TD 15 : Limites, continuité

► Limites

Exercice 15.1 (Re-)Prouver «à la main» (c'est-à-dire sans utiliser la notion de voisinage) que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$ dans les cas suivants : F

1. $a = b = \ell = +\infty$
2. $a = -\infty$, $b, \ell \in \mathbf{R}$
3. $a \in \mathbf{R}$, $b = +\infty$, $\ell = -\infty$

Exercice 15.2 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que la suite $(f(n))_n$ tende vers $+\infty$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. PD

Exercice 15.3 Déterminer les limites suivantes, lorsqu'elles existent : PD

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)e^{\cos x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$
5. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\lfloor x\rfloor$
7. $\lim\limits_{x\to0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
8. $\lim\limits_{x\to0} x^2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
9. $\lim\limits_{x\to0} \cos\left(x+\frac{1}{x}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$

Exercice 15.4 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ périodique. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f possède une limite (finie ou non) en $+\infty$. AD

Exercice 15.5 Montrer que la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$. AD

Exercice 15.6 AD

1. Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ n'est continue en aucun point.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ est continue en 0, mais n'est continue en aucun $a \in \mathbf{R}^*$.

Exercice 15.7 Du découpage d'ε D
Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)) = 0$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 15.8 Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction bornée au voisinage de $+\infty$ telle que $f(x+1)-f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R}$. Montrer que $\ell = 0$. PD

Exercice 15.9 Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ croissante. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$. Montrer alors que pour tout $b > 0$, $\frac{f(bx)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D

► Continuité

Exercice 15.10 Soient f et g les deux fonctions définies sur $[0, 2]$ par F

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Étudier la continuité des fonctions f, g, $g\circ f$ et $f\circ g$.

Exercice 15.11 Soit f une fonction continue sur un intervalle et à valeurs réelles, telle que $|f|$ soit constante. Prouver que f est constante. AD

Exercice 15.12 Déterminer toutes les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continues en 0 et telles que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(2x) = f(x)$. AD

Exercice 15.13 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction polynomiale de degré impair. Montrer que f possède au moins une racine réelle. Ce résultat est-il encore vrai pour un polynôme de degré pair ? PD

Exercice 15.14 Déterminer si les fonctions suivantes peuvent se prolonger par continuité aux bornes de leur ensemble de définition : PD

1. $f(x) = (1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 2. $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 3. $h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ 4. $k(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

Exercice 15.15 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que AD

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)f(y).$$

1. Que peut valoir $f(1)$? Déterminer f si $f(1) = 0$.
2. On suppose à présent $f(1) \neq 0$.
   (a) Prouver que pour tout $q \in \mathbf{Q}$, $f(q) = q$.
   (b) Montrer que f est positive sur $\mathbf{R}_+$, puis qu'elle est croissante sur $\mathbf{R}$.
   (c) En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$.

Exercice 15.16 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction bornée et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Prouver que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbf{R}$. PD

Exercice 15.17 Un (très bon) skieur de fond termine les 42km de la Foulée Blanche (course populaire qui a lieu à Autrans dans le Vercors) en 2h. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure dans lequel il a parcouru exactement 21 km. AD

Exercice 15.18 Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ croissante, et telle que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Prouver que f est continue. D

Exercice 15.19 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue. Montrer que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe. AD

Exercice 15.20 **Fonctions 1-lipschitziennes** AD
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ (*on dit que f est 1-lipschitzienne*).

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un intervalle de $\mathbf{R}$.

Exercice 15.21 Soient $a < b$ deux réels, et soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer que f possède au moins un point fixe. AD

Exercice 15.22 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Monter que f possède un minimum. PD

Exercice 15.23 **Continuité et densité** AD

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbf{Q}$, $f(x) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$ qui coïncident sur $\mathbf{Q}$. Montrer que $f = g$.

Exercice 15.24 **Des bijections non continues** PD
Soit f définie sur $]0,1] \cup [2,3[$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ x-1 & \text{si } x \in [2,3[\end{cases}$
Montrer que f réalise une bijection continue strictement croissante sur son domine de définition sur un intervalle à préciser. Sa bijection réciproque f^{-1} est-elle continue ?

