TD 12 : Suites numériques

▶ Convergence des suites

Exercice 12.1 Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$, telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. **F**
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 12.2 Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$ est convergente si et seulement si elle est stationnaire. **PD**
Que dire alors de la limite de (u_n) ?

Exercice 12.3 Théorème des segments emboîtés **PD**
Soit $([a_n, b_n])_n$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments non vides de $\mathbf{R}$ et dont les longueurs tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.

Exercice 12.4 Vrai ou Faux ? **PD**
Toutes les suites considérées ici sont réelles.

1. toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. le produit de deux suites minorées est minorée.
3. une suite qui tend vers $-\infty$ est majorée.
4. si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n > \alpha > 0$ et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell > 0$.
5. toute suite convergente est minorée.
6. une suite strictement croissante et minorée tend vers $+\infty$.
7. soit (u_n) une suite réelle. Si $u_n^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
8. Soit (u_n) une suite réelle. Si $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
9. $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 12.5 Déterminer les limites des suites dont le terme général est donné par : **PD**

1. $\dfrac{1-\sin^2(2n)}{\sqrt{n}}$
2. $\sqrt{n}\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$
3. $\dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+2kn\sin(k)}{2n^4+n^2\ln(k)}$
6. $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, $a, b \in \mathbf{R}_+^*$

Exercice 12.6 Quelques séries de Riemann **PD**

1. Soit $\alpha \geqslant 2$. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

   Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, et en déduire que (u_n) converge.
2. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_{2n} - v_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 12.7 **PD**

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire la limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

   Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge, et calculer sa limite.

Exercice 12.8 Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$. **AD**

1. Prouver que (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.
2. En calculant de deux manières la somme $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2}\right)$, montrer que $\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 12.9 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. **AD**

1. Montrer que (u_n) est convergente, et que sa limite ℓ est dans le segment $[0,1]$.
2. Montrer que pour tout n, $u_{2n} < \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 12.10 Lemme de Cesaro **AD**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite réelle. On pose alors, pour $n\geqslant 1$, $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$.

1. On suppose dans cette question uniquement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   (a) Justifier qu'il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $\left|\frac{u_{n_0}+\cdots+u_n}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) Prouver qu'il existe $n_1\in\mathbf{N}$ tel que pour $n\geqslant n_1$, $\left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   (c) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que si (u_n) converge, alors (v_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Réciproquement, est-il vrai que si (v_n) converge, alors (u_n) converge ?

Exercice 12.11 **AD**

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, l'équation $x^n = \cos(x)$, d'inconnue $x\in[0,1]$ possède une unique solution, que l'on notera x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, et le cas échéant, préciser sa limite.

Exercice 12.12 Pour $n\in\mathbf{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$. **AD**

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On pose $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que (v_n) converge.
3. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 12.13 Règle de d'Alembert **AD**

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell\in\mathbf{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. On suppose que $\ell > 1$. Montrer qu'il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $u_{n+1} > \frac{1+\ell}{2}u_n$.
   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. On suppose que $\ell < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. Donner des exemples de suites (u_n) pour lesquelles $\ell = 1$, qui tendent vers 0, qui tendent vers un réel non nul, ou encore qui tendent vers $+\infty$.

Exercice 12.14 Suites sous-additives et lemme de Fekete (Oral ENS) **TD**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suit réelle telle que $\forall (m,n)\in\mathbf{N}^2$, $u_{n+m}\leqslant u_n+u_m$.
Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell = \inf\left\{\frac{u_n}{n}, n\geqslant 1\right\}$ si ℓ existe et vers $-\infty$ sinon.

▸ Suites adjacentes

Exercice 12.15 Pour $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$. **PD**

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et en déduire la limite de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 12.16 Soit $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Pour $n\in\mathbf{N}$, on pose $u_n = 2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^n\tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

▶ Suites complexes

Exercice 12.17 Soit $(z_n)_n$ une suite à valeurs complexes vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n - 3\overline{z_n}}{2}$. **F**
Donner l'expression de z_n en fonction de n, et étudier la convergence de la suite (z_n).

Exercice 12.18 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $z_n = e^{i \ln n}$. Montrer que (z_n) diverge. **AD**

▶ Suites extraites

Exercice 12.19 Soit $(u_n)_n$ une suite (réelle ou complexe). Parmi les suites suivantes, toutes extraites de (u_n), trouver celles qui sont extraites d'une autre : **F**

$$(u_{2n})_n,\ (u_{3n})_n,\ (u_{6n})_n,\ (u_{6^n})_n,\ (u_{6^{n+1}})_n,\ (u_{2^{n+1}})_n,\ (u_{3\times 2^n})_n.$$

Exercice 12.20 Soit (u_n) une suite telle que les trois suites extraites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge. **AD**

Exercice 12.21 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de terme général $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Autrement dit, u_n est la partie fractionnaire de $\sqrt{n}$. **D**

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.
2. Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n^2+n}$. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite (finie ou infinie).
3. Déterminer, pour $(a,b) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}^*$, $a \leqslant b$, la limite de $u_{n^2b^2+2na}$.
4. Soit $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers x.
5. Prouver que $\left\{\sqrt{n}-\sqrt{m},\ (m,n)\in\mathbf{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Exercice 12.22 Soit $\alpha \not\equiv 0 \quad [\pi]$. **AD**

1. Montrer que si $(\sin(n\alpha))_n$ converge, alors $(\cos(n\alpha))_n$ converge également, et donner une relation entre leurs deux limites.
2. En déduire que $(\sin(n\alpha))_n$ et $(\cos(n\alpha))_n$ divergent.

