TD 19 : Espaces vectoriels et applications linéaires

▸ Sous-espaces vectoriels

Exercice 19.1 Le corps $\mathbf{K}$, muni de son addition et sa multiplication, peut être vu comme un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Déterminer tous ses sous-espaces vectoriels. F

Exercice 19.2 Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels (munis de leurs opérations usuelles) ? F

1. l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ qui tendent vers 1 en $+\infty$.
2. l'ensemble des suites croissantes
3. l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
4. l'ensemble des matrices triangulaires à coefficients diagonaux égaux à 1.
5. l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de trace nulle.
6. l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
7. l'ensemble des polynômes à coefficients réels possédant à la fois 1 et 3 comme racines de multiplicité supérieure ou égale à 2.
8. l'ensemble des fonctions 2π-périodiques
9. l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que $f(0) + 2f(1) = 3f'(2)$
10. l'ensemble des polynômes de degré 2.

Exercice 19.3 Une union de sous-espaces peut être un sous-espace PD
Soit E un espace vectoriel et soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tels que $\forall (i,j) \in I^2$, $\exists k \in I$, $F_i \cup F_j \subset F_k$.
Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

▸ Familles de vecteurs

Exercice 19.4 Dans chacun des cas suivants, préciser si on est en présence ou non d'une famille libre de E, et donner une base de l'espace vectoriel engendré par cette famille. F

1. $E = \mathbf{R}^3$, $(0,-2,1), (2,-1,-3), (1,1,-2)$
2. $E = \mathbf{C}^2$, $(1,i), (2i,i), (1,1)$
3. $E = \mathbf{R}_n[X]$, $(X+k)^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
4. $E = \mathbf{C}_n[X]$, $(X-a)^k(X-b)^{n-k}, 0 \leqslant k \leqslant n$, où $a \neq b$ sont deux complexes.
5. $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 19.5 Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la famille $(1,1,\alpha), (1,\alpha,1), (\alpha,1,1)$ est liée. AD

Exercice 19.6 Donner une base de chacun des espaces vectoriels suivants : PD

1. $\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 | x+y+2z-t = 0 \text{ et } x+z+t = 0\}$
2. $\{P \in \mathbf{R}_4[X] \mid P(0) = P(4) = 0\}$
3. $\mathrm{Vect}((1,2,-1,0), (1,6,-5,-6), (1,0,1,3))$
4. $\{y \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R}) \mid y'' - 2y' + 2 = 0\}$
5. $\left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\}$
6. $\{(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n\}$
7. $\left\{P \in \mathbf{R}_n[X] \,\middle|\, \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}$

Exercice 19.7 Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $f_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$. AD

Exercice 19.8 Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Pour $k \in \mathbf{N}$, on note $v^{(k)}$ la suite définie par $v_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ AD
Montrer que $(v^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ est une famille libre de E. Est-ce une base de E ? Déterminer $\mathrm{Vect}(v^{(k)},\ k \in \mathbf{N})$.

▸ Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 19.9 Dans $\mathbf{R}^4$, soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x+y+z = 0 \textbf{ et } y-z+t = 0\}$ et soit $G = \mathrm{Vect}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^4$. PD

Exercice 19.10 Soit $F = \{f \in \mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telles que $f(0) = f(1)\}$. AD

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$..

2. Soit $g : x \mapsto x$. Montrer que F et $\mathrm{Vect}(g)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

Exercice 19.11 Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. **D**
Montrer que $F + (G \cap H) \subset (F+G) \cap (F+H)$, et que si $F \subset G$, alors l'inclusion précédente est une égalité.

Exercice 19.12 Soit $n \geqslant 1$ fixé. Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on pose $F_i = \{P \in \mathbf{R}_n[X] \mid \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$. **AD**

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_n[X]$. En donner une base.
2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbf{R}_n[X] = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Exercice 19.13 Soit E un espace vectoriel, et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. **AD**

1. Montrer que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $\left(\sum_{i=1}^{k-1} F_k\right) \cap F_k = \{0_E\}$.
2. Donner un exemple de trois sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 tels que $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \{0_E\}$ mais où F_1, F_2, F_3 ne sont pas en somme directe. Est-ce que si $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$, alors la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe ?