Exercice 15.25 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ surjective. Montrer que tout $y \in \mathbf{R}$ possède une infinité d'antécédents. D

Exercice 15.26 **Une équation fonctionnelle (Oral Polytechnique)** TD
Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)f(y)$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 15

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.2

Soit $A \in \mathbf{R}$.
Puisque $(f(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow f(n) > A$.
Mais alors, pour x réel supérieur ou égal à n_0, on a $f(x) \geqslant f(n_0) > A$.
Et donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.3

1. Lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Puisque $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\dfrac{1}{x} = 0$.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbf{R}$ $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et donc $e^{-1} \leqslant e^{\cos x} \leqslant e$.

Et donc[1] $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{\cos x} = 0$.

[1] Le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 tend vers 0.

2. Multiplions par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = \frac{\sqrt{x+1-(x-2)}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}} = \frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}.$$

Et donc après multiplication par $\sqrt{x}$, on a

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right) = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{3}{2}.$$

3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 \leqslant -\sin x$ et donc par croissance de l'exponentielle,
$e^{x-\sin x} \geqslant e^{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x} = +\infty$.

4. On a, pour tout $x \geqslant 0$, $\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$.

Posons alors $X = \dfrac{2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{2}{X}\ln(1+X) = 2\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)-\ln(1)}{X}$.
Mais nous reconnaissons là le taux d'accroissement de la fonction ln entre 1 et $1+X$, qui tend, lorsque X tend vers 0 vers $\ln'(1) = 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 2$.

Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$.

5. Pour $x \in]0,1[$, $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Et pour $x \in]-1,0[$, $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} = -\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$.

Et donc[2] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$ n'existe pas.

[2] Les limites à droite et à gauche sont distinctes.

6. Le moyen le plus simple est encore d'appliquer le résultat de l'exercice ?? puisque qu'il s'agit là d'une fonction périodique.
Plus simplement, pour $n \in \mathbf{N}$, $x - \lfloor x\rfloor = 0$, et pour $x_n = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a $x_n - \lfloor x_n\rfloor = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Et pour $y_n = n + \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a $y_n - \lfloor y_n\rfloor = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.
On a donc deux suites de limite $+\infty$, dont les images par $x \mapsto x - \lfloor x\rfloor$ ne tendent pas vers la même limite. Par la caractérisation séquentielle des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \lfloor x\rfloor$ n'existe âs.

7. Pour $x \neq 0$, on a $\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{x} < \left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor + 1$, et donc pour $x > 0$,

$$1 \leqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1 + x.$$

Danger !
Ne pas oublier qu'il faut $x > 0$ pour multiplier par x sans changer le sens des inégalités.

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0$.

De même, en changeant le sens des inégalités pour $x<0$, on arrive à $\lim_{x\to 0^-} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0$.

Et donc[3], $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0$.

[3] La fonction n'étant pas définie en 0, on ne se préoccupe pas de sa valeur en 0.

8. Le raisonnement est sensiblement le même qu'à la question précédente, avec le même résultat.

9. Quand $x\to 0$, $x+\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

On peut prouver que $\varphi : x \mapsto x+\frac{1}{x}$ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[2,+\infty[$. En particulier, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\varphi(x_n) = 2n\pi$ possède une unique solution

Solution de l'exercice 15.4

Supposons que f possède une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en $+\infty$, et soit T une période de f.
Alors, pour $x\in\mathbf{R}$, on a $x+nT \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $f(x+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Or, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $f(x+nT) = f(x)$, et donc par unicité de la limite $f(x)=\ell$.
Et donc f est constante égale à ℓ.

Remarque

Ceci prouve déjà que $\ell\in\mathbf{R}$.

Inversement, il est évident que si f est constante, alors elle possède une limite en $+\infty$.

Solution de l'exercice 15.5

Pour $x_n = n$, on a $f(x)=1$. Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, une éventuelle limite ne peut qu'être égale à 1.

D'autre part, pour $y_n = n+\frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a

$$f(y_n) = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geqslant \sqrt{n+\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par la caractérisation séquentielle des limites, si f admettait une limite en $+\infty$, celle-ci devrait être la limite commune à $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$.
Donc f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Solution de l'exercice 15.6

1. Soit $a\in\mathbf{R}$. Alors, par densité de $\mathbf{Q}$, il existe une suite (x_n) de rationnels qui tend vers a, et alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$.
De même, par densité de $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, il existe une suite (y_n) d'irrationnels qui tend vers a, et donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(y_n) = 0$.
On en déduit[4] donc que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ n'admet pas de limite en a, et donc n'y est pas continue.

