TD 18 : Comparaison des suites et des fonctions

► Comparaison des suites

Exercice 18.1 Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} k!$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$ **PD**

Exercice 18.2 Soit (u_n) une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. **AD**

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. En déduire un équivalent simple de (u_n).

Exercice 18.3 Classer les suites suivantes de sorte que chacune soit négligeable devant la suivante : **PD**

- $\frac{1}{n}$
- $\frac{\ln n}{n}$
- $n\ln(n)$
- $\frac{2}{\sqrt{n}}$
- n^2+1
- n^3+n
- $e^n\sqrt{n}$
- $e^{-n}n^2$
- $\frac{n!}{n^4}$
- $\frac{1}{n\ln n}$

Exercice 18.4 Déterminer les limites des suites suivantes : **PD**

1. $u_n = \dfrac{2^n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \dfrac{n\sin n}{1+n^2}$
3. $u_n = \sqrt[n]{n}$
4. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$
5. $u_n = n^2\left(\cos\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n+1}\right)$
6. $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$
7. $u_n = \dfrac{3n^2+(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}+\ln(n)}$

Exercice 18.5 Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui tendent vers $+\infty$ et telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. **PD**
Montrer qu'il existe une suite (w_n) telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Exercice 18.6 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2}$.

Exercice 18.7 Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites à termes strictement positifs, et telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. Que dire de (v_n) ? **F**

Exercice 18.8 Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses : **PD**

1. Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) est bornée.
2. Si (u_n) converge et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge.
3. Si (u_n) converge vers 0 et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge vers 0.
4. Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$, alors (v_n) converge.
5. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :
   - ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$
   - ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$
   - ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^4)$
   - ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$
   - ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{n^4}{2}\right)$.
6. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors :
   - ☐ $\ln(u_n) = o(n)$
   - ☐ $\ln(u_n) = o(u_n)$
   - ☐ $\ln(n) = o(u_n)$
7. Soit (u_n) une suite réelle. Alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
8. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :
   - ☐ $u_n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n+1$
   - ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2v_n$
   - ☐ $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$
   - ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$
   - ☐ $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$
   - ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$
   - ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$
9. Soit (u_n) une suite strictement positive. Laquelle des situations suivantes est équivalente au fait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$?
   - ☐ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$
   - ☐ $u_n - 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   - (a) $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(2)$
   - (b) $\dfrac{u_n}{2^n} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.

Exercice 18.9 Déterminer des équivalents des suites suivantes : **AD**

1. $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$
2. $e^{\tan\frac{\pi}{n^2}}-1$
3. $e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}}-e^{\frac{\pi}{2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
4. $\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n^3+1}}$
5. $\dbinom{n}{k}$, où $k\in\mathbf{N}$ est fixé.
6. $(n+1)^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n}}$
7. $\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right)-1$
8. $\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n}$
9. $\sin\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{n}{2^n}\right)\right)$.

Exercice 18.10 Développement asymptotique d'une suite définie implicitement AD

Pour $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $f_n : x\mapsto x^5+nx-1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ possède une unique solution strictement positive que l'on notera u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.
3. Prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^6}+o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$.

Exercice 18.11 PD
Donner un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ mais qu'on n'aie ni $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, ni $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.

Exercice 18.12 (Oral Polytechnique) TD

Soit (u_n) une suite définie par $u_0\in\mathbf{R}$ et $\forall n\in\mathbf{N}$, $u_{n+1}=u_n+e^{-u_n}$.
Déterminer un équivalent de (u_n).

► Comparaison des fonctions

Exercice 18.13 Du calcul, rien que du calcul AD

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right)^{x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x+1}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(2x)-\cos(5x)}{x^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\sqrt{1+x}+1}{\cos x-e^x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to0}\ln(e+x)^{\frac{1}{x}}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$.