▸ Applications linéaires

Exercice 19.14 Soit p l'application $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ définie par $p(x,y) = \dfrac{1}{5}(x+2y, 2x+4y)$. **F**

1. Montrer que p est un endomorphisme.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} p$. L'application p est-elle injective ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} p$.
4. Montrer que $p \circ p = p$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker} p$ et $\mathrm{Im} p$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{C}^2$?

Exercice 19.15 Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire de E dans F ou non, et le cas échéant, déterminer une base de son noyau. En cas de présence du symbole ♣, déterminer aussi une base de son image. **F**

1. $E = \mathbf{R}^3$, $F = \mathbf{R}^2$, $f : (x,y,z) \mapsto (2x+y, x+y-3z)$ (♣)
2. $E = F = \mathbf{R}^3$, $f : (x,y,z) \mapsto (2x, 0, y+z)$ (♣)
3. $E = F = \mathbf{R}^3$, $f : (x,y,z) \mapsto (x+1, 2x-y, z+3y)$ (♣)
4. $E = F = \mathbf{R}[X]$, $f : P \mapsto P(1) + P' + X$
5. $E = F = \mathbf{R}_3[X]$, $f : P \mapsto P(-1) + 2XP'$ (♣)
6. $E = F = \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $f : M \mapsto \mathrm{tr}(M) I_n$ (♣)
7. $E = F = \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $f : M \mapsto M^2 + 2\,{}^tM$
8. $E = F = \mathbf{R}[X]$, $f : P \mapsto P''$

Exercice 19.16 Montrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K} \times \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & (P(0), P') \end{array} \right.$ est un isomorphisme. **PD**

Exercice 19.17 Soient E, F, G trois espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. **PD**

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.
2. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que p est un projecteur de E si et seulement si $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

Exercice 19.18 Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont stables par g. **PD**

Exercice 19.19 Projecteurs associés **AD**
Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p + q = \mathrm{id}_E$. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

Exercice 19.20 Soit E un espace vectoriel, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$. **AD**

Exercice 19.21 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ non nulle, et soit $u \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$. **AD**
Prouver alors que $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(u)$.

Exercice 19.22 Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, et soient $L_0, L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. **AD**

On note $\pi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i) L_i \end{array} \right.$

1. Montrer que π est un projecteur de $\mathbf{R}[X]$, dont on déterminera le noyau et l'image.
2. Montrer que $F = \left\{ Q \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - \lambda_k),\ Q \in \mathbf{R}[X] \right\}$ est un supplémentaire de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 19.23 (Oral X) **TD**
Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q$ et soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur et trouver son image et son noyau.

Correction des exercices du TD 19

Solution de l'exercice 19.1

Nous savons déjà que $\{0\}$ et $\mathbf{K}$ tout entier sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}$.
Nous allons en fait prouver qu'il s'agit des seuls. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}$, non réduit à $\{0\}$.
Alors il existe $x \neq 0$ dans F. Et par stabilité de F par multiplication par un scalaire, $1 = \dfrac{1}{x} \cdot x \in F$.
Et, toujours pas stabilité par la multiplication par un scalaire, pour tout $x \in \mathbf{K}$, $x = x \cdot 1 \in F$.
Donc $F = \mathbf{K}$.

Solution de l'exercice 19.2

Remarque
Notons que cette fois, il y avait stabilité par somme (la somme de deux suites croissantes est croissante), mais que c'est la stabilité par la multiplication externe qui n'est pas vérifiée.