[4] C'est encore la caractérisation séquentielle des limites.

2. Puisque $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $0\leqslant x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)\leqslant x^2$.
Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{x\to 0} x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) = 0$, et donc $x\mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ est continue en 0.
En revanche, pour $a\neq 0$, puisque $x\mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue en a, si $x\mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ admet une limite en a, alors

$$\lim_{x\to a}\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x^2}\times\lim_{x\to a} x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) = \frac{1}{a^2}\lim_{x\to a} x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x).$$

Et ceci viendrait contredire la question 1, et donc $x\mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ n'est continue en aucun $a\neq 0$.

Solution de l'exercice 15.7

Soit $\varepsilon>0$. Puisque f est croissante, $f(x+1)-f(x)\geqslant 0$, et puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x+1)-f(x) = 0$, il existe $A\in\mathbf{R}$ tel que pour $x\geqslant A$, $0\leqslant f(x)-f(x-1)\leqslant\varepsilon$.
En particulier, pour $x\geqslant A$, et $k\in\mathbf{N}$ tel que $x-k\geqslant A$, on a

$$0\leqslant f(x-k)-f(x-k-1)\leqslant\varepsilon.$$

En sommant toutes ces inégalités pour k allant de 0 à n, où $n = \lfloor x - A \rfloor$, il vient après télescopage

$$0 \leqslant f(x) - f(x-n-1) \leqslant (n+1)\varepsilon.$$

Soit encore

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x-n-1)}{x} + \frac{(n+1)\varepsilon}{x} \leqslant \frac{f(x-n-1)}{x} + \varepsilon.$$

Puisque nous avons choisi pour n le plus grand entier tel que $x - n \geqslant A$, alors $x - n - 1 < A$ et donc par croissance de f, $f(x-n-1) \leqslant f(A)$.

On en déduit donc que $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{f(A)}{x} + \varepsilon$.

Et donc pour $x \geqslant \max\left(A, \frac{f(A)}{\varepsilon}\right)$, on a $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant 2\varepsilon$.

Et par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.8

Soit $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x+1) - f(x)| \leqslant M$.
Supposons par l'absurde que $\ell \neq 0$, par exemple que $\ell > 0$.
Alors il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que pour $x \geqslant A$, $f(x+1) - f(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$.
En particulier, pour $k \in \mathbf{N}^*$, on a $f(A+k) - f(A+(k-1)) \geqslant \dfrac{\ell}{2}$.
Et donc en sommant ces relations de 0 à $n \in \mathbf{N}^*$, il vient après télescopage :

$$f(A+n) - f(A) \geqslant n\frac{\ell}{2} \Rightarrow f(A+n) \geqslant n\frac{\ell}{2} + f(A).$$

Mais ceci contredit le fait que f soit bornée[5]

[5] Puisqu'elle prend des valeurs arbitrairement grande.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.9

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{f(a^n x)}{f(x)} = \frac{f\left(a \cdot a^{n-1}x\right)}{f(a^{n-1}x)} \frac{f(a \cdot a^{n-2}x)}{f(a^{n-2}x)} \cdots \frac{f(ax)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

⚠ Attention ! Ici, à n fixé, nous avons fait le produit d'un nombre **fini et fixé** de limites, il n'y a pas de problème.

Mais alors, pour $n < 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(a^n x)}{f(x)} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{f(X)}{f(a^{-n}X)} = 1$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(a^n x)}{f(x)} = 1$. Soit alors $n = \left\lfloor \dfrac{\ln b}{\ln a} \right\rfloor$, de sorte que $a^n \leqslant b < a^{n+1}$.

Alors par croissance de f, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(a^n x) \leqslant f(bx) \leqslant f(a^{n+1}x)$ et donc $\dfrac{f(a^n x)}{x} \leqslant \dfrac{f(bx)}{x} < \dfrac{f(a^{n+1}x)}{x}$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(bx)}{x} = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.10

Pour f, il suffit de constater que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2 \neq f(1)$, donc f n'est pas continue[6] en 1.
De même, g n'est pas continue en 1.

[6] Mais on prouverait qu'elle est continue à droite.