Exercice 18.14 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes : AD

1. $\dfrac{\cos x}{1+x}-1$ en 0
2. $(x+1)^x-x^x$ en $+\infty$.
3. $x^2\ln(1+x)+x\cos x$ en $+\infty$
4. $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\operatorname{Arctan}(x^3)}$ en 0
5. $\ln\dfrac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}$ en 0
6. $\dfrac{\ln x}{1-x^2}$ en 1
7. $\dfrac{xe^x-x^2}{\operatorname{ch}(x)}$ en $+\infty$
8. $\dfrac{\tan(x-x\cos x)}{\sin x+\cos x-1}$ en 0
9. $(\ln(1+x))^2-(\ln(1-x))^2$ en 0

Exercice 18.15 Soit $f : x\mapsto\dfrac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x)$. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on déterminera au voisinage de $+\infty$. AD

Exercice 18.16 Soit $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$. PD

1. Prouver que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\ln x}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de $(e^{f(x)}-1)\ln(x)$.
3. Soit $g(x)=\left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x-1\right]\ln(x)$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 18

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.1

Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! = \sum_{k=1}^{n-1} k! + n!$, il s'agit de prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k! \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

Soit encore que $\dfrac{\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

S'il est clair que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il n'est pas question de sommer ces limites, **qui ne sont pas en nombre fixé.**

Essayons plutôt d'encadrer la somme : on a, pour $n \geqslant 3$

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \leqslant \frac{1}{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$$

et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!} = 0$.

Et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.2

1. Puisque f est décroissante et minorée, elle converge vers un réel ℓ.
   Mais $u_{n+1} + u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ell + \ell = 0$, donc $\ell = 0$.

Remarque

On a sommé des limites, et pas des équivalents !

2. Par décroissance de (u_n), on a $u_n + u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant u_n + u_{n-1}$.
   Mais $u_n + u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
   Donc $n(u_n + u_{n-1}) \leqslant 2nu_n \leqslant n(u_n + u_{n+1})$, et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2nu_n = 1 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.3

Notons $u_n \prec v_n$ pour signifier que $u_n = o(v_n)$.

On a alors

$$e^{-n}n^2 \prec \frac{1}{n\ln n} \prec \frac{1}{n} \prec \frac{\ln n}{n} \prec \frac{2}{\sqrt{n}} \prec n\ln n \prec n^2 + 1 \prec n^3 + n \prec e^n\sqrt{n} \prec \frac{n!}{n^4}$$

Les seules qui ne découlent pas directement du cours sont la première et la dernière.

On a $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, de sorte que $e^n n^2 = \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$.

Et pour la dernière, il s'agit de prouver que $\dfrac{e^n\sqrt{n}n^4}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or, $e^n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{n!}{n^4}\right)$.

Il s'agit donc de prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n n^4\sqrt{n}}{n!} = 0$.

Mais $\sqrt{n}n^4 = n^{9/2} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$.

Et donc $e^n\sqrt{n}n^4 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{2n}\right)$.

Mais $e^{2n} = \left(e^2\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

D'où le résultat annoncé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.4

1. Puisque $(-1)^n \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$, il vient $2^n + (-1)^n = 2^n + \underset{n\to+\infty}{o}(2^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.
   De même, on a $3n + (-1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Puisque $|\sin n| \leqslant 1$, il vient $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{n}{1+n^2}$.
Mais $\dfrac{n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, le théorème des gendarmes, on a donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. On a $u_n = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$. Or, par croissance comparées, $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n)} = e^0 = 1$.

4. Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, il faut passer par la forme exponentielle :

$$u_n = e^{(n+2)\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} = e^{(n+2)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}.$$

Or, $(n+2)\ln\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2(n+2)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-2}$.
Alternative : si on ne voit pas que $\dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1}$, il est possible de remarquer que $\dfrac{n-1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et donc

$$\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\left(\frac{n-1}{n+1} - 1\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n-1}{n+1} - 1 = -\frac{2}{n+1}.$$

5. Puisque $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\cos\dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Et de même,

$$\cos\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) = 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent,

$$\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Après multiplication par n^2, il vient

$$u_n = \underbrace{\frac{-2n^3-n^2}{2n^2(n+1)^2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{o(1)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. En revenant à la forme exponentielle, on a $u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\right)$.
Or, puisque $\cos\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a donc

$$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \cos\frac{1}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Et donc $n^2\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}$.
Par continuité de l'exponentielle, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

7. On a $3n^2 + (-1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2$.
D'autre part, $\sqrt{n^2+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et donc $\ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{n^2+2}\right)$.
On en déduit donc que $\sqrt{n^2+2} + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^2+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
Par conséquent, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3n^2}{n}$, donc $u_n \to +\infty$.

