les deux solutions de cette équation sont $X_1 = \dfrac{2y+2\sqrt{y^2-1}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{2y-2\sqrt{y^2-1}}{2}$.
Puisque $X_1 \geqslant X_2$ et qu'une seule solution[7] de l'équation est dans $[1,+\infty[$, c'est nécessairement X_1.
Donc $e^x = X_1 \Leftrightarrow x = \ln(X_1) = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$ est l'unique solution positive de $\text{ch}(x) = y$.
Et par conséquent, la bijection réciproque de ch est $\text{ch}^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ y & \longmapsto & \ln(y+\sqrt{y^2-1}) \end{array} \right.$.

Détails
$[1,+\infty[$ est l'image de $\mathbf{R}_+$ par la fonction exponentielle.

[7] Ce qui provient de la bijectivité.

Solution de l'exercice 10.9

1. Rappelons que f est injective si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

La négation de cette proposition est donc

$$\exists (x,y) \in E^2,\ x \neq y \text{ ET } f(x) = f(y).$$

2. La proposition f est surjective s'écrit

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Sa négation est donc

$$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) \neq y.$$

Ce qui signifie encore qu'il existe un élément de F qui n'admet pas d'antécédent par f.

3. $\forall z \in F,\ \exists (x,y) \in E^2, (x \neq y) \text{ ET } f(x) = f(y) = z.$

Solution de l'exercice 10.10

On a $f(x,y) = f(y,x)$, donc clairement, f n'est pas injective.
Soit $(s,p) \in \mathbf{R}^2$. Pour trouver $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(x,y) = (s,p)$, il suffit de trouver les deux racines de $X^2 - sX + p = 0$. Mais si $s^2 - 4p < 0$, cette équation n'admet pas de solution.

Solution de l'exercice 10.11

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $f(n) = n+1 \neq 0$ et donc $g(f(n)) = (n+1) - 1 = n$.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g \circ f = \text{id}_{\mathbf{N}}$.

De même, pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $g(n) = n-1$ et donc $f(g(n)) = n$.
En revanche, pour $n = 0$, on a $g(n) = 0$ et donc $f(g(n)) = 1$.
Ainsi, $(f \circ g) : n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$.

Remarque
Cet exemple montre bien que pour que deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ soient bijections réciproques l'une de l'autre, on ne peut pas se contenter de prouver que $g \circ f = \text{id}_E$, il faut bien avoir également $f \circ g = \text{id}_F$.

2. L'application f n'est pas bijective, car son image est $\mathbf{N}^*$ et non $\mathbf{N}$, elle n'est donc pas surjective (bien qu'elle soit injective).
L'application g n'est quant à elle pas injective car $g(1) = g(0) = 0$. En revanche, elle est surjective.

Solution de l'exercice 10.12

Raisonnons par double implication.
► Supposons que f soit injective.
Alors pour tout $x \in E$, on a $f(x) = f(f(f(x)))$ et donc $x = (f \circ f)(x)$.
Autrement dit, $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Et donc f est bijective, et $f^{-1} = f$: f est une involution.
Et en particulier, f est surjective.

► Inversement, supposons f surjective.
Soient alors $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$.
Par surjectivité de f, y possède un antécédent par f : il existe $x_1 \in E$ tel que $x = f(x_1)$.
Mais x_1 lui-même possède un antécédent dans E : il existe x_2 dans E tel que $x_1 = f(x_2)$ et donc $x = f(f(x_2))$ et $f(x) = f(f(f(x_2)))$.
De même, y possède un antécédent y_1 qui possède lui-même un antécédent y_2, de sorte que $f(y) = f(f(f(y_2)))$.
Mais puisque $f(x) = f(y)$, on a donc $f(f(f(x_2))) = f(f(f(y_2)))$. Et puisque $f \circ f \circ f = f$, il vient donc $f(x_2) = f(y_2)$. Soit encore $x_1 = y_1$, et donc $x = f(x_1) = f(y_1) = y$.
Ainsi, nous venons de prouver que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$: f est injective.

Et donc au final f est injective si et seulement si elle est surjective[8].