Pour $x \in [0,2]$, on a $g(f(x)) = x - 1$ et $f(g(x)) = \begin{cases} 2-x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$.
Il est évident que $g \circ f$ est continue, et on prouve aisément que $f \circ g$ ne l'est pas en 1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.11

Supposons au contraire que f ne soit pas constante, et soient alors $a \neq b$ deux valeurs prises par f, et notons x_0 un antécédent de a et x_1 un antécédent de b.
Puisque $|f|$ est constante, nécessairement $|a| = |b|$. Puisque de plus $a \neq b$, alors $a \neq 0$ et donc $b = -a$.
Mais alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [x_0, x_1]$ (ou $[x_1, x_0]$ si $x_0 > x_1$) tel que $f(t_0) = 0$.
Ceci contredit donc le fait que $|f|$ soit constante.
Et donc, si $|f|$ est constante, alors f est constante.

Solution de l'exercice 15.12

Commençons par noter qu'une récurrence triviale prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $x \in \mathbf{R}$, $f(2^n x) = f(x)$.
Soit $x \in \mathbf{R}$, non nul. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x) = f(2^n 2^{-n} x) = f(2^{-n} x)$.
Or, $2^{-n} x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et f étant continue en 0, $f(2^{-n}x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(0)$, seules les fonctions constantes sont solution.

Solution de l'exercice 15.13

Soit $f : x \mapsto a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0$, avec $a_{2n+1} \neq 0$.
Alors, lorsque $x \to +\infty$, en factorisant par x^{2n+1}, on prouve que f tend vers $+\infty$ si $a_{2n+1} > 0$ et vers $-\infty$ sinon.

De même, une étude en $-\infty$ prouve que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_{2n+1} > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Dans les deux cas, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont de signes opposés, donc par le théorème des valeurs intermédiaires[7], il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

[7] Un polynôme est continu.

Solution de l'exercice 15.14

1. Il faut d'abord déterminer le domaine de définition de f, ce qui nécessite d'étudier le signe de $\dfrac{1+x}{1-x}$.
Or, une étude rapide de cette fonction prouve que $\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1,1[$.
Notons que f est impaire sur $]-1,1[$, et donc il suffit d'étudier le prolongement par continuité en 1.
Or, pour $x \in]0,1[$, on a

$$f(x) = \underbrace{(1-x^2)}_{\underset{x\to1^-}{\longrightarrow} 0}\underbrace{\ln(1+x)}_{\underset{x\to1^-}{\longrightarrow} \ln(2)} - \underbrace{(1+x)}_{\underset{x\to1^-}{\longrightarrow} 2}(1-x)\ln(1-x).$$

Mais $\displaystyle\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x) = \lim_{X\to0} X\ln(X) = 0$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to1} f(x) = 0$, et donc on peut prolonger f par continuité en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[-1,1]$, en posant $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(-1) = 0$.

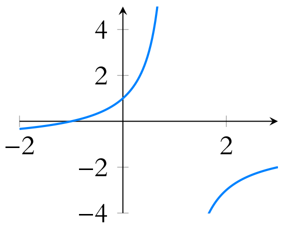


Figure 15.1– $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$

2. La fonction g est définie sur $\mathbf{R}^*$.
Or, puisque $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ 0 \leqslant |g(x)| \leqslant |x|.$$

Et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to0}|g(x)| = 0$.
Soit encore $\displaystyle\lim_{x\to0} g(x) = 0$. Et donc on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $\tilde{g}(0) = 0$..

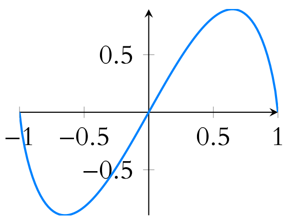


Figure 15.2– La fonction f.

3. La fonction h est définie sur $\mathbf{R}^*$. Or, lorsque $x \to 0$, $-\dfrac{1}{x^2}$ tend vers $-\infty$ et donc par composition de limites, $\lim x \to 0 e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.
Il est donc possible de prolonger par continuité h en 0 en posant $\tilde{h}(0) = 0$.

4. Cette fois lorsque x tend vers 0 par la gauche, $-\dfrac{1}{x} \underset{x\to0^-}{\longrightarrow} +\infty$. Et donc $\displaystyle\lim_{x\to0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$.
Donc k ne peut pas être prolongée par continuité en 0.

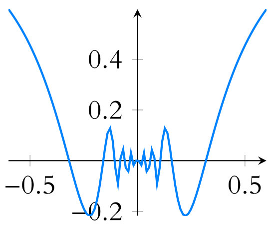


Figure 15.3– La fonction g.