Danger !
Il y a ici un piège très classique : 1^∞ est une forme indéterminée.
Pour lever l'indétermination, on repassera toujours par la forme exponentielle : $a^b = e^{b\ln(a)}$.

Détails
Puisque $\frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$, on a

$$o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc nous pouvons regrouper les deux o en un seul : $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Détails
On a utilisé ici le fait que lorsque $u \to 1$,

$$\ln(u) = \ln(1+(u-1)) \sim u-1.$$

Rédaction
Le fait que si $u_n \to \ell$, alors $f(u_n) \to f(\ell)$ n'est vrai que si f est continue en ℓ. Il ne faut alors pas oublier de le mentionner.

Détails
Par définition, on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$u_n = v_n + o(v_n).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.5

Puisque les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, elles sont strictement positives à partir d'un certain rang.

Et donc $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Posons alors $w_n = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} v_n = \sqrt{u_n v_n}$, de sorte que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Et alors $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n v_n}} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.6

Voici un cas où la formule de Stirling semble toute indiquée !

On a $(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1}\sqrt{2\pi(2n+1)}$.

Et de même, $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)$.

Donc il vient

$$\begin{aligned}\frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1}\sqrt{2\pi(2n+1)}}{\sqrt{n}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{2\pi}}\frac{(2n+1)^{3/2}}{n\sqrt{n}}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{2\pi}}\frac{2^{3/2}n^{3/2}}{n\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}.\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\end{aligned}$$

Mais une fois de plus[1], on a

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right).$$

Or, $\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, donc $2n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, de sorte que par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n} = e$.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

[1] Archi-classique !

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.7

Puisque tout est positif, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant \dfrac{v_n}{u_n} \leqslant \dfrac{w_n}{u_n}$.

Par le théorèmes des gendarmes, on a donc $\dfrac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.8

1. Si $u_n = (2n+1)^2$, alors :

✗ $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)}$: en effet, $\dfrac{(2n-1)^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{8n^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8 \neq 0$.

✓ $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3}$: voir ci-dessus.

✓ $\underline{u_n = o(n^4)}$: on a $u_n \sim 8n^3$ et donc $\dfrac{u_n}{n^4} \sim \dfrac{8n^3}{n^4} = \dfrac{8}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

✗ $\underline{u_n \sim n^3}$: les constantes ont leur importance dans les équivalents.
En effet, on a $\dfrac{u_n}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{8n^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8 \neq 1$.

✓ $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{n^4}{2}\right)}$: les constantes ne servent à rien dans les o : être négligeable devant n^4 est pareil qu'être négligeable devant $\dfrac{n^4}{2}$.

Détails
Pour s'en convaincre, on peut revenir au quotient : on a
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^4/2} = 0$$
si et seulement si
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^4} = 0.$$

2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors :

✗ $\underline{\ln(u_n) = o(n)}$: par exemple, si $u_n = e^n$, alors $\ln(u_n) = n$, qui n'est évidemment pas négligeable devant n.

✓ $\underline{\ln(u_n) = o(u_n)}$: revenons à la définition d'un o : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$ par composition de limites[2].

✗ $\underline{\ln(n) = o(u_n)}$: prendre par exemple $u_n = \ln(n)$.

3. ✗ Par exemple, prenons $u_n = e^n$. Alors $u_{n+1} = e^{n+1} = e \times u_n$, de sorte que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e \neq 1$, et donc $u_n \nsim u_{n+1}$.
Notons toutefois que pour une suite convergeant vers une limite $\ell \neq 0$, le résultat est vrai car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

4. Si $u_n \sim v_n$, alors :

✗ $\underline{u_n + 1 \sim v_n + 1}$: en effet, si $u_n = -1 + \dfrac{1}{n}$, et $v_n = -1$, alors $u_n \sim v_n$, mais pourtant $v_n + 1 = 0$ alors que $u_n + 1 \neq 0$, et donc $u_n \nsim v_n$.