Exercice 12.23 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite telle que $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{nu_n}}{n+1}$. **AD**
Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 12.24 Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n - (-1)^n}$.
Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

▶ Bornes supérieures

Exercice 12.25 Déterminer les bornes supérieures et inférieures, si elles existent, des ensembles de réels suivants : **PD**

$$A = \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1},\ n\in\mathbf{N}\right\},\ B = \left\{\frac{pq}{p^2+q^2},\ (p,q)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}\right\},\ C = \left\{\frac{2^n}{2^m+3^{n+m}},\ (m,n)\in\mathbf{N}^2\right\}$$

▶ Les deux exercices bonus qui ne figuraient pas sur la feuille que vous avez eue

Exercice 12.26 Soit (u_n) une suite décroissante de limite nulle. **AD**

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Étudier les monotonies de (S_{2n}) et (S_{2n+1}).
2. En déduire que (S_n) converge.

Exercice 12.27 Soit (u_n) une suite bornée. On suppose qu'il existe un réel ℓ telle que toute suite convergente extraite de (u_n) possède ℓ pour limite. Montrer que (u_n) est convergente. **D**

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 12

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.1

Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$, alors $0 \leqslant u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On prouve de même que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Danger ! On ne sait pas encore que (u_n) et (v_n) convergent. Il est hors de question d'utiliser alors les limites de ces suites avant d'avoir prouvé leur existence !

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.2

Il est évident qu'une suite stationnaire[1], est convergente.
Inversement, soit $(u_n)_n$ une suite convergente d'entiers, et notons ℓ sa limite.
Soit alors $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Par définition de la convergence Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow \ell - \frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant \ell + \frac{1}{3}$.
Mais dans un intervalle de longueur $\frac{2}{3}$, et c'est le cas de $\left]\ell - \frac{1}{3}, \ell + \frac{1}{3}\right[$ ne peut se trouver qu'un seul entier.
Donc pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0}$, donc (u_n) est stationnaire.

Dans ce cas, sa limite est évidemment entière, puisque c'est la valeur à laquelle stationne (u_n).

[1] À valeurs entières ou non.

Méthode Dans la définition de suite convergente, la condition est valable **pour tout** $\varepsilon > 0$. On peut donc le choisir comme bon nous chante !

Remarque Certains intervalles ouverts de longueur inférieure à 1 ne contiennent pas d'entiers, c'est par exemple le cas de $\left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$, mais ici nous savons que u_{n_0} est entier et dans cet intervalle, donc il existe de tels entiers.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.3

Notons que la décroissance au sens de l'inclusion signifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.
En particulier, $a_{n+1} \geqslant a_n$, et donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Enfin, l'hypothèse faite sur la longueur des segments est que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.
Et donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Elles convergent donc vers une même limite ℓ. On a alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$, et donc $\ell \in [a_n, b_n]$, de sorte que $\ell \in \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n]$.
Inversement, si $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n]$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
Et donc par passage à la limite, $\ell \leqslant x \leqslant \ell$, de sorte que $x = \ell$.
Ceci prouve donc que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n] \subset \{\ell\}$.
Et donc par double inclusion, $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$, qui est donc bien un singleton.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.4

1. **Faux.** La suite de terme général $1 + \frac{1}{n}$ est décroissante, minorée par 0, et tend vers 1.
2. **Faux.** Posons $u_n = -1$ et $v_n = n$. Alors (u_n) est minorée, puisque constante, et v_n est minorée, puisqu'elle tend vers $+\infty$
   Pourtant $u_n v_n = -n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, et donc ne saurait être minorée.
3. **Vrai.** C'est une conséquence de l'exercice Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $(-u_n)$ est minorée. Donc (u_n) est minorée.
4. **Vrai.** En effet, on a $\ell \geqslant \alpha > 0$.
5. **Vrai.** Nous savons que toute suite convergente est même bornée.
6. **Faux.** Toute suite croissante est minorée par son premier terme. Mais nous savons qu'il existe des suites strictement croissantes convergentes, par exemple $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.
7. **Vrai.** Nous pourrions utiliser la racine carrée, mais nous n'avons pour l'instant rien prouvé au sujet des limites des racines.
   Notons plutôt que puisque $u_n^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$, alors à partir d'un certain rang n_0, $0 \leqslant u_n^4 \leqslant 1$.
   On a alors nécessairement

8. **Faux.** Par exemple $u_n = (-1)^n$.

Solution de l'exercice 12.5

1. Posons $u_n = \dfrac{1-\sin^2(2n)}{\sqrt{n}}$. Alors $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Or, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci peut sembler évident, mais n'a pas encore été prouvé avec les outils à notre disposition cette année…
Soit donc $A > 0$. Alors pour $n \geqslant \lfloor A^2 \rfloor + 1$, on a $n^2 \geqslant A$ et donc $\sqrt{n} \geqslant A$. Donc $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 1$, et donc $\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor = 0$. Et donc $n \left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

> **Remarque**
> Pas de forme indéterminée ici : on a la suite nulle !