1. Non : la fonction nulle n'en fait pas partie.
2. Non : si une suite (u_n) est croissante strictement, $(-u_n) = (-1) \cdot (u_n)$ n'est plus croissante.
3. Oui : la matrice nulle est symétrique. Et si A, B sont symétriques, que $\lambda \in \mathbf{R}$, alors par linéarité de la transposition :
$$^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB = \lambda A + B$$
donc $\lambda A + B$ est encore symétrique.
4. Non : la matrice nulle n'en fait pas partie.
5. Oui : la matrice nulle est de trace nulle. Si $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 0$ et si$\lambda \in \mathbf{R}$, alors par linéarité de la trace,
$$\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) = 0.$$
6. Non : la matrice nulle n'est pas inversible.
7. Oui. Le plus facile est de voir qu'il s'agit des polynômes divisibles par $(X-1)^2(X-3)^2$.
8. Oui.
9. Oui : la fonction nulle satisfait évidemment cette relation. Et si f, g sont deux telles fonctions, que $\lambda \in \mathbf{R}$, alors
$$(\lambda f+g)(0)+2(\lambda f+g)(1) = \lambda(f(0)+2f(1))+g(0)+2g(1) = 3\lambda f'(2)+3g'(2) = 3(\lambda f+g)'(2).$$
10. Non : le polynôme nul n'est pas de degré 2.

Solution de l'exercice 19.3

Notons $H = \displaystyle\bigcup_{i \in I} F_i$.
Le vecteur nul de E étant dans chacun des F_i, il est dans leur union H.
Soient $(x, y) \in H^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $(i, j) \in I^2$ tels que $x \in F_i$ et $y \in F_j$.
Et donc il existe $k \in I$ tel que $F_i \cup F_j \subset F_k$, de sorte que $x \in F_k$ et $y \in F_k$.
Puisque F_k est un sous-espace vectoriel de E, on a donc $\lambda x + y \in F_k \subset H$.
Et donc H est un sous-espace vectoriel de E.

Solution de l'exercice 19.4

Méthode
Pour prouver qu'une famille est libre, on revient toujours à la définition. C'est-à-dire qu'on considère une famille de scalaires telle que la combinaison linéaire soit nulle, et on prouve que ces scalaires sont tous nuls.
Notons au passage que si lors des calculs on trouve une solution avec des scalaires non tous nuls, alors la famille est liée.

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que
$$\lambda_1 \cdot (0, -2, 1) + \lambda_2 \cdot (2, -1, -3) + \lambda_3 \cdot (1, 1, -2) = (0, 0, 0).$$
Alors, il vient
$$\begin{cases} 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
Donc la famille $(0, -2, 1), (2, -1, -3), (1, 1, -2)$ est libre. Étant par définition une famille génératrice de l'espace qu'elle engendre, c'en est une base.

2. Soit on remarque directement qu'une combinaison linéaire des trois vecteurs, à coefficients non nuls, est nulle, comme par exemple

$$(1,i)+(1+i)\cdot(2i,i)+(1-2i)\cdot(1,1)=0_{\mathbf{C}^2}=(0,0).$$

Et alors la famille est liée.

Mais si on ne voit pas[1] une telle combinaison linéaire, alors il suffit de faire un calcul : soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbf{C}^3$. Alors

$$\lambda_1\cdot(1,i)+\lambda_2\cdot(2i,i)+\lambda_3\cdot(1,1)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+2i\lambda_2+\lambda_3=0\\ i\lambda_1+i\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}.$$

Après calculs[2], on trouve que les solutions du système sont les $\lambda_1\cdot(1,1+i,1-2i)$, $\lambda_1\in\mathbf{C}$.
Notons que ceci peut encore s'écrire $\mathrm{Vect}((1,1+i,1-2i))$...
Bref, il existe des solutions non nulles, donc la famille n'est pas libre.
Et en prenant $\lambda_1=1$, on retrouve la combinaison linéaire donnée plus haut.

Elle est toujours génératrice de l'espace qu'elle engendre.
Mais la combinaison linéaire nulle que nous venons de calculer prouve par exemple que $(1,i)$ est combinaison linéaire de $(2i,i)$ et de $(1,1)$.
Donc $F=\mathrm{Vect}((1,i),(2i,i),(1,1))=\mathrm{Vect}((2i,i),(1,1))$.
Donc $(2i,i),(1,1)$ est encore génératrice de F.
Étant formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, et donc est une base de F.

