# TD 11 : Réels

**Exercice 11.1** Soient $A, B$ deux parties de $\mathbf{R}$, non vides, avec $B$ majorée et $A \subset B$. PD
Montrer que $A$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

**Exercice 11.2** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides minorées de $\mathbf{R}$. AD

1. Montrer que $A \cup B$ est minorée, et montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
2. Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $\max(\inf(A), \inf(B)) \leqslant \inf(A \cap B)$. Est-ce toujours une égalité ?
3. On pose $A + B = \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que $A + B$ est minorée et que $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

**Exercice 11.3 Parties adjacentes de R** AD
Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbf{R}$. On suppose que

$$\forall (a, b) \in A \times B,\ a \leqslant b \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a, b) \in A \times B, b - a < \varepsilon.$$

Montrer que $A$ admet une borne supérieure, $b$ admet une borne inférieure et $\sup(A) = \inf(B)$.

**Exercice 11.4 Limites inférieures et supérieures d'une suite bornée** AD
Soit $(u_n)$ une suite de réels telle qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leqslant M$ (on dit que $(u_n)$ est bornée). On définit alors deux nouvelles suites par $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$v_n = \sup\{u_k,\ k \geqslant n\} \text{ et } w_n = \inf\{u_k,\ k \geqslant n\}.$$

1. Montrer que les suites $v_n$ et $w_n$ sont bien définies.
2. Étudier les monotonies de $(v_n)$ et $(w_n)$.
3. En déduire que ces deux suites convergent.
4. Montrer que si $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - w_n) = 0$, alors $(u_n)$ converge.

**Exercice 11.5** Soit $A$ une partie majorée de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux éléments. On suppose que $x \in A$ et $x \neq \sup A$. AD
Montrer que $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.

**Exercice 11.6 Endomorphismes croissants de $(\mathbf{R}, +)$** AD
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
On pose $\alpha = f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(n) = \alpha n$.
4. Montrer que pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha r$.
5. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$, à valeurs rationnelles, de limite $x$, telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
   (b) On suppose $f$ croissante. Montrer que $f(x) = \alpha x$.
6. Déterminer toutes les applications croissantes $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

# Correction des exercices du TD 11

## Solution de l'exercice 11.1

Soit $M = \sup(B)$. Alors $M$ est un majorant de $B$, et donc de $A$, qui est donc une partie majorée de $\mathbf{R}$.
Elle admet donc une borne supérieure, qui est le plus petit de ses majorants.
Mais $M$ étant un majorant de $A$, $\sup(A) \leqslant M$.

## Solution de l'exercice 11.2

**1.** Soit $m = \min(\inf A, \inf B)$, et soit alors $x \in A \cup B$.
▸ Si $x \in A$, alors $x \geqslant \inf A \geqslant m$.
▸ Si $x \in B$, alors $x \geqslant \inf B \geqslant m$.
Donc $m$ est un minorant de $A \cup B$, de sorte que $\inf(A \cup B)$ existe, et $\inf(A \cup B) \geqslant m$.

Soit à présent $\varepsilon > 0$. Alors $m + \varepsilon > m$.
▸ Si $m = \inf A$, alors il existe $x \in A$ tel que $m \leqslant x < m + \varepsilon$.
▸ Si $m = \inf B$, alors il existe $x \in B$ tel que $m \leqslant x < m + \varepsilon$.
Dans les deux cas, il existe $x \in A \cup B$ tel que $m \leqslant x < m + \varepsilon$, ce qui prouve bien[1] que $m = \inf(A \cup B)$.

[1] On a déjà dit que $m$ est un minorant de $A \cup B$.

**2.** Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$, et donc $x \geqslant \inf(A)$ et $x \in B$ donc $x \geqslant \inf B$.
Par conséquent, $x \geqslant \max(\inf A, \inf B)$
Ainsi, $A \cap B$ est minorée par $\max(\inf A, \inf B)$, et en particulier est minorée et possède une borne inférieure.
Cette borne inférieure étant le plus grand des minorants, on a donc $\inf(A \cup B) \geqslant \max(\inf A, \inf B)$.
Il ne s'agit pas toujours d'une égalité, comme le prouve l'exemple $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, car alors $\inf(A \cap B) = \min(A \cap B) = 2$ et $\max(\inf A, \inf B) = 1$.

**Logique !**
Être plus grand que deux nombres c'est être plus grand que le maximum des deux.

**3.** Soit $x \in A + B$. Alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$.
Et donc $x \geqslant \inf(A) + \inf(B)$. Donc $A + B$ est minorée, par $\inf(A) + \inf(B)$, et donc possède une borne supérieure, qui est donc[2] supérieure ou égale à $\inf(A) + \inf(B)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $\inf(A) \leqslant a < \inf(A) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
De même, il existe $b \in B$ tel que $\inf(B) \leqslant b < \inf(B) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Et donc il existe $x = a + b \in A + B$ tel que $\inf(A) + \inf(B) \leqslant a + b < \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$.
On reconnaît alors la caractérisation d'une borne inférieure : $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

[2] Encore une fois : la borne inférieure est le plus grand des minorants.