3. Nous savons que $0 \leqslant \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Donc comme à la question 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} = 0$.

4. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2+k^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Et donc en sommant ces inégalités, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$. On en déduit par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Par l'inégalité triangulaire,

$$0 \leqslant |u_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{n^2 + 2nk\sin k}{2n^4 + n^2\ln(k)} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+2n^2}{2n^4} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{3n^2}{2n^4} \leqslant \frac{3n^3}{2n^4}.$$

Donc par le théorème des gendarmes, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. Distinguons plusieurs cas. Il est clair que si $a = b$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
▸ Si $a < b$, alors le terme «le plus fort» est b^n. Donc factorisons numérateur et dénominateur par b^n :

$$\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{b^n}{b^n} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

> **Détails**
> Puisque $a < b$, $0 \leqslant \frac{a}{b} < 1$, donc
> $$\left(\frac{a}{b}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

▸ De même, si $a > b$, en factorisant par a^n, il vient $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Solution de l'exercice 12.6

1. Pour $k \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

En sommant ces inégalités, on a donc, pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Or, cette dernière somme est une somme télescopique, qui vaut $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.
On en déduit que $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + 1 \leqslant 2$.
D'autre part, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$, de sorte que (u_n) est croissante.
Par le théorème de la limite monotone, (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

> **Remarque**
> Notons au passage que sa limite est alors inférieure ou égale à 2, le majorant obtenu précédemment.

2. On a

$$v_{2n} - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Puisque (v_n) est croissante, par le théorème de la limite monotone, soit elle converge vers une limite finie ℓ, soit elle tend vers $+\infty$.
Or, si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors la suite extraite $(v_{2n})_n$ converge également vers ℓ.

> **Croissance**
> La croissance de (v_n) se prouve de la même manière que celle de (u_n) à la question précédente, mais elle est assez intuitive : pour passer de v_n à v_{n+1}, il faut ajouter $\frac{1}{n+1} \geqslant 0$, donc $v_{n+1} \geqslant v_n$.

Et donc $v_{2n} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Mais puisque $v_{2n} - v_n \geqslant \frac{1}{2}$, en passant à la limite, il vient $0 \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.

On en déduit donc que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.7

1. Étudions la fonction $f : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ sur $\mathbf{R}_+$.
   Elle est dérivable, avec $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{1-x^2-1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leqslant 0$.
   Donc f est décroissante, avec $f(0) = 0$, de sorte que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$, et donc $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.
   De même, une étude de $x \mapsto \ln(1+x) - x$ prouve que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
   D'après ce qui précède, on a
   $$n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant n\frac{1}{n}$$
   et donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.
   On en déduit[2], que $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^1 = e$.

[2] Moyennant un petit résultat qui viendra prochainement sur la composition de limites.

2. On a $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.
   Par la question 1, on a donc
   $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leqslant \ln(u_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$
   Mais $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.
   De même,
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
   Et donc par le théorème des gendarmes, $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.
   Et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{e}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.8

1. Une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 0$.
   Et alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, de sorte que (u_n) est décroissante. Étant minorée par 0, elle est convergente.
   Notons ℓ sa limite. Alors $\frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$.
   Mais d'autre part, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
   En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
   Et donc pour $n \geqslant n_0$, $n+1 \geqslant n_0$, et donc $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
   Ainsi, on a nécessairement $\ell = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$, et donc $\ell = 0$.

Remarque
Ceci est trivial lorsqu'on dispose de résultats sur les suites extraites, mais la preuve que nous en donnons ici prouve qu'il n'est pas indispensable de disposer de résultats généraux pour étudier certaines suite extraites.

2. D'une part, en reconnaissant une somme télescopique, on a
   $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right).$$

Et d'autre part, en notant que pour $k \geqslant 1$, $u_k^2 = \dfrac{u_{k-1}^2}{1+u_{k-1}^2}$, et donc

$$\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = \frac{1+u_{k-1}^2}{u_{k-1}^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = 1.$$

Et donc $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = 1$.

Donc $\dfrac{1}{nu_n^2} = S_n + \dfrac{1}{nu_0^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

On en déduit donc que $nu_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc $\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Solution de l'exercice 12.9

1. Étudions la monotonie de (u_n) : on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\\
&= -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\\
&\leqslant -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\\
&\leqslant -\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Détails
Pour tout $k \leqslant n$,
$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$
et on prend bien soin de changer le sens de l'inégalité en raison de la présence du signe $-$.

On en déduit donc que (u_n) est décroissante. Puisqu'elle est clairement positive, elle est minorée[3] et donc par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ.

Puisque de plus on a, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1}_{=1}$, alors, par passage à la limite dans l'inégalité, il vient $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

[3] Par 0.

2. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&= \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&< \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\leqslant \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Relation de Chasles.

En passant à la limite dans cette inégalité, il vient donc $\ell \leqslant \dfrac{\ell}{2}$.
Soit encore $\ell \leqslant 0$, mais $\ell \in [0,1]$, donc nécessairement, $\ell = 0$.