✓ $\underline{2u_n \sim 2v_n}$: on a bien le droit de multiplier les équivalents. Et en particulier de les multiplier par une constante.

✗ $\underline{u_n - v_n \sim 0}$: prenons $u_n = \dfrac{1}{n} + 1$ et $v_n = 1$. Alors $u_n \sim v_n$, et $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ n'est pas équivalent à 0.

✓ $\underline{-u_n \sim -v_n}$: comme précédemment, on peut multiplier les équivalents.

✓ $\underline{u_n v_n \sim u_n^2}$: on peut multiplier les équivalents.
Or, $u_n \sim v_n$ et $u_n \sim u_n$, donc par produit d'équivalents, $u_n v_n \sim u_n u_n = u_n^2$.

✗ $\underline{e^{u_n} \sim e^{v_n}}$: prenons $u_n = n$ et $v_n = n + 1$. Alors $\dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = \dfrac{e^n}{e^{n+1}} = \dfrac{1}{e} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 1$ et donc $e^{u_n} \nsim e^{v_n}$.

5. ✗ $\underline{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2}$

Par exemple si $u_n = n2^n$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, et pourtant $\dfrac{u_n}{2^n} = n$, de sorte que $u_n \nsim 2^n$.

✗ $\underline{u_n - 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$: la condition donnée est suffisante, puisque si $u_n - 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\dfrac{u_n}{2^n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\dfrac{u_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Toutefois, elle n'est pas nécessaire. Par exemple, si on pose $u_n = 2^n + n$, alors $u_n = 2^n + \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$, de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.
Mais pourtant, $u_n - 2^n = n \not\to 0$.

✗ $\underline{\ln u_n \sim n\ln(2)}$: puisqu'on ne peut pas composer les équivalents, il n'est pas possible de passer à l'exponentielle pour en déduire que $u_n = e^u \sim e^{n\ln 2} = 2^n$.
Par exemple, si $u_n = 3 \times 2^n$, alors $\ln u_n = \ln(3) + n\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(2)$, mais pourtant $u_n \nsim 2^n$.

✓ $\underline{\dfrac{u_n}{2^n} - 1 = \underset{n\to+\infty}{o}(1)}$

Ceci est équivalent à $\dfrac{u_n}{2^n} = 1 + o(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
Et donc, après multiplication par 2^n, à $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.

Solution de l'exercice 18.9

1. On a

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$

[2] Il est bien connu que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

En revanche
Si $\ell = 0$, le résultat est faux, comme le prouve $u_n = e^{-n}$.

Équivalent à 0
Rappelons que seule la suite nulle est équivalent à 0.

Quest. subsidiaire
Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n \to 0$.

$$\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Puisque $\tan\frac{\pi}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$e^{\tan\frac{\pi}{n^2}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \tan\frac{\pi}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}.$$

3. Notons que $\operatorname{Arccos}\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$, et que les seuls informations que nous connaissions au sujet de e^x sont lorsque $x\to 0$.
Il s'agit alors d'écrire $e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}} = e^{\frac{\pi}{2}+\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}}$.
Cette fois, $\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, de sorte que

$$e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}+o\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Mais $\operatorname{Arccos}\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ de sorte que $\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et donc $o\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Et donc

$$e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}}-e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{n}} = e^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}}-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}+o\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2n}.$$

4. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $\sqrt{n}-1<\lfloor\sqrt{n}\rfloor\leqslant\sqrt{n}$, et donc en divisant par n, $1-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}\leqslant 1$.
Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}=1$, et donc $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
Puisque d'autre part $n^3+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$, $\sqrt{n^3+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^3}=n^{3/2}$.
Et donc $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n^3+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

> **Plus généralement**
> Le même encadrement permet de prouver que pour toute suite (u_n) qui tend vers $+\infty$, $\lfloor u_n\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
> En revanche, rien de tel ne reste valable pour des suites qui ne tendraient pas vers $+\infty$.