Solution de l'exercice 15.15

1. On doit avoir $f(1) = f(1^2) = f(1)f(1) = f(1)^2$. Donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.
Si $f(1) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(1\cdot x) = f(1)f(x) = 0$.
Donc f est la fonction nulle.

2.a. C'est du classique, et surtout déjà fait : $f(0) = 0$, puis $f(2) = f(1) + f(1) = 2$, etc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$, puis $\forall n \in \mathbf{Z}$, $f(n) = n$, et enfin $\forall q \in \mathbf{Q}$, $f(q) = q$.

2.b. Si $x \in \mathbf{R}_+$, alors $f(x) = f\left(\sqrt{x}\sqrt{x}\right) = f\left(\sqrt{x}\right)^2 \geqslant 0$.
Et donc pour $x \leqslant y$, on a $f(y) = f(x + y - x) = f(x) + f(y-x)$.
Mais $y - x \geqslant 0$, donc $f(y-x) \geqslant 0$, et donc $f(y) \geqslant f(x)$.
Ainsi, f est croissante sur $\mathbf{R}$.

2.c. Soit $a \in \mathbf{R}$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) de rationnels, avec (x_n) croissante et (y_n) décroissante, qui tendent vers a.
Et alors $f(x_n) \leqslant f(a) \leqslant f(y_n) \Leftrightarrow x_n \leqslant f(a) \leqslant y_n$.
Par le théorème des gendarmes, $f(a) = a$.
Et donc f est l'identité.

Détails
On peut prendre x_n (resp. y_n)) l'approximation décimale par défaut (resp. excès) de a à 10^{-n} près.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.16

Puisque f est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|g(x)| \leqslant M$.
Et en particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(g(x))| \leqslant M$.
Donc $f \circ g$ est bornée.

Remarque
L'hypothèse de continuité de g est ici totalement superflue.

D'autre part, g étant continue sur $[-M, M]$, elle y est bornée : il existe $N > 0$ tel que pour tout $x \in [-M, M]$, $|g(x)| \leqslant N$.
Et donc pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) \in [-M, M]$, et donc $|g(f(x))| \leqslant N$.
Ainsi, $g \circ f$ est bornée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.17

Notons $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ la fonction qui a un temps t associe la distance parcourue par notre skieur depuis entre le départ et t.
On a donc $f(0) = 0$ et $f(2) = 42$.
Les lois de la physique telles que nous les connaissons[8] nous obligent à supposer f continue. Nous pourrions même raisonnablement supposer que f est continue, mais cela n'est pas indispensable (nous autorisons donc notre skieur à perdre un gant et à revenir en arrière pour le récupérer, ce qui est plutôt sympathique de notre part !).

[8] À ma connaissance, si on sait téléporter des photons, on n'a toujours pas réussi à téléporter un skieur.

Si f est affine, c'est-à-dire que notre skieur a évolué à vitesse constante sur tout le parcours, le résultat est absolument évident : il a parcouru 21 kilomètres dans tout intervalle de temps d'une heure.
S'il est resté sur place la première heure, et a bouclé le 42 kilomètres lors de la deuxième heure, là encore à vitesse constante, alors dans l'intervalle de temps $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, il a parcouru 21 km.
On pourrait ainsi traiter de nombreux cas «à la main».
Considérons plutôt la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x+1) - f(x)$, de sorte que g est la distance parcourue dans l'heure qui commence en x.
▸ Si $f(1) \geqslant 21$. Alors $g(0) = f(1) - f(0) \geqslant 21$, et $g(1) = f(2) - f(1) = 42 - f(1) < 21$.
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g, qui est continue sur $[1, 2]$, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $g(t_0) = 21$.
▸ Si $f(1) \leqslant 21$. Alors $g(0) = f(1) \leqslant 21$ et $g(1) = f(2) - f(1) = 42 - f(1) \geqslant 21$.
Là encore, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence de $t_0 \in [0, 1]$ tel que $g(t_0) = 21$.

Et donc dans les deux cas, il existe un intervalle d'une heure dans lequel le skieur a parcouru 21 km.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.18

Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Puisque f est croissante, par le théorème de la limite monotone, elle admet des limites à gauche et à droite en a. Notons $f(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $f(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
On a alors $f(a^-) \leqslant f(a) \leqslant f(a^+)$.
De même, g étant décroissante, elle admet des limites à droite et à gauche en a, notons-les $g(a^-)$ et $g(a^+)$.
Et alors $g(a^+) \leqslant g(a) \leqslant g(a^-)$.
Mais la fonction $x \mapsto x$ est continue en a, et admet donc a pour limite à droite et à gauche en a, donc par opération sur les limites[9]

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} xg(x) = a \lim_{x \to a^+} g(x) = ag(a^+).$$

[9] Les opérations usuelles restent évidemment valables pour des limites à gauche ou à droite.