Rappel
Si $u_n \to \ell$, alors $u_{2n} \to \ell$ car il s'agit d'une suite extraite de (u_n).

Solution de l'exercice 12.10

1.a. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Et donc, par l'inégalité triangulaire, $|u_{n_0} + \cdots + u_n| \leqslant |u_{n_0}| + \cdots + |u_n| \leqslant (n - n_0 + 1)\frac{\varepsilon}{2} \leqslant n\frac{\varepsilon}{2}$.
Et donc $\left|\frac{u_{n_0} + \cdots + u_n}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

1.b. Notons que n_0 est fixé. Et donc $\frac{u_1 + \cdots + u_{n_0-1}}{n} = \frac{1}{n}\underbrace{(u_1 + \cdots + u_{n_0-1})}_{=\text{constante}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par conséquent[4], il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\left|\frac{u_1 + \cdots + u_{n_0-1}}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

[4] C'est la définition de suite convergente.

1.c. Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a

$$|v_n| \leqslant \left|\frac{u_1 + \cdots + u_{n_0-1}}{n}\right| + \left|\frac{u_{n_0} + \cdots + u_n}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Nous venons donc de prouver que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. On a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n - \ell = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - \ell = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} - \frac{n\ell}{n} = \frac{(u_1 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n}.$$

Or, $u_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc la question 1 s'applique : $\frac{(u_1 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par conséquent, $v_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

3. La réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, considérons la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $(-1)^n$.
On a alors $v_n = \frac{-1 + 1 - 1 + 1 + \cdots + (-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
Et donc $|v_n| \leqslant \frac{1}{n}$, de sorte que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors que (u_n) diverge.

Pour la culture
La réciproque est vraie en ajoutant certaines hypothèses, par exemple la monotonie de (u_n).

Solution de l'exercice 12.11

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons $f_n : \left|\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n - \cos(x) \end{array}\right.$
Alors f_n est continue[5] sur $[0,1]$, strictement croissante car somme de deux fonctions qui le sont[6], et on a $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1 - \cos(1) > 0$.
Donc par le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $[0,1]$.

[5] Car dérivable.
[6] $-\cos$ est strictement croissante sur $[0, \pi]$.

2. Notons que $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - \cos(x_n)$.
Mais $\cos(x_n) = x_n^n$, donc $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0$.
Or, f_n est strictement croissante, et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, donc on en déduit que $x_n \leqslant x_{n+1}$.
Ainsi, la suite (x_n) est croissante. Étant majorée (par 1), elle converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.
Supposons que $\ell < 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n \leqslant \ell \Rightarrow x_n^n \leqslant \ell^n$, et donc $x_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc $\cos(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui n'est pas possible puisque pour $x \in [0,1]$, $\underbrace{\cos(1)}_{>0} \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

On en déduit donc que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Solution de l'exercice 12.12

1. On a, en notant que $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{1}{4}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

La suite (u_n) étant positive, on a donc (u_n) décroissante. Étant positive, elle est minorée, donc converge par le théorème de la limite monotone.

2. Sur le même principe, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1}\frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+2}{n+1}\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 9n + 2}{4n^3 + 12n^2 + 2n + 4} < 1.$$

Et donc (v_n) est décroissante, et minorée, donc elle converge.

3. Notons ℓ la limite de (u_n).
Si on avait $\ell > 0$, alors (v_n) tendrait vers $+\infty$, ce qui n'est pas le cas, puisqu'il s'agit d'une suite convergente.
Et donc nécessairement, $\ell = 0$.

Remarque
Étant limite d'une suite positive, on a nécessairement $\ell \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 12.13

1. Il s'agit donc de prouver qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{1+\ell}{2}$.
Posons $\varepsilon = \dfrac{\ell - 1}{2} > 0$.
Puisque $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \ell - \varepsilon \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{1+\ell}{2}$, et donc $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1+\ell}{2} u_n$.
Une récurrence rapide sur n prouve alors que pour $n \geqslant n_0$, on a
$$u_n \geqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$
Mais puisque $\dfrac{1+\ell}{2} > 1$, $\left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque
Le même résultat reste valable si $\ell = +\infty$.

2. Sur le même principe, on prouve que pour n suffisamment grand, u_n est inférieur au terme général d'une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, et donc de limite nulle.
Plus précisément, posons $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$, et en particulier, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1+\ell}{2} u_n$.
Une récurrence aisée prouve alors que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Les deux questions précédentes ne tirent aucune conclusion lorsque $\ell = 1$. Et pour cause :
   - si $u_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   - si $u_n = n$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
   - enfin, si (u_n) est constante, égale à 2, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et évidemment, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