5. On a $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
Le numérateur est un polynôme de degré k en n, dont le coefficient dominant vaut 1.
Il est donc équivalent à n^k. Et par conséquent, $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

> **Méthode**
> La présence de factorielles ne doit pas vous faire automatiquement penser à Stirling, qui doit plutôt être un dernier recours, si aucune simplification ne peut être effectuée.

6. On a $(n+1)^{1/n}-n^{1/n}=n^{1/n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}-1\right)$.
Mais $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

Puisque $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc $e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
D'autre part, il est facile, en revenant aux exponentielles, de prouver que $n^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc que $(n+1)^{1/n} - n^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

7. Notons que $\frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\sqrt{n}}{n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc il vient

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

8. On a $u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right)$.
Or, nous savons que $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \underset{u\to 0}{o}(u)$. Donc

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}} &= 1 + \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \frac{5}{6n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{6n^2}.\end{aligned}$$

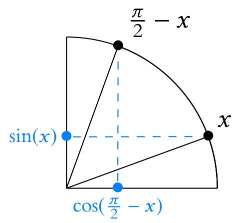
Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{6n}$.

9. Commençons par noter que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{n}{2^n}\right)$.
Puisque $n = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) = 0$.
On en déduit donc que

$$u_n = \sin\left(\sin\left(\frac{n}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}.$$

> **Détails**
> Il s'agit d'utiliser l'équivalent usuel
> $$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x.$$
> Notons que pour l'utiliser, il était indispensable de commencer par s'assurer que la quantité dans l'exponentielle tend bien vers 0.

> **Trigo**
> Comme (presque) toutes les formules de trigonométrie, la formule
> $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
> peut se retrouver sur un dessin



Solution de l'exercice 18.10

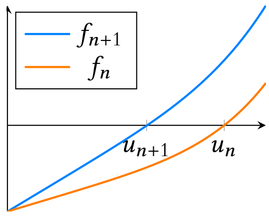
1. Il suffit de dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbf{R}_+^*$.
Elle y est strictement croissante[3], continue, et $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Donc par le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbf{R}_+^*$.

2. Notons que $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x$, et donc que $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = u_n > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
Par croissance de f_{n+1}, ceci implique que $u_{n+1} < u_n$.
Donc la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée par 0, elle converge vers une limite ℓ.
Mais alors, on a $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n^5 + nu_n - 1 = 0 \Leftrightarrow u_n = \frac{1-u_n^5}{n}$.
Or la suite $(1-u_n^5)$ est convergente, donc bornée, et donc $\frac{1-u_n^5}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et ainsi, $\ell = 0$.

3. Nous avons $nu_n = 1 - u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. C'est la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
Mais alors, $u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^5}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^6}$, et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

[3] Inutile de dériver : c'est une somme de fonctions strictement croissantes.



f_{n+1} est au dessus de f_n, donc coupe l'ax des abscisses plus tôt

> **Rappel**
> $u_n \sim v_n$ si et seulement si
> $$u_n = v_n o(v_n).$$

Solution de l'exercice 18.11

La première idée pour avoir une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et pas $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ serait de prendre une suite équivalente à (u_n), ou même à un multiple[4] de u_n. Mais dans ce cas, on aurait $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
L'énoncé veut donc nous faire dire qu'il existe davantage d'autres suites dominées par (v_n)...

[4] Non nul.

Cherchons une solution avec (u_n) et (v_n) non nulles.
On veut donc $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ bornée mais qui ne tend pas vers 0, et $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_n$ non bornée.
Il faut donc que $\frac{v_n}{u_n}$ puisse prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, mais elle ne peut pas pour autant tendre vers $+\infty$, faute de quoi son inverse tendrait vers 0.
Nous connaissons de telles suites, par exemple $w_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{sin est impair} \end{cases}$

Donc posons $u_n = 1$ et $v_n = u_n w_n = w_n$, de sorte que $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{w_n}$ qui est bornée par 1 (et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$) et $\frac{v_n}{u_n} = w_n$ qui est non bornée puisque $w_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte qu'on n'a pas $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.12