3. Il s'agit d'une famille de polynômes de degrés deux à eux distincts, elle est donc libre. Et donc forme une base de l'espace qu'elle engendre.

4. Cette fois il s'agit d'une famille de polynômes qui sont tous de même degré, donc on ne peut s'en tirer aussi facilement qu'à la question précédente.
Soient donc $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbf{C}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(X-a)^k(X-b)^{n-k}=0.$$

En évaluant cette relation en a, il vient $\lambda_0(a-b)^n=0$, et puisque $a\neq b$, $\lambda_0=0$.

Il ne reste donc que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(X-a)^k(X-b)^{n-k}=0$, ce qui après simplification[3] par $X-a$, il reste

$$\lambda_1(X-b)^{n-1}+\lambda_2(X-a)(X-b)^{n-2}+\cdots+\lambda_n(X-a)^{n-1}=0.$$

De nouveau en évaluant en a, il vient $\lambda_1=0$. De proche en proche, on prouve alors que $\lambda_0=\cdots=\lambda_n=0$.
Et donc il s'agit d'une famille libre.

5. En nommant E_1,E_2,E_3 nos trois matrices, elles sont liées par la relation[4] $E_3=(1+i)E_1+iE_2$. Et donc $\mathrm{Vect}(E_1,E_2,E_3)=\mathrm{Vect}(E_1,E_2)$, de sorte que E_1,E_2 est une base de $\mathrm{Vect}(E_1,E_2,E_3)$.

Solution de l'exercice 19.5

On cherche donc pour quelles valeurs de α le système $\mathcal{S}_\alpha$: $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3=0\\ \lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3=0\\ \alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$,
d'inconnue $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbf{R}^3$ possède une solution différente de $(0,0,0)$.
Commençons alors la résolution avec $\alpha\in\mathbf{R}$ quelconque :

$$(\mathcal{S}_\alpha)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-\alpha L_1}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3=0\\ (\alpha-1)\lambda_2+(1-\alpha)\lambda_3=0\\ (1-\alpha)\lambda_2+(1-\alpha^2)\lambda_3=0\end{cases}$$

▶ **Si** $\alpha=1$, alors les deux dernières équations deviennent $0=0$ et donc le système possède une infinité de solutions.
▶ **Supposons donc** $\alpha\neq 1$. Alors L_2 est équivalente à $\lambda_2=\lambda_3$, et L_3 devient, après division par $1-\alpha$: $\lambda_2+(1+\alpha)\lambda_3=0$. En substituant λ_3 par λ_2 on a donc $(2+\alpha)\lambda_2=0$.

[1] Soit qu'il n'en existe pas, soit qu'elle ne «saute pas aux yeux».

[2] Appliquer la méthode du pivot, on peut par exemple commencer par L_1-L_3.

Détails
Il s'agit là d'une propriété du cours : un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne sert à rien dans un Vect.

Danger !
Prouver la liberté à l'aide d'un argument de non colinéarité (ou ce qui revient au même, de non proportionnalité) n'est valable que pour une famille de **deux** vecteurs. Il n'y a pas d'analogue pour les familles plus grandes.

[3] $\mathbf{C}[X]$ est un anneau intègre, donc tout élément est régulier (pour le produit).

[4] Résoudre un système pour la trouver.

Si $\alpha \neq -2$, alors cette équation n'a que $\lambda_2 = 0$ comme solution. Et donc $\lambda_3 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$. En revanche, pour $\alpha = -2$, alors $(1, 1, 1)$ est solution du système, donc la famille n'est pas libre.