Et de même, $f(a^-) = ag(a^-)$.
Puisque $a > 0$, on a donc $f(a^-) \geqslant f(a^+)$, et comme nous avions déjà l'inégalité dans l'autre sens, $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$.
Et donc f est continue en a.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.19

1. Si x est un point fixe de f, alors $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$, donc x est un point fixe de $f\circ f$.
   Donc déjà, si f admet un point fixe, alors $f\circ f$ admet un point fixe.

   Inversement, supposons que f ne possède pas de point fixe. Alors, la fonction $x\mapsto f(x)-x$ est de signe constant. En effet, si elle changeait de signe, par le théorème des valeurs intermédiaires[10], il existerait $x\in\mathbf{R}$ tel que $f(x)-x=0 \Leftrightarrow f(x)=x$.
   Supposons donc qu'elle soit strictement positive, c'est-à-dire que pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x)-x > 0 \Leftrightarrow f(x) > x$.
   Alors pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(f(x)) > f(x) > x$. Et donc $f\circ f$ n'admet pas de point fixe.
   De même, si $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x) < x$, alors pour tout x, $f(f(x)) < f(x) < x$, et donc $f\circ f$ n'admet pas non plus de point fixe.

   Nous avons donc prouvé que f admet un point fixe si et seulement si $f\circ f$ admet un point fixe.
2. Nous avons prouvé précédemment que si x est un point fixe de f, alors c'est également un point fixe de $f\circ f$.
   Et donc $f\circ f$ possède au moins autant de points fixes que f.

Remarque
Notons que la continuité de f ne nous a été d'aucun utilité ici.

[10] Et c'est ici que la continuité de f est indispensable !

Solution de l'exercice 15.20

1. Soit $x\in\mathbf{R}$, et soit $\varepsilon > 0$. Alors pour $y\in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, on a $|x-y| < \varepsilon$ et donc $|f(x)-f(y)| < |x-y| < \varepsilon$.
   Et donc $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$, donc f est continue en x.
   Ceci étant vrai pour tout $x\in\mathbf{R}$, f est continue sur $\mathbf{R}$.
2. Supposons que f possède au moins deux points fixes $x < y$.
   Soit alors $z\in]x,y[$, et supposons par l'absurde que $f(z)\neq z$.
   ► Si $f(z) > z$. Alors
   $$|f(x)-f(z)| \leqslant |x-z| \Leftrightarrow f(z)-f(x) \leqslant z-x.$$
   Soit encore $f(z)-z < f(x)-x = 0$, ce qui est absurde.
   ► Si $f(z) < z$, alors $|f(y)-f(z)| \leqslant |y-z| \Leftrightarrow f(y)-f(z) \leqslant y-z$, et par conséquent $f(z)-z \geqslant f(y)-y = 0$, ce qui est absurde.
   Donc $f(z) = z$, et donc z est un point fixe.
   Ainsi, tous les points de $[x,y]$ sont fixes par f : l'ensemble des points fixes de f est un intervalle de $\mathbf{R}$.

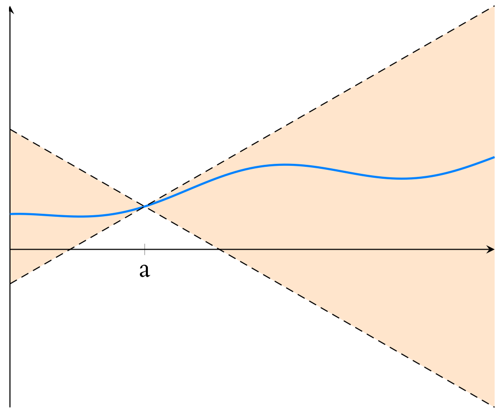
   Remarques : si f est 1-lipschitzienne, et si $a\in\mathbf{R}$, alors pour tout $x\geqslant a$, $|f(x)-f(a)\leqslant |x-a|$, de sorte que
   $$f(a)+a-x \leqslant f(x) \leqslant x-a+f(a).$$
   Or, $y = f(a)+a-x$ est l'équation de la droite de coefficient directeur -1 passant par $(a, f(a))$.
   Et de même, $y = x-a+f(a)$ est l'équation de la droite de coefficient directeur 1 qui passe par $(a, f(a))$.
   Donc si f est 1-lipschitzienne, sa courbe représentative est située entre ces deux droites.
   Si a et b sont deux points points fixes, et si $z\in[a,b]$ est tel que $f(z) < z$, alors le graphe de f doit être situé sous une droite de coefficient directeur 1 et parallèle à la première bissectrice : on ne pourra pas avoir $f(b) = b$.
   Et alors f ne peut rester sur cette droite et venir intersecter la première bissectrice en b.
   Idem si $f(z) > z$.