Solution de l'exercice 12.14

Notons qu'une récurrence immédiate prouve que pour tout $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, $u_{kn} \leqslant k u_n$.
Commençons par supposer que ℓ existe, et soit $\varepsilon > 0$. Alors, par définition d'une borne inférieure, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\ell \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{n_0} < \ell + \varepsilon$.
Soit alors $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $n = qn_0 + r$ la division euclidienne de n par n_0, avec $r \in [\![0, n_0 - 1]\!]$.
On a donc
$$u_n = u_{qn_0+r} \leqslant u_{qn_0} + u_r \leqslant q u_{n_0} + u_r.$$
Et donc $\dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{q}{n} u_{n_0} + \dfrac{u_r}{n} \leqslant \left(\ell - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \dfrac{qn_0}{n} + \dfrac{u_r}{n}$.
De plus, $\dfrac{qn_0}{n} = \dfrac{n-r}{n} = 1 - \dfrac{r}{n}$.
Donc $\dfrac{u_n}{n} < \left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \dfrac{r}{n}\right) + \dfrac{u_r}{n}$.
Notons alors $M = \max\{u_0, u_1, \cdots, u_{n_0-1}\}$, qui est bien défini puisque plus grand élément d'un ensemble fini.
Alors $\dfrac{u_r}{n} \leqslant \dfrac{M}{n}$.
Donc $\ell \leqslant \left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{M}{n}$.
Or, le terme de droite tend vers $\ell + \varepsilon$, donc pour n suffisamment grand[7], on a $\left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{M}{n} \leqslant \left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Remarque
Même si la notation que nous employons ne le fait pas clairement apparaître, r dépend de n. Et donc il n'est pas directement possible d'affirmer que $\frac{u_r}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
En revanche, maintenant, M est une constante, et donc $\frac{M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

[7] C'est-à-dire qu'il existe un n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$...

Et donc $\ell \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \ell + 2\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \ell + \varepsilon$.
C'est donc la définition de $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Supposons à présent que ℓ n'existe pas, c'est-à-dire que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ n'est pas majorée.
Soit alors $A \in \mathbf{R}$. Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{u_{n_0}}{n_0} \leqslant A$.
Et alors le même raisonnement que précédemment, avec les mêmes notations, on prouve que pour tout n, $\frac{u_n}{n} \leqslant A + \frac{M}{n}$.
Et puisque $\frac{M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe un rang N tel que pour $n \geqslant N$, $\frac{M}{n} \leqslant 1$.
Et donc pour $n \geqslant N$, $\frac{u_n}{n} \leqslant A + 1$, et donc $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.15

1. Notons qu'il n'est pas forcément immédiat de savoir quelle suite sera croissante, et laquelle sera décroissante. Mais :
   - —il n'y a pas besoin de le savoir, l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ nous donnera sa monotonie.
   - —si l'une des deux est clairement plus grand que l'autre (et c'est ici le cas de u_n), c'est forcément celle qui est décroissante !

   Soit donc $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{2\sqrt{n+1} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Or, on a $2n+1 \geqslant 2\sqrt{n(n+1)} \Leftrightarrow (2n+1)^2 \geqslant 4n(n+1) \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 \geqslant 4n^2 + 4n$, ce qui est toujours le cas.
Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, et donc (u_n) est décroissante.
De même, on prouve que (v_n) est croissante.
Enfin, on a

$$u_n - v_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2\frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 2\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc les deux suites sont adjacentes, et par conséquent tendent vers une même limite $\ell \in \mathbf{R}$.
Supposons par l'absurde que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ possède une limite finie ℓ_1.
Alors, $2\sqrt{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 - \ell$, ce qui est impossible puisque $2\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ne possède pas de limite finie.
Puisqu'il s'agit d'une suite croissante, elle tend vers $+\infty$.

Plus simplement
Il a été dit en cours que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est toujours divergente.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.16

Nous allons montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
On a

$$u_{n+1} = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1}\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \geqslant 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \text{ car } \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \geqslant 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.
De même, on a, $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$, donc $2\tan(x) = (1-\tan^2(x))\tan(2x)$.

En particulier, si $|x| < \dfrac{\pi}{4}$, alors $\tan(2x) \geqslant 2\tan(x)$.
Donc pour $x = \dfrac{\theta}{2^{n+1}}$, $2\tan\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) \leqslant \tan\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.
En multipliant par 2^n, il vient $v_{n+1} \leqslant v_n$: la suite (v_n) est décroissante.
Enfin, $u_n = \theta \dfrac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$.

Rappel
Il est classique que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Et de même, en utilisant le fait que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cos(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$$

alors on a $v_n = \theta \dfrac{\tan \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$.
Et donc $v_n - u_n \to 0$. On en déduit que les suites sont adjacentes, et nous connaissons déjà leur limite commune : c'est θ.

Solution de l'exercice 12.17

Notons $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1} = \frac{a_n + ib_n - 3a_n + 3ib_n}{2} = \frac{-2a_n + 4ib_n}{2} = -a_n + 2ib_n.$$

Et donc[8] $a_{n+1} = -a_n$ et $b_{n+1} = 2b_n$.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = (-1)^n a_0$ et $b_n = 2^n b_0$.
Ces deux suites[9] sont donc convergentes si et seulement si $a_0 = b_0 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $z_0 = 0$, auquel cas (z_n) est la suite nulle, qui converge vers 0.

[8] Par identification des parties réelles et imaginaires.
[9] Géométriques.