Au final, la famille $(1, 1, \alpha), (1, \alpha, 1), (\alpha, 1, 1)$ est liée si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$. Il n'est d'ailleurs pas difficile de vérifier que dans ces deux cas, la famille est liée :

$$(1, 1, 1) + (-1) \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (1, 1, 1) = 0_{\mathbf{R}^3} \text{ et } (1, 1, -2) + (1, -2, 1) + (-2, 1, 1) = 0_{\mathbf{R}^3}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.6

Notons à chaque fois F l'espace en question.

1. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ x+z+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2t - z \\ x = -z-t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (-z-t, 2t-z, z, t) = z(-1,-1,1,0) + t(-1,2,0,1) \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,z) \in \operatorname{Vect}((-1,-1,1,0),(-1,2,0,1)).\end{aligned}$$

Donc $(-1, -1, 1, 0), (-1, 2, 0, 1)$ est une famille génératrice de F.
Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires C'est donc une base de F.

> **⚠ Attention !**
> Ce critère de liberté est très pratique, mais il ne vaut que pour les familles de deux vecteurs, il n'y a pas d'analogue facile pour les familles de trois vecteurs ou plus.

2. Soit $P \in \mathbf{R}_4[X]$. Alors $P \in F$ si et seulement si il est divisible par $X(X - 4)$, soit encore si et seulement si il est de la forme $P = X(X - 4)(aX^2 + bX + c)$, avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.
Autrement dit,

$$\begin{aligned} F &= \left\{X(X-4)(aX^2+bX+c),\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\right\} \\ &= \{aX^3(X-4) + bX^2(X-4) + cX(X-4),\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4)\right).\end{aligned}$$

Donc $(X(X - 4), X^2(X - 4), X^3(X - 4))$ est une famille génératrice de F. Elle est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc c'est une base de F.

> **Méthode**
> Rappelons que lorsqu'une famille est liée, enlever un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne change pas l'espace engendré.
> Et donc en particulier, enlever un tel vecteur à une famille génératrice fournit encore une famille génératrice.

3. Nous avons directement une famille génératrice de F.
Elle n'est pas libre car le second vecteur est combinaison linéaire des deux autres : $(1, 6, -5, -6) = 3(1, 2, -1, 0) - 2(1, 0, 1, 3)$.
Donc $\operatorname{Vect}((1, 2, -1, 0), (1, 6, -5, -6), (1, 0, 1, 3)) = \operatorname{Vect}((1, 2, -1, 0), (1, 0, 1, 3))$.
Cette famille de deux vecteurs est libre, car ils sont non colinéaires, et donc c'est une base de F.
4. Nous savons résoudre cette équation différentielle, et $f \in F$ si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que

$$f : x \mapsto \lambda e^x \cos x + \mu e^x \sin x.$$

Donc en notant $f_1 : x \mapsto e^x \cos x$ et $f_2 : x \mapsto e^x \sin x$, on a $F = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$.
Il reste à vérifier que (f_1, f_2) est libre : soient λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$.
Alors en évaluant en 0, on a $\lambda_1 = 0$ et donc $\lambda_2 f_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$.
Donc (f_1, f_2) est libre : c'est une base de F.
5.
6. Nous savons que toute suite de F est de la forme $u_n = 3^n(\lambda n + \mu) = \lambda 3^n n + \mu 3^n$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$.
Donc $F = \operatorname{Vect}(v, w)$ où $v_n = 3^n n$ et $w_n = 3^n$.
Il est alors aisé de vérifie que (v, w) est une famille libre de F, et donc en est une base.
7. Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbf{R}_n[X]$.

Alors $P \in F \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0$.

Soit encore si et seulement si $a_0 = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i+1}$.

Donc $P \in F \Leftrightarrow P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \left(X^i - \frac{1}{i+1}\right)$.

Donc $F = \mathrm{Vect}\left(X - \dfrac{1}{2}, X^2 - \dfrac{1}{3}, \dots, X^n - \dfrac{1}{n+1}\right)$.
Cette famille est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc c'est une base de F.