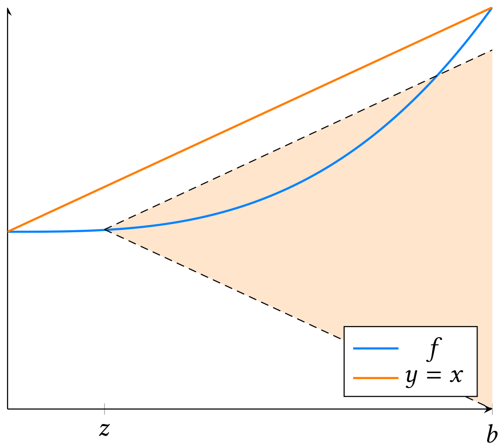
Autrement dit
On peut prendre $\eta = \varepsilon$ dans la définition de limite.

Remarque
S'il n'y a pas de point fixe, il n'y a rien à dire, et s'il n'y a qu'un point fixe a, $\{a\} = [a, a]$ est un intervalle.

Solution de l'exercice 15.21

Soit $g : \left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)-x \end{array}\right.$.
Puisque $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\in[a,b]$, alors $f(a)\geqslant a \Leftrightarrow f(a)-a\geqslant 0 \Leftrightarrow g(a)\geqslant 0$.
De même, $f(b)\leqslant b \Leftrightarrow f(b)-b\leqslant 0 \Leftrightarrow g(b)\leqslant 0$.
Donc g, qui est une fonction continue car somme de fonctions continues, change de signe.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_0\in[a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$.
Soit encore $f(x_0)-x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.





SOLUTION DE L'EXERCICE 15.22

Soit $A = f(0) + 1$. Puisque f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que pour $x > b$, $f(x) > f(0) + 1$. Notons qu'on a nécessairement $b > 0$.
De même, comme $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour $x < a$, $f(x) > f(0) + 1$. Et alors a est négatif.
Alors, sur le segment $[a, b]$, la fonction f est continue, et donc[11] possède un minimum $m \leqslant f(0)$, atteint par exemple en $x_0 \in [a, b]$.
Alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a :

- soit $x \in [a, b]$, auquel cas $f(x) \geqslant m$ par définition de m ;
- soit $x > b$, mais alors $f(x) > f(0) + 1 > m$;
- soit $x < a$, et alors $f(x) > f(0) + 1 > m$.

Et donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geqslant m$, de sorte que m est un minorant de f. Et puisqu'il s'agit d'une valeur atteinte par f, c'est le minimum de f sur $\mathbf{R}$.

[11] C'est le théorème des bornes atteintes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.23

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors, par densité de $\mathbf{Q}$, il existe une suite $(q_n) \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ telle que $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
Et alors par continuité de f, $\lim_{n \to +\infty} f(q_n) = f(a) \Rightarrow f(a) = 0$.
2. La fonction $f - g$ est continue sur $\mathbf{R}$, et nulle sur $\mathbf{Q}$. Par la question 1, elle est nulle, donc $f = g$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.25

Supposons au contraire qu'il existe $y \in \mathbf{R}$ qui ne possède qu'un nombre fini d'antécédents[12].
Notons alors $x_1 < \cdots < x_n$ ces antécédents. Alors $x \mapsto f(x) - y$ est de signe constant sur $]x_n, +\infty[$. En effet, par le théorème des valeurs intermédiaires, si $x \mapsto f(x) - y$ changeait de signe sur $]x_n, +_infty[$, alors y aurait un antécédent dans $[x_n, +\infty[$, ce qui n'est pas le cas.
Et idem pour l'autre intervalle.
Supposons par exemple que pour tout $x > x_n$, $f(x) \geqslant y$.
Notons alors $m = \min_{[0, x_n]} f$, qui existe bien par le théorème des bornes atteintes[13]
Alors $\min(y, m) - 1$ n'a pas d'antécédent dans $[0, x_n]$ par définition, et ne peut en avoir dans