Solution de l'exercice 12.18

Supposons par l'absurde que (z_n) converge vers un complexe ℓ.
Notons que ce complexe sera nécessairement de module 1 puisque les z_n le sont. En effet, si $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + ib$, $\mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $\mathrm{Im}(b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$, de sorte que

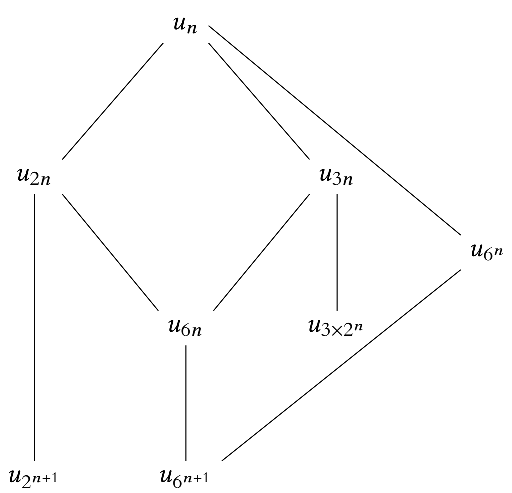
$$|z_n| = \sqrt{\mathrm{Re}(a_n)^2 + \mathrm{Im}(b_n)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a^2+b^2} = |\ell|.$$

Et donc si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|z_n| = 1$, alors $|\ell| = 1$.
Mais (z_{2n}) converge également vers ℓ.
Or $z_{2n} = e^{i\ln(2) + i\ln(n)} = e^{i\ln(2)} z_n$.
Et donc $\ell = e^{i\ln(2)}\ell \Leftrightarrow e^{i\ln(2)} = 1 \Leftrightarrow \ln(2) \equiv 0 \ [2\pi]$.
Mais $\dfrac{\ln(2)}{2\pi} \in]0,1[$ ne peut être entier, ce qui est absurde.

Détails
Nous avons ici utilisé le fait que $\ell \neq 0$, ce qui découle du fait que $|\ell| = 1$.

Solution de l'exercice 12.19

Le dessin suivant représente les liens entre les différentes suites : un trait entre deux suites signifiant que celle du bas est extraite de celle du haut.
La relation «être extraite de» étant transitive, certaines flèches sont implicites et ne sont donc pas dessinées (par exemple, $(u_{6^{n+1}})$ est extraite de (u_{2n})).
Je vous laisse le soin de chercher les extractrices si vous en éprouvez le besoin.



SOLUTION DE L'EXERCICE 12.20

Nous savons que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers une même limite**, alors (u_n) converge.
Malheureusement, ici nous ne savons rien des limites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}), si ce n'est qu'elles existent.
Prouvons qu'elles sont égales.
Notons $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$, $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ et $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n}$.
Alors la suite (u_{6n}) est extraite à la fois de (u_{2n}) et de (u_{3n}).
Étant extraite de (u_{2n}), elle converge vers ℓ_1. Mais étant extraite de (u_{3n}), elle converge vers ℓ_3. Et par unicité de sa limite, on a donc $\ell_1 = \ell_3$.
De même, la suite (u_{6n+3}) est à la fois extraite de (u_{2n+1}) (la suite des termes d'ordre impair) et de (u_{6n}). Donc par le même raisonnement, $\ell_2 = \ell_3$.
On en déduit que $\ell_1 = \ell_2$, et donc que (u_n) converge vers $\ell_1 = \ell_2$.

Détails
Un multiple de 6 est à la fois un multiple de 2 et un multiple de 3.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.21

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$. Alors f est dérivable sur $[0,1]$, et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$.
   En particulier, il vient
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{2}.$$
2. Puisque $n^2 \leqslant n^2+n < (n+1)^2$, on a $n \leqslant \sqrt{n^2+n} < n+1$, et donc $\lfloor \sqrt{n^2+n} \rfloor = n$.
   Et donc $u_{n^2+n} = \sqrt{n^2+n} - n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1\right)$.
   Utilisons alors le résultat préliminaire :
   $$u_{n^2+n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
   Autrement dit, nous venons de prouver qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui tend vers $\dfrac{1}{2}$.
   Donc si (u_n) possède une limite, celle-ci vaut nécessairement $\dfrac{1}{2}$.
   Or, on a $u_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = n - \lfloor n \rfloor = 0$.
   Autrement dit, il existe également une suite extraite de (u_n) qui converge vers 0, contredisant le fait que la limite[10] de (u_n) ne peut que valoir $\dfrac{1}{2}$.
   Et donc (u_n) ne possède pas de limite.
3. On a $b^2n^2 \leqslant b^2n^2 + 2an < \underbrace{b^2n^2+2bn+1}_{=(bn+1)^2}$, de sorte que $bn \leqslant \sqrt{n^2b^2+2an} < bn+1$.
   Et donc $u_{n^2b^2+2an} = \sqrt{n^2b^2+2an} - bn = bn\left(\sqrt{1+\frac{2a}{nb^2}} - 1\right)$.
   Utilisons encore une fois la première question :
   $$u_{n^2b^2+2an} = \frac{\sqrt{1+\frac{2a}{nb^2}}-1}{\frac{2a}{nb^2}} \frac{2a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\frac{2a}{b} = \frac{a}{b}.$$
4. Si x est rationnel, c'est facile : il suffit d'utiliser la question précédente : il existe deux entiers a et b avec $a \leqslant b$ tels que $x = \dfrac{a}{b}$, et alors la suite $(u_{n^2b^2+2an})_n$ fait l'affaire.