## Solution de l'exercice 11.3

Puisque $B$ est non vide, il existe au moins un élément dans $B$, qui est alors un majorant de $A$. Donc $A$ est majorée, non vide par hypothèse, et par conséquent admet une borne supérieure.
De même, tout élément de $A$ est un minorant de $B$, qui admet donc une borne inférieure.
Montrons que $\sup(A) \geqslant \inf(B)$.
Supposons par l'absurde que $\sup(A) < \inf(B)$, et soit alors $\varepsilon = \inf(B) - \sup(A) > 0$.
Alors, $\exists (a, b) \in A \times B$ tels que $b - a < \varepsilon \Leftrightarrow b < a + \varepsilon$. Mais alors

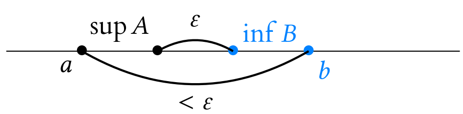


Figure 11.1 – On ne peut avoir $\sup A < \inf B$.

$$\inf(B) \leqslant b < a + \varepsilon \leqslant \sup(A) + \varepsilon = \inf(B).$$

Ceci est absurde, donc $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
On en déduit donc que $\sup(A)$ est un minorant de $B$, puisque plus petit que le plus grand des minorants de $B$.

Supposons à présent que $\sup(A) > \inf(B)$, et soit $\varepsilon = \dfrac{\sup(A) - \inf(B)}{2}$.
Alors, par définition d'une borne supérieure, il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < a \leqslant \sup(A)$.
Et de même, il existe $b \in B$ tel que $\inf(B) \leqslant b < \inf(B) + \varepsilon$.

Mais alors, on a $a > \sup(A) - \dfrac{\sup(A) - \inf(B)}{2} = \dfrac{\sup(A) + \inf(B)}{2}$.

Et de même, $b < \dfrac{\sup(A) + \inf(B)}{2}$.

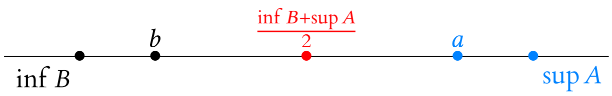


FIGURE 11.2 – On ne peut avoir $\inf B < \sup A$.

**Remarque**
Les $\varepsilon$ ici viennent tous de la caractérisation de borne sup/inf, et la seule hypothèse de l'énoncé utilisé est que tous les éléments de $A$ sont inférieurs à ceux de $B$.

On en déduit donc que $b < a$, contredisant l'hypothèse faite sur $A$ et $B$.
Et donc $\sup(A) = \inf(B)$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 11.4

Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

1. Il s'agit donc de prouver qu'à chaque étape, les bornes inférieures et supérieures de $\{u_k,\ k \geqslant n\}$ existent bien.
Soit donc $n \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $k \geqslant n$, $-M \leqslant u_k \leqslant M$, et donc l'ensemble $\{u_k,\ k \geqslant n\}$ est majoré (par $M$) et minoré (par $-M$).
Il admet donc une borne supérieure et une borne inférieure, de sorte que $(v_n)$ et $(w_n)$ sont bien définies.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $\{u_k,\ k \geqslant n+1\} \subset \{u_k,\ k \geqslant n\}$. Et donc d'après le résultat de l'exercice 1,
$$v_{n+1} = \sup\{u_k,\ k \geqslant n+1\} \leqslant \sup\{u_k,\ k \geqslant n\} = v_n.$$
Donc $(v_n)$ est décroissante.
On prouve de même que $(u_n)$ est croissante.

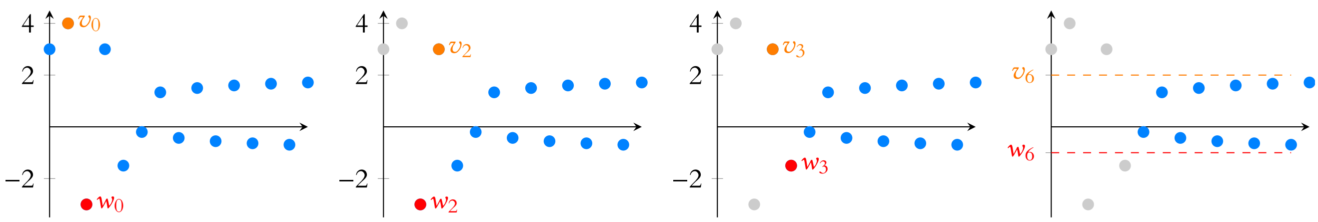


FIGURE 11.3 – Au rang $n$, on ne s'intéresse qu'aux termes de la suite situés à droite de $u_n$.