[8] Et donc si et seulement si elle est bijective.

Solution de l'exercice 10.13

1. **Faux.** Une application surjective n'est pas nécessairement injective.
Par exemple $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est surjective mais non bijective.
2. **Faux.** Dès que f n'est pas injective (et nous venons de voir un exemple de telle fonction), elle ne peut être bijective, même si on restreint l'ensemble d'arrivée.
3. **Vrai.** Par définition de l'image, tout élément de $f(E)$ possède au moins un antécédent par f. Si de plus on suppose f injective, alors un tel antécédent est unique, et donc f réalise une bijection de E sur $f(E)$.

Espace d'arrivée
Rappelons que lorsque l'on dit «sur $f(E)$», cela sous-entend, même si on ne le dit généralement pas explicitement, que l'on parle de la corestriction de f à $f(E)$.

4. **Faux** Prenons pour f la fonction Arctan : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et pour g l'identité de $\mathbf{R}$. Alors f est injective (car strictement croissante), g est surjective (car bijective), mais $g \circ f = \text{Arctan}$ n'est pas bijective.
5. **Vrai.** On a $(g \circ f)^3 = g \circ (f \circ g \circ f \circ g \circ f)$ qui est surjective (car bijective), et donc g est surjective.
De même, $(g \circ f)^3 = (g \circ f \circ g \circ f \circ g) \circ f$ est injective (car bijective), donc f es injective.
6. **Vrai.** Voir exercice 5.
7. **Vrai.** Nous venons de voir qu'une inclusion est déjà vraie, prouvons l'inclusion réciproque.
Soit $y \in B$. Alors, par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et donc, par définition, un tel x est dans $f^{-1}(B)$.
On a alors $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$.
Et donc $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$.

Remarque
En revanche, si f n'est pas surjective, cette proposition est fausse dès que B contient un élément qui n'est pas dans l'image de f.

8. **Faux.** Si f désigne la fonction carré. Alors $f(\{2\}) = \{4\}$, mais $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$.
9. **Vrai.** Soit $y \in f\left(\overline{A}\right)$.
Alors il existe $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$.
Supposons par l'absurde que $y \in f(A)$. Alors il existe $x' \in A$ tel que $y = f(x')$. Mais par injectivité de f, $x = x'$, ce qui est impossible puisque $x \in \overline{A}$ et $x' \in A$.
Donc $y \notin f(A) \Leftrightarrow y \in \overline{f(A)}$.
10. **Vrai.** On a
$$x \in \overline{f^{-1}(B)} \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Solution de l'exercice 10.14

Il est clair que $\mathrm{id}_{\mathbf{N}}$ est une solution, montrons que c'est la seule.
Soit donc $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une injection telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leqslant n$.

Alors $f(0) \leqslant 0$, donc $f(0) = 0$.
De même, $f(1) \leqslant 1$, donc $f(1) \in \{0, 1\}$. Mais on ne peut avoir $f(1) = 0 = f(0)$, car cela contredirait l'injectivité de f. Donc $f(1) = 1$.
Montrons par récurrence forte sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$.
La récurrence est largement initialisée.
Supposons donc que pour tout $k \leqslant n$, $f(k) = k$.
Alors $f(n+1) \leqslant n+1$, donc $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!]$.
Mais on ne peut avoir $f(n+1) = \ell$, avec $\ell \in [\![0, n]\!]$, car alors on aurait $f(n+1) = \ell = f(\ell)$, contredisant l'injectivité de f.
Donc $f(n+1) = n+1$, et donc par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$.