   En revanche, la situation est plus complexe dans le cas où x est irrationnel.
   Nous allons utiliser à la fois la densité des rationnels dans $\mathbf{R}$ et la question précédente qui permet d'approcher un rationnel par des éléments de (u_n).

   Commençons par fixer une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ de rationnels de $[0,1]$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $|\alpha_n - x| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Détails
La suite extraite en question est $(u_{\varphi(n)})$, avec $\varphi(n) = n^2+n$.

[10] Si elle existe !

Remarque
Une telle suite existe par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, ou plus précisément, de $\mathbf{Q}\cap[0,1]$ dans $[0,1]$.

Puisqu'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers α_1, il existe donc un entier n_1 tel que $|u_{n_1} - \alpha_1| \leqslant 1$.
Posons alors $\varphi(1) = n_1$. Par l'inégalité triangulaire, on a alors $|u_{\varphi(1)} - x| \leqslant |u_{n_1} - \alpha_1| + |\alpha_1 - x| \leqslant 2$.
On définit alors les $\varphi(k)$ de proche en proche de la manière suivante : supposons $\varphi(1), \dots, \varphi(k-1)$ déjà définis.
Notons $\alpha_k = \dfrac{a_k}{b_k}$, avec $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$.
Par la question précédente, la suite $(u_{n^2b_k^2+2a_kn})_n$ converge vers α_k.
Et en particulier, il existe n_k tel que pour $n \geqslant n_k$, $|u_{n^2b_k^2+2a_kn} - \alpha_k| \leqslant \dfrac{1}{k}$.
On pose alors $N_k = \max(\varphi(k-1), n_k)$ et $\varphi(k) = N_k^2 b_k^2 + 2a_k N_k$.
Alors, par l'inégalité triangulaire, il vient

$$|u_{\varphi(k)} - x| \leqslant |u_{\varphi(k)} - \alpha_k| + |\alpha_k - x| \leqslant \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2k}.$$

Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{k\to+\infty} |u_{\varphi(k)} - x| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} u_{\varphi(k)} = x$.
Nous avons donc bien construit une suite extraite de (u_n) dont la limite vaut x.

Détails
La valeur exacte que l'on choisit pour $\varphi(k)$ n'a pas vraiment d'importance, du moment qu'elle est strictement plus grande que $\varphi(k-1)$ et qu'elle est de la forme $n^2b_k^2 + 2a_kn$ (pour qu'il s'agisse bien d'un terme de la suite extraite de limite α_k que nous venons de considérer).

Solution de l'exercice 12.22

1. Supposons que $\sin(n\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Alors $\sin((n+1)\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Mais $\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha + \alpha) = \sin(n\alpha)\cos(\alpha) + \cos(n\alpha)\sin(\alpha)$.
Puisque $\sin(\alpha) \neq 0$, on a donc $\cos(n\alpha) = \dfrac{\sin((n+1)\alpha) - \sin(n\alpha)\cos(\alpha)}{\sin\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

2. Notons $\ell' = \ell\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ la limite de $(\cos(n\alpha))_n$.
Comme à la question 1, on a

$$\cos((n+1)\alpha) = \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin(\alpha) \Leftrightarrow \sin(n\alpha) = \frac{\cos(n\alpha)\cos\alpha - \cos((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Et donc $\ell = \ell'\dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} = -\ell\left(\dfrac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha}\right)^2$.
Donc $\ell\left(1 + \left(\dfrac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha}\right)^2\right) = 0 \Rightarrow \ell = 0$.
Par ailleurs, on a $\cos(n\alpha)^2 + \sin(n\alpha)^2 = 1$, ce qui en passant à la limite nous donne $\ell^2 + \ell'^2 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$.
Ceci est impossible, et c'est donc que $(\sin(n\alpha))_n$ diverge.
La suite $(\cos(n\alpha))$ diverge aussi, puisque le calcul ci-dessus prouve que si elle converge, alors $(\sin(n\alpha))_n$ converge aussi, ce qui n'est pas le cas.

Détails
La suite (u_{n+1}) est toujours une suite extraite de (u_n), et donc dans le cas où (u_n) converge, (u_{n+1}) converge également, et a la même limite.

Solution de l'exercice 12.23

Commençons par noter qu'une récurrence rapide prouve que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
On a alors, pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)u_{n+1} = \sqrt{nu_n}$.
Posons donc $v_n = nu_n$, de sorte que $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
Autrement dit, on a $\ln(v_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\ln(v_n)$, de sorte que $(\ln(v_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(v_n) = \dfrac{\ln(v_1)}{2^{n-1}}$, de sorte que $v_n = e^{\frac{\ln(v_1)}{2^{n-1}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et donc $u_n = \dfrac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution de l'exercice 12.24

Notons qu'il n'est pas totalement évident que (u_n) soit bien définie, et il faut pour cela s'assurer que pour tout n, $u_n^2 + u_n + (-1)^n$ est bien positif, afin que sa racine soit définie.

Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n \geqslant 1$.
La récurrence est initialisée grâce à l'hypothèse faite sur u_0.
Supposons alors $u_n \geqslant 1$. Alors

$$u_n^2 + u_n + (-1)^n \geqslant u_n^2 + u_n - 1 \geqslant u_n^2 \geqslant 1.$$

$(-1)^n$
Notons que si n est pair, on peut faire bien mieux que la majoration que nous venons de donner, mais peu importe, l'essentiel étant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(-1)^n \geqslant -1$.

Et donc u_{n+1} est bien défini et par croissance de la fonction racine, $u_{n+1} \geqslant \sqrt{1} \geqslant 1$.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 1$.

Mais alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^2 + u_n + (-1)^n \geqslant u_n^2 + u_n - 1 \geqslant u_n^2$.
Et donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{u_n^2} \geqslant u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.
Par le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que $(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{R}$. Notons que nécessairement, $\ell \geqslant 1$, puisque $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 1$.
Alors les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent également vers ℓ.
Or nous savons que $u_{2n+1} = \sqrt{u_{2n}^2 + u_{2n} + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\ell^2 + \ell + 1}$.
Or, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et donc par unicité de la limite, $\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell + 1}$.
Soit encore $\ell^2 = \ell^2 + \ell + 1 \Leftrightarrow \ell = -1$, ce qui est impossible.
Donc forcément, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Solution de l'exercice 12.25

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$, et donc 1 est un majorant de A.
   De plus, si on pose $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$, alors (u_n) est une suite d'éléments de A, qui tend vers 1, et donc $1 = \sup A$.
   De même, il est facile de constater que -1 est un minorant de A et que $-\dfrac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$, et donc $-1 = \inf A$.
2. Il est évident que 0 est le plus petit élément de B, et donc sa borne inférieure.
   D'autre part, il est classique que $2pq \leqslant p^2 + q^2$, et donc $\dfrac{pq}{p^2+q^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, avec égalité si et seulement si $p = q$.
   Et donc $\dfrac{1}{2}$ est le plus grand élément de B, et donc sa borne supérieure.
3. Il est clair que C est minorée par 0, et si on pose $c_n = \dfrac{2^n}{1+3^n}$, alors (c_n) est une suite à valeurs dans C qui tend vers 0, et donc $0 = \inf C$.
   D'autre part, pour tout $(m, n) \in \mathbf{N}^2$, $\dfrac{2^n}{2^m + 3^{m+n}} \leqslant \dfrac{2^n}{1+3^n}$.
   Or, $1 + 3^{n+1} \geqslant 2(1+3^n)$, de sorte que
   $$\frac{2^{n+1}}{1+3^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n}{1+3^{n+1}} \leqslant \frac{2^n}{1+3^n}.$$
   Donc la suite de terme général $\dfrac{2^n}{1+3^n}$ est décroissante et donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{2^n}{1+3^n} \leqslant \dfrac{2^0}{1+3^0} = \dfrac{1}{2}$.
   Ainsi, pour tout $(m, n) \in \mathbf{N}^2$, $\dfrac{2^n}{2^m + 3^{n+m}} \leqslant \dfrac{1}{2}$, de sorte que $\dfrac{1}{2} = \max C$.

Solution de l'exercice 12.26

1. On a $S_{2n+2} - S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$.
   Donc (S_{2n}) est décroissante.
   De même, on prouver que (S_{2n+1}) est croissante.

   > ⚠ **Attention !**
   > Le terme de (u_{2n}) qui suit u_{2n} n'est sûrement pas u_{2n+1}, qui n'est pas un terme de (u_{2n}), mais $u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$.

2. On a $S_{2n+1} - S2n = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Par conséquent, les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers **une même limite.**
   Ceci implique alors que (S_n) converge.

Solution de l'exercice 12.27

Il est évident que si (u_n) converge, alors sa limite vaut ℓ.
Raisonnons par l'absurde, et supposons (u_n) non convergente.
Alors $\forall L \in \mathbf{R}$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbf{N}$, $\exists n \geqslant N / |u_n - L| > \varepsilon$.

Et en particulier, un tel ε existe lorsque $L = \ell$.
Et alors, il existe une infinité de termes de la suite (u_n) tels que $|u_n - \ell| > \varepsilon$.
Construisons alors une extractrice φ de la manière suivante : $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbf{N}, |u_k - \ell > \varepsilon\}$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n+1) = \min\{k \geqslant \varphi(n) \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$.
Autrement dit, $(u_{\varphi(n)})$ est la suite formée des termes de (u_n) tels que $|u_n - \ell| > \varepsilon$.
Alors cette suite extraite est encore bornée, et donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice ψ telle que $(u_{\varphi(\psi(n))})$ converge.
Comme il s'agit d'une suite extraite de (u_n), sa limite est nécessairement ℓ, ce qui est impossible puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{\varphi(\psi(n))} - \ell| > \varepsilon$.
Et onc (u_n) est convergente.

Détails

En effet, nous venons de dire que pour tout N, il existe un $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \ell| > \varepsilon$. S'il n'existait qu'un nombre fini de tels termes, cette propriété ne serait pas vérifiée pour N plus grand que tous ces termes.