3. Il a déjà été prouvé qu'un majorant de $(u_n)$ majore $\{u_k,\ k \geqslant n\}$ pour tout $n$, et donc majore $w_n$.
Donc la suite $(w_n)$ est croissante et bornée, donc[3] convergente. On raisonne de même pour $(v_n)$.
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$. En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \{u_k,\ k \geqslant n\}$...
Mais si les deux suites $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent, et que leur différence tend vers 0, elles convergent vers la même limite.
Et donc par le théorème d'encadrement, $(u_n)$ est convergente, et tend également vers la limite commune à $(v_n)$ et $(w_n)$.

[3] Par le thépréme de la limite monotone.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 11.5

On a déjà $A \setminus \{x\} \subset A$, donc si $y \in A \setminus \{x\}$, alors $y \leqslant \sup A$. Donc $A \setminus \{x\}$ est borné, et $\sup(A \setminus \{x\}) \leqslant \sup A$.
Pour tout $y$ vérifiant, $x < y < \sup A$, $y$ n'est pas un majorant de $A$, donc il existe $a \in A$ tel que $a \geqslant y$. Mais alors $a \neq x$, et donc $a \in A \setminus \{x\}$. On a donc $\sup(A \setminus \{x\}) \geqslant y$, et donc $\sup(A \setminus \{x\}) \geqslant \sup A$. On a donc bien
$$\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 11.6

**1.** On a doit avoir, en prenant $x = y = 0$, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$.
Et donc $f(0) = 0$.

**2.** On a déjà $f(0) = 0 = 0\alpha$ et $f(1) = \alpha$.
Il vient ensuite $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2\alpha$.
Prouvons par récurrence sur $n$ que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n\alpha$.
La récurrence est largement initialisée. Supposons donc que $f(n) = n\alpha$.
Alors $f(n+1) = f(n) + f(1) = n\alpha + \alpha = (n+1)\alpha$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n\alpha$.

**3.** Pour $n \in \mathbf{N}$, le résultat a déjà été prouvé.
Soit donc $n$ un entier négatif.
Alors $f(n) + f(-n) = f(n + (-n)) = f(0) = 0$.
Et donc $f(n) = -f(-n)$. Mais $-n \in \mathbf{N}$, et donc d'après la question précédente, $f(-n) = -n\alpha$.
Et donc $f(n) = n\alpha$.

**4.** Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$. Alors $f(2r) = f(r) + f(r) = 2f(r)$.
Puis $f(2r) = f(r + 2r) = f(r) + f(2r) = f(r) + 2f(r) = 3f(r)$.
Une récurrence facile prouve alors que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f(kr) = kf(r)$.
Et donc en particulier, $f(p) = f(qr) = qf(r)$. Puisque $p \in \mathbf{Z}$, nous savons que $f(p) = \alpha p$, et donc $f(r) = \frac{1}{q}f(p) = \alpha\frac{p}{q} = \alpha r$.

**5.a.** Nous pourrions prendre pour $a_n$ l'approximation décimale par défaut de $x$, et pour $b_n$ son approximation décimale par excès. Mais il nous faudrait alors prouver qu'elles convergent vers $x$. Ce n'est pas bien dur, mais essayons autre chose.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors l'intervalle ouvert $\left]x - \frac{1}{n}, x\right[$ contient au moins un rationnel. Choisissons-en un, et appelons-le $a_n$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant x$, de sorte que par le théorème des gendarmes, nécessairement $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. De même, en choisissant $b_n$ rationnel dans $\left]x, x + \frac{1}{n}\right[$, on construit une suite de rationnels, supérieure à $x$, de limite $x$.

**5.b.** Si $f$ est croissante, alors on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(a_n) \leqslant f(x) \leqslant f(b_n)$.
Mais $a_n$ et $b_n$ étant rationnels, on peut leur appliquer le résultat de la question 4 : $f(a_n) = \alpha a_n$ et $f(b_n) = \alpha b_n$.
Donc $\alpha a_n \leqslant f(x) \leqslant \alpha b_n$.
En passant à la limite, il vient donc $f(x) = \alpha x$.

**6.** Nous venons de prouver qu'une telle fonction est nécessairement de la forme $x \mapsto \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$.
Inversement, pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $f : x \mapsto \alpha x$ vérifie bien

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = f(x) + f(y)$$

et elle est croissante si et seulement si $\alpha \geqslant 0$.
Donc les fonctions cherchées sont les $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

⚠ Attention !
Ne pas oublier la synthèse !