Solution de l'exercice 10.15

Procédons par double implication.
► Supposons dans un premier temps que f soit bijective, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
Soit alors $y \in \overline{f(A)}$. Alors y admet un unique antécédent par f, qui est $x = f^{-1}(y)$. Nécessairement, x ne peut être dans A, faute de quoi on aurait $y = f(x) \in f(A)$.
Donc $x \in \overline{A}$, et par conséquent, $y = f(x) \in f\left(\overline{A}\right)$. Ceci prouve donc déjà que $\overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$.
De même, soit $y \in f\left(\overline{A}\right)$. Alors l'unique antécédent de y est $x = f^{-1}(y)$, qui par hypothèse est dans $\overline{A}$.
Donc f ne peut pas être l'image d'un élément de A, car cet élément serait nécessairement $x \notin A$.
Donc $y \in \overline{f(A)}$, de sorte que $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.
Par double inclusion, on a donc $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

Danger !
On touche là aux limites de la notation $\overline{A}$ pour le complémentaire : l'ensemble dans lequel on prend le complémentaire doit être clair, car il n'est pas écrit.
Ici, c'est E lorsqu'on parle de A (qui est inclus dans E), mais F lorsqu'on parle de $f(A)$ (qui est inclus dans F).

► Inversement, supposons que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
En particulier, pour $A = \emptyset$, on obtient

$$f(\overline{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} = \overline{\emptyset} \Leftrightarrow f(E) = F.$$

Donc déjà, f est surjective.

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
Soit alors $A = \{x\}$, de sorte que $f(A)$ est le singleton $\{f(x)\}$.
Alors $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)} = F \setminus \{f(x)\}$.
Puisque $f(y) = f(x) \notin F \setminus \{f(x)\}$, on en déduit que $f(y) \notin f\left(\overline{A}\right)$.
Et donc y, qui est un antécédent de $f(y)$, ne peut appartenir à $\overline{A}$, et donc appartient à A.
Mais A ne contient qu'un élément, qui est x, de sorte que $y = x$.
Et donc f est injective, et par conséquent bijective.

Remarque
Avez-vous remarqué qu'il n'y a aucun besoin de raisonner par l'absurde ici ?

Solution de l'exercice 10.16

Supposons que f soit injective. Alors $\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap A, \overline{A} \cap \overline{B} \cap A\right) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$.
Et donc $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.
En passant au complémentaire, cela nous donne $A \cup B = \overline{\emptyset} = E$.

Inversement, supposons que $A \cup B \neq E$, et soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Alors $f(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$, et donc f n'est pas injective.
Ainsi, f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

Supposons à présent f surjective, et soit $x \in A$. Alors $(\{x\}, \emptyset) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ possède un antécédent par f : il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = (\{x\}, \emptyset)$.
Soit encore $\begin{cases} X \cap A = \{x\} \\ X \cap B = \emptyset \end{cases}$.
Alors $x \in X$, et puisque $X \cap B = \emptyset$, alors $x \notin B$.
Ainsi, nous venons de prouver que $x \in A \Rightarrow x \notin B$, et donc $A \cap B = \emptyset$.
Inversement, supposons que $A \cap B = \emptyset$, et montrons que f est surjective.
Soit donc $(A_1, B_1) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$, et soit $X = A_1 \cup B_1 \in \mathscr{P}(E)$.
Alors

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B) = ((A_1 \cup B_1) \cap A, (A_1 \cup B_1) \cap B) = ((A_1 \cap A) \cup (B_1 \cap A), (A_1 \cap B) \cup (B_1 \cap B)).$$

Mais puisque $B_1 \subset B$ et que $A \cap B = \emptyset$, $B_1 \cap A = \emptyset$. Et puisque $A_1 \subset A$, $A_1 \cap A = A_1$.
Et de même, $A_1 \cap B = \emptyset$ et $B_1 \cap B = B_1$.
Et donc $f(X) = (A_1, B_1)$, de sorte que (A_1, B_1) possède un antécédent par f.
Ceci étant vrai pour tout élément de $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$, f est surjective.

Et par conséquent, f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective, donc si et seulement si $\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = E \end{cases}$, soit si et seulement si (A, B) forme une partition de E, ou que l'une des deux est vide et l'autre égale à E.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.17

Il est évident que id convient.

Soit f une application de $\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ vérifiant la condition requise.
Alors $(\mathrm{id} + f + f^2) \circ f = 3\mathrm{id}$ est injective.
Et donc f est injective.
Montrons par récurrence forte sur k que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f(k) = k$.
On a $f(1) + f(f(1)) + f(f(f(1))) = 3$.
Or, chacun des entiers $f(1)$, $f^2(1)$ et $f^3(1)$ est supérieur ou égal à 1, et donc ils sont nécessairement tous trois égaux à 1.
Et en particulier, $f(1) = 1$, ce qui initialise la récurrence.