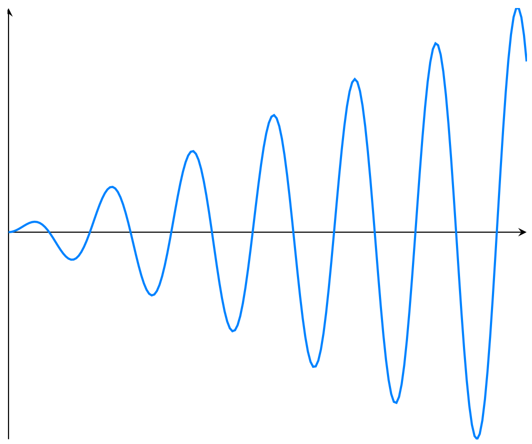
[12] La surjectivité nous garantit l'existence d'au moins un antécédent.

[13] Qui s'applique ici puisque $[0, x_1]$ est un segment.

$]x_n, +\infty[$ puisque f n'y prend que des valeurs supérieures à y.
Ceci vient contredire la surjectivité de f.
Et donc tout $y \in \mathbf{R}$ possède une infinité d'antécédents.

Un exemple de fonction vérifiant ces hypothèses est $x \mapsto x\sin(x)$, qui prend bien une infinité de fois chaque valeur y.
Notons que ce théorème devient absolument faux si on remplace $\mathbf{R}_+$ par $\mathbf{R}_+^*$, comme le

Exercice Le prouver «à la main», sans utiliser ce qui précède.



prouve le cas de la fonction ln.

Solution de l'exercice 15.26

Procédons par analyse-synthèse.
Soit donc f une telle fonction, qu'on peut supposer non nulle[14].
Pour $x = y = 0$, il vient $f(0)^2 = f(0)$, et donc $f(0) \in \{0, 1\}$.
Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(\sqrt{x^2}) = 0$.
Si $x > 0$, on a donc $f(x) = 0$. Et pour $x < 0$, on a, si $y \in \mathbf{R}$ est un réel tel que $f(y) \neq 0$,
$f(x) = \dfrac{f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{f(y)} = \dfrac{f\left(\sqrt{(-x)^2+y^2}\right)}{f(y)} = f(-x)$.
Et donc $f(x) = 0$ pour tout x.

[14] La fonction nulle est clairement solution.

Remarque f étant non nulle, il existe un tel réel.

On a donc $f(0) = 1$.
Prouvons que f ne s'annule jamais. En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x)^2 = f\left(\sqrt{2}|x|\right)$, et donc si $t > 0$ est un point où f s'annule, alors on a aussi $f\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

Et alors une récurrence rapide prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}^n}\right) = 0$.

Mais par continuité de f, puisque $\dfrac{t}{\sqrt{2}^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient donc $f(0) = 0$, ce qui n'est pas le cas.
Donc f est de signe constant[15], et puisque $f(0) = 1 > 0$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$.

[15] C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, et lié au fait qu'elle est continue.

Soit alors g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $g(x) = \ln\left(f(\sqrt{x})\right)$.
Elle est continue par composition de fonctions continues, et pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2$,

$$g(x^2+y^2) = \ln\left(f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) = \ln\left(f(x)f(y)\right) = g(x^2) + g(y^2).$$

Soit encore $g(X+Y) = g(X) + g(Y)$ pour tout $(X, Y) \in \mathbf{R}^2$.
Mais alors il est classique que $g(0) = 0$, que si $g(1) = a$, alors pour tout $x \in \mathbf{N}$, $g(n) = g(1+1+\cdots+1) = g(1)+\cdots+g(1) = na$, puis que pour tout rationnel r, $g(r) = ar$.
Enfin, par continuité de g, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $g(x) = ax$.
Et par conséquent, $f(x) = e^{ax^2}$.

Inversement, toute fonction de la forme $x \mapsto e^{ax^2}$ satisfait bien l'équation de départ.
Donc les solutions sont la fonction nulle et les $x \mapsto e^{ax^2}$, $a \in \mathbf{R}$.