Il est évident que (u_n) est croissante. Si elle convergeait vers un réel ℓ, on aurait $\ell = \lim_n +\infty\, u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n + e^{-u_n} = \ell + e^{-\ell}$ (par continuité de l'exponentielle).
Mais ceci est impossible, donc nécessairement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Posons alors $v_n = e^{u_n}$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + e^{-u_n}} = e^{u_n + \frac{1}{v_n}} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}.$$

Puisque (v_n) tend elle aussi vers $+\infty$, on a

$$v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} v_n\left(1 + \frac{1}{v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right)\right) = v_n + 1 + o(1).$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Appliquons alors le théorème de sommation de Césaro[5]

$$\frac{(v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \cdots + v_{n+1} - v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Soit encore $\frac{v_{n+1} - v_0}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, de sorte que $\frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
Puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a bien le droit de composer les équivalents par le logarithme : $u_n = \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

[5] Oui je sais, ce n'est pas explicitement au programme, mais tout le monde l'a fait un jour en TD, et c'est le genre de choses qu'il peut être bon de savoir pour l'X...

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.13

1. Aucune difficulté ici : $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, et donc par produit et quotient d'équivalents, $\frac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$.

2. On a $\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right)\right)$.
   Puisque $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\cos\frac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Écrivons alors $\ln\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\frac{1}{\ln x} - 1\right)\right)$, avec $\cos\frac{1}{\ln x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On a alors $\ln\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \cos\frac{1}{\ln x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\ln^2(x)}$.
   Et donc $x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2\ln(x)^2}$.
   Par croissances comparées, ceci tend vers $-\infty$, et donc $\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right)^{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Astuce
Voici une astuce qui sert très souvent : on connaît un équivalent de $\ln(1+x)$ quand x tend vers 0.
Donc pour $\ln(x)$, avec $x \to 1$, il suffit d'écrire $\ln(x) = \ln(1 + (x-1))$, et alors $x - 1 \to 0$, donc l'équivalent précité fonctionne.

3. On a $\sqrt{2 - x^2} = \sqrt{1 + (1 - x^2)}$ avec $1 - x^2 \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$.
   Donc $\sqrt{2 - x^2} - 1 \underset{x\to1}{\sim} \frac{1 - x^2}{2} \underset{x\to1}{\sim} 1 - x$.

Puisque d'autre par, $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, on en déduit, par quotient d'équivalents que

$$\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1-x}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} -1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -1.$$

4. Commençons par noter que $\sqrt[3]{x^3+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{x^3} = x$ et de même $\sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
Donc nous pouvons factoriser par x, le terme «prépondérant».
Il vient alors

$$\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Or, $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

De même,

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{2x^2}\right) = 1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Et donc

$$\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = -\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}.$$

Après multiplication par x, on en vient donc à

$$\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

5. On a $\cos(2x)-\cos(5x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{4x^2}{2}-1+\frac{25x^2}{2}+o(x^2)$ et donc

$$\frac{\cos(2x)-\cos(5x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{21}{2}+o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{21}{2}.$$

6. On a $\ln(1+x)-\sqrt{1+x}+1 \underset{x\to 0}{=} x+o(x)-1-\frac{1}{2}x+o(x)+1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$.
De même,

$$\cos x - e^x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x-o(x) \underset{x\to 0}{=} -x+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x.$$

Et donc $\frac{\ln(1+x)-\sqrt{1+x}+1}{\cos x - e^x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.

7. On a $\ln(e+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\ln(e+x)\right)\right)$.
Mais $\ln(e+x) = 1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)$, avec $\ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Et donc $\ln\left(\ln(e+x)\right) = \ln\left(1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{e}$.
Par conséquent,

$$\frac{1}{x}\ln\left(\ln(e+x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\frac{x}{e} = \frac{1}{e} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

Et donc, par continuité de l'exponentielle[6], $\lim_{x\to 0} \ln(e+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1/e}$.

[6] Toujours nécessaire pour composer des limites.

8. On a $\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)\right)$.
Mais $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1+\frac{2x}{x^2-x+1}$, avec $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-x+1} = 0$.
Et donc $\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$.