Rappel
Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Supposons que pour tout $n \leqslant k$, $f(n) = n$.
Alors $f(k+1) + f^2(k+1) + f^3(k+1) = 3(k+1)$.
Puisque f est injective, et que $f(1) = 1, f(2) = 2, \dots, f(k) = k$, $f(k+1) \geqslant k+1$.
Et donc, toujours par injectivité de f, $f(f(k+1)) \geqslant k+1$ et $f(f(f(k+1))) \geqslant k+1$.
Par conséquent, on doit avoir $f(k+1) = k+1$, $f(f(k+1)) = k+1$ et $f(f(f(k+1))) = k+1$.
Et puisque $f(k+1) = k+1$, nous venons de prouver l'hérédité.
Par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f(k) = k$, et donc $f = \mathrm{id}$.

Ainsi, $f = \mathrm{id}$ est la seule application vérifiant la relation demandée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.18

▸ **Réflexivité** : puisque pour tout $p \in \mathbf{N}$, $p = p^1$, $\preccurlyeq$ est réflexive.
▸ **Antisymétrie** : soient $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq p$.
Alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $q = p^n$ et il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p = q^m$.
Et donc $p = (p^n)^m = p^{nm}$.
Si $p = 0$, alors $q = 0$, et donc $p = q$.
Si $p = 1$, alors $q = p^n = 1$, donc $p = q$.
Si $p \notin \{0, 1\}$, alors $1 = p^{mn-1}$, de sorte que $mn - 1 = 0 \Leftrightarrow mn = 1 \Leftrightarrow m = n = 1$. Et donc une fois de plus, $p = q$.
Donc $\preccurlyeq$ est antisymétrique.

Attention !
m et n n'ont aucune raison d'être égaux !

▸ **Transitivité** : supposons à présent que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq r$. Alors il existe deux entiers n et m tels que $q = p^n$ et $r = q^m$. Et donc $r = (p^n)^m = p^{nm}$, de sorte que $p \preccurlyeq r$. Et donc la relation $\preccurlyeq$ est transitive.
Ainsi, nous avons bien une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$.

Cet ordre n'est pas total, car on n'a ni $2 \preccurlyeq 3$ (car 3 n'est pas une puissance de 2), ni $3 \preccurlyeq 2$ (car 2 n'est pas une puissance de 3).

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.19

Soient x, y deux éléments de E tels que $x\mathscr{R}y$. Alors par réflexivité[9]Qui provient du fait qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. de $\mathscr{R}$, $y\mathscr{R}x$.
Mais puisque $\mathscr{R}$ est antisymétrique[10], on a donc $x = y$.
Et donc les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ sont toutes des singletons.

Si on suppose de plus que $\mathscr{R}$ est total, soient alors x et y deux éléments de E. On a alors soit $x\mathscr{R}y$, soit $y\mathscr{R}x$.
Mais alors d'après ce qui précède, $x = y$. Et donc E ne possède qu'un seul élément.
Et inversement, sur un singleton, il n'existe qu'une relation d'équivalence[11], qui est alors une relation d'ordre total.

[9] 5mm

[10] Car relation d'ordre.

[11] Et même une seule relation réflexive : c'est $\mathscr{R} = E \times E$.

Solution de l'exercice 10.20

Pour $z \in \mathbf{C}$, on a $|z| = |z|$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Si $|z_1| = |z_2|$ et $|z_2| = |z_3|$, alors $|z_1| = |z_3|$, donc $\mathcal{R}$ est transitive.
Enfin, il est évident que $|z| = |z'| \Leftrightarrow |z'| = |z|$, et donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
Ainsi, nous sommes bien en présence d'une relation d'équivalence.

Soit $z_1 \in \mathbf{C}$, et soit $r = |z_1|$ le module de z.
Alors la classe d'équivalence de z_1 est $\{z \in \mathbf{C}, |z| = r\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points qui sont à distance r de l'origine : c'est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r.
Notons que le cas de la classe d'équivalence de 0 est un peu particulier : elle ne contient que 0, ce qui peut être vu comme un cercle de rayon 0.

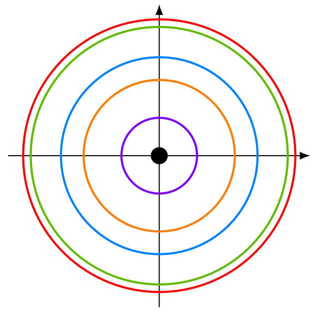


Figure 10.2– Les classes qu'équivalence sont disjointes, et forment une partition de $\mathbf{C}$ (bien que toutes ne tiennent pas dans la marge...)

Solution de l'exercice 10.21

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $xe^x = xe^x$, et donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x\mathcal{R}y$. Alors $xe^y = ye^x$ et donc $ye^x = xe^y$, donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
Enfin, soient $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors $xe^y = ye^x \Leftrightarrow xe^{-x} = ye^{-y}$, et de même $ye^{-y} = ze^{-z}$. Et donc $xe^{-x} = ze^{-z} \Leftrightarrow xe^z = ze^x$, de sorte que $x\mathcal{R}z$.
Par conséquent, $\mathcal{R}$ est transitive, et donc est une relation d'équivalence.

2. Notons que comme mentionné précédemment, on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y ont la même image par $f : t \mapsto te^{-t}$.
La classe d'équivalence de x est donc l'ensemble des réels ayant même image par f que x.
Étudions rapidement la fonction f : elle est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée égale à $f' : t \mapsto (1-t)e^{-t}$, et donc son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

L'image de f est donc $]-\infty, e^{-1}]$, et il est facile de constater que tous les éléments de $]-\infty, 0] \cup \{e^{-1}\}$ possèdent un unique antécédent par f et que ceux de $]0, e^{-1}[$ possèdent deux antécédents[12] par f.
Et donc les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ sont de cardinal 1 ou 2.

[12] Un dans $]0, 1[$ et un dans $]1, +\infty[$.

Plus précisément : la classe d'un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ est de cardinal 2, les autres sont de cardinal 1.

Solution de l'exercice 10.22

1. ▶ **Réflexivité** : soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Alors $X \cap X = X \cap X$.
▶ **Symétrie** : soient X et Y deux parties de E telles que $X \sim Y$. Alors $X \cap A = Y \cap A \Leftrightarrow Y \cap A = X \cap A \Leftrightarrow Y \sim X$.
▶ **Transitivité** : soient XY et Z trois parties de E telles que $X \sim Y$ et $Y \sim Z$. Alors $X \cap A = Y \cap A = Z \cap A$, et donc en particulier $X \cap A = Z \cap A$: $\sim$ est transitive.

2. Notons F l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & F \\ B & \longmapsto & \overline{B} \end{array} \right.$, qui à une partie de A associe sa classe d'équivalence.
Alors f est surjective. En effet, si $X \in \mathcal{P}(E)$, notons alors $B = A \cap X$, qui est une partie de A, pour laquelle $A \cap B = B = A \cap X$.
On a donc $B \sim X$, de sorte que la classe d'équivalence de B (c'est à dire $f(B)$) n'est autre que celle de X. Donc toute classe d'équivalence de $\sim$ est dans l'image de f.

Remarque
Une partie de A est en particulier une partie de E.

Prouvons à présent que f est injective : soient B, B' deux parties de A telles que $f(B) = f(B')$, c'est-à-dire telles que $\overline{B} = \overline{B'}$, soit encore telles que $B \sim B'$.
Alors $B \cap A = B' \cap A$. Mais $B \subset A$, donc $B \cap A = B$, et de même $B' \cap A = B'$.
Et donc $B = B'$: f est injective.

Ainsi, f réalise une bijection de $\mathcal{P}(A)$ sur l'ensemble[13] des classes d'équivalence de $\sim$.

[13] Appelé quotient de $\mathcal{P}(E)$ par $\sim$, et noté $E/\sim$.