On en déduit que $x\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = e^2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.14

1. On a
$$\frac{\cos x}{1+x}-1 = \frac{\cos x - 1 - x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^2}{2}-x+o(x^2)}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} -x.$$

2. On a $(x+1)^x - x^x = x^x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1\right)$.
Mais $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e$, et donc $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e-1$.
Et donc $(x+1)^x - x^x \underset{x\to+\infty}{\sim} (e-1)x^x$.

3. Puisque $x\cos x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2\ln(1+x))$, on a $x^2\ln(1+x)+x\cos x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\ln(1+x)$.
Et de plus, $1+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc[7] $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.
Donc $x^2\ln(1+x)+x\cos(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\ln(x)$.

[7] On a le droit de composer à gauche les équivalents par le ln si les fonctions tendent vers $+\infty$.

4. On a $\ln(1+\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$ et $\tan x \operatorname{Arctan}(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ de sorte que
$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\operatorname{Arctan}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^3\sqrt{x}}.$$

5. Une fois de plus, écrivons
$$\ln\left(\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}\right) = \ln\left(1+\left(\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1\right)\right) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1=0.$$
Alors $\ln\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1$.
Mais $1+\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 2+\frac{x^2}{2}+o(x)$, donc
$$\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4}+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}.$$
Et donc $\ln\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$.

6. On a $\ln(x)=\ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$.
Et $1-x^2=(1-x)(1+x)$.
Et donc $\frac{\ln(x)}{1-x^2} \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{1}{x+1} \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{1}{2}$.

7. Puisque $\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et que $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$, $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$.
D'autre part, $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(xe^x)$ donc $xe^x-x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} xe^x$.
Et donc, par quotient $\frac{xe^x-x^2}{\operatorname{ch}(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{xe^x}{\frac{e^x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.

8. Puisque $x-x\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\tan(x-x\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} x-x\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{2}$.
D'autre part, $\sin x+\cos(x)-1 \underset{x\to 0}{=} x+o(x)-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
Et donc $\frac{\tan(x-x\cos x)}{\sin x+\cos x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

9. Commençons par une identité remarquable :
$$(\ln(1+x))^2-(\ln(1-x))^2 = (\ln(1+x)+\ln(1-x))(\ln(1+x)-\ln(1-x)).$$

Or, $\ln(1+x)+\ln(1-x) = \ln(1-x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$.
Et d'autre part, $\ln(1+x)-\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)+x+o(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.
Et donc, par produit d'équivalents,

$$(\ln(1+x))^2-(\ln(1-x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} -2x^3.$$

Solution de l'exercice 18.15

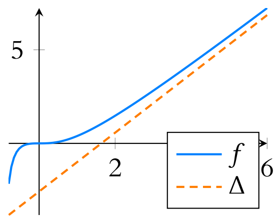
On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+x}\operatorname{Arctan} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.
De plus, on a

$$\begin{aligned}
f(x)-\frac{\pi}{2}x &= \frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x)-\frac{\pi}{2}x \\
&= \frac{x^2}{x+1}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}x \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{x^2}{x+1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{\pi}{2}x \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}\frac{-x}{x+1}-\frac{x}{1+x}+o\left(\frac{x}{x+1}\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} -\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{x}{x+1}+o\left(\frac{x}{x+1}\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{x+1}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}-1.
\end{aligned}$$

Et donc la droite Δ d'équation $y=\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{2}-1$ est asymptote à Γ_f au voisinage de $+\infty$.

Et donc ?
Si une telle asymptote existe, elle a pour coefficient directeur $\dfrac{\pi}{2}$.

Rappel
Pour $x>0$,
$$\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}.$$



Solution de l'exercice 18.16

1. Lorsque $x\to+\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, de sorte que

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc $\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$.
Après multiplication par x, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(x)}$.

2. En particulier, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$e^{f(x)}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

Et donc $\lim\limits_{x+\infty}\left(e^{f(x)}-1\right)\ln(x) = 1$.

3. Par définition, on a

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 = \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right)-1.$$

Mais $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \dfrac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.
Et donc $g(x)=\ln(x)\left(e^{f(x)}-1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.