Solution de l'exercice 10.23

Soient x, y deux éléments distincts de E. Supposons que $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$ possède un plus grand élément X.
Alors $E \setminus \{x\} \subset X$.
D'autre part, $E \setminus \{y\}$ est aussi inclus dans X. En particulier, x, qui est dans $E \setminus \{y\}$ appartient à X.
Et donc $E = (E \setminus \{x\}) \cup \{x\} \subset A$. Et par conséquent, $A = E$, ce qui est contradictoire avec le fait que $A \in \mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$.

Remarque
E est alors un élément de $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$, c'est-à-dire une partie de E qui n'est pas égale à E tout entier.

Et donc $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$ ne possède pas de plus grand élément pour l'inclusion.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.24

Raisonnons par l'absurde, et supposons que E soit infini.
On définit alors une suite par :

$$x_0 = \min E,\ x_1 = \min E \setminus \{x_0\},\ x_2 = \min E \setminus \{x_0, x_1\}$$

Autrement dit
x_0 est le plus petit élément de E, x_1 le «deuxième» plus petit, etc.

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = \min E \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.
Notons que cette suite est bien définie, puisqu'à chaque étape, E étant infini, on a bien $E \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ qui est non vide, et donc admet un plus petit élément.
Soit alors $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
Alors A ne peut pas admettre de plus grand élément.
En effet, la suite (x_n) est croissante, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = \min E \setminus \{x_0, \cdots, x_{n-1}\}$ et $x_{n+1} \in E \setminus \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset E \setminus \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, donc $x_n \leqslant x_{n+1}$.
Mieux, elle est strictement croissante, au sens où $x_n \leqslant x_{n+1}$, mais $x_{n+1} \neq x_n$ (puisque $x_{n+1} \in E \setminus \{x_0, \cdots, x_n\}$).

Supposons alors que A possède un plus grand élément a. Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $x_{n_0} = a$. Et alors, $a < x_{n_0+1}$ (par stricte croissance de la suite), mais $x_{n_0+1} \leqslant a$ (par définition d'un plus grand élément).
Ceci n'est pas possible. On en déduit donc que E est infini.

Remarques : *le fait que E soit infini a en fait ici été utilisé pour dire qu'à chaque étape, $E \setminus \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ est non vide. Si E était fini, on pourrait faire de même, mais au bout d'un certain nombre d'étapes (égal au cardinal de E), il n'y aurait plus rien dans $E \setminus \{x_0, \cdots, x_{n-1}\}$, et donc on ne pourrait pas aller plus loin.*

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.25

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons $E_n = \left[-\frac{1}{n}, n\right]$, de sorte que $A = \{E_n,\ n \in \mathbf{N}^*\}$.
Si m et n sont deux entiers non nuls distincts, alors E_n et E_m ne sont pas comparables au sens où aucun des deux n'est inclus[14] que l'autre.
Donc A ne peut avoir ni plus grand, ni plus petit élément, car un tel élément serait comparable à tous les éléments de A.

[14] C'est-à-dire plus petit au sens de l'inclusion.

En revanche, tous les A_n sont inclus[15] dans $[-1, +\infty[$.
Donc pour la relation d'inclusion, $[-1, +\infty[$ est un majorant de A.
Et inversement, si B est un majorant de A, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $A_n \subset B$.
Donc $[-1, 0] \subset A_1 \subset B$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $[0, n] \subset A_n \subset B$.
Donc $[1, +\infty[= [-1, 0] \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} [0, n] \subset B$.
Et donc $[1, +\infty[$ est bien le plus petit des majorants de A : c'est la borne supérieure de A.

[15] Donc plus petits.

De même, on prouve que $[0, 1] = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} A_n$ est un minorant de A, et que c'est le plus petit, donc qu'il s'agit de sa borne inférieure.

Remarque : *plus généralement, on prouve que tout ensemble X formé de parties de E possède une borne supérieure et une borne inférieure pour l'inclusion, qui sont respectivement $\bigcup_{A \in X} A$ et $\bigcap_{A \in X} A$.*