Solution de l'exercice 19.7

Puisqu'il s'agit d'une famille infinie, il faut prouver que toute sous-famille finie est libre.
Prouvons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre, ce qui suffira car toute sous-famille finie de la famille de départ est incluse dans une telle famille.

Rappel — Une sous-famille d'une famille libre est libre.

Soient donc $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$.
Alors, en divisant par f_n, on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lambda_0 e^{-nx} + \lambda_1 e^{-(n-1)x} + \cdots + \lambda_{n-1} e^{-x} + \lambda_n = 0.$$

Donc par passage à la limite, $\lambda_n = 0$.
Donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f_i = 0$. Divisons alors de nouveau par f_{n-1}, puis effectuons un passage à la limite. On obtient alors $\lambda_{n-1} = 0$.
De proche en proche[5]
Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, de sorte que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre, et donc $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est libre.

[5] Encore une fois : une récurrence serait tout indiquée, en prouvant $\mathscr{P}(n)$: «la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre ».

Solution de l'exercice 19.8

Notons que nous sommes en présence d'une famille infinie de suites. Elle est donc libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.
Or, une sous-famille finie de $(v^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ est incluse dans $(v^{(k)})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ pour un certain $n \in \mathbf{N}$.
Il suffit donc de prouver que toutes ces familles sont libres.

Soit donc $n \in \mathbf{N}$, et soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k v^{(k)} = 0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}}$.

Intuition — Notons que cette combinaison linéaire n'est autre que la suite

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots).$$

En particulier, pour $i \in [\![0, n]\!]$, on a

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k v^{(k)}\right)_i = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k v_i^{(k)} = \lambda_i.$$

Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, et donc la famille $(v^{(0)}, \dots, v^{(n)})$ est libre.

Les $v^{(k)}$ sont toutes presque nulles[6]. Donc toute combinaison linéaire des $v^{(k)}$, qui est combinaison linéaire (d'un nombre fini) des $v^{(k)}$ est presque nulle.
En particulier, la suite constante égale à 1 n'est pas une combinaison linéaire des $v^{(k)}$, qui ne forment donc pas une base de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
Mieux : nous venons de prouver que $\mathrm{Vect}(v^{(k)}) \subset \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, l'ensemble des suites presque nulles.
Inversement, si (u_n) est une suite presque nulle, alors elle est nulle à partir d'un certain rang. Notons par exemple $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $u_n = 0$.
Alors $u = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k v^{(k)} \in \mathrm{Vect}(v^{(k)}, , k \in \mathbf{N})$.
Et donc l'espace engendré par les $v^{(k)}$ est l'ensemble $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ des suites presque nulles[7].

[6] Au sens du cours : tous les termes, sauf un nombre fini, sont nuls.

[7] Ou ce qui revient au même, des suites nulles à partir d'un certain rang.

Solution de l'exercice 19.9

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}
(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z + t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ t = z - y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (-y - z, y, z, z - y) = y(-1, 1, 0, -1) + z(-1, 0, 1, 1) \\
&\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \mathrm{Vect}\left((-1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, 1)\right).
\end{aligned}$$

Méthode — Pour déterminer l'ensemble des solutions d'un tel système (2 équations, 4 inconnues), il faut choisir deux inconnues secondaires en fonction desquelles on exprime les deux autres. Il y a plusieurs choix possibles, et aucun n'est meilleur que les autres.

Donc $F = \text{Vect}\left((-1,1,0,-1),(-1,0,1,1)\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$, et nous en avons une famille génératrice.
Remarque *: il aurait bien entendu été possible de prouver que F est un sous-espace vectoriel à l'aide de la caractérisation des sous-espaces vectoriels (stabilité par combinaisons linéaires).*

Et puisque G est déjà sous forme d'un Vect, c'est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

Pour prouver qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$, nous allons prouver que tout vecteur de $\mathbf{R}^4$ s'écrit de manière unique comme un élément de F plus un élément de G.
Soit donc $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$, et soient $u \in F$ et $v \in G$. Alors il existe des réels a,b,λ,μ tels que

$$u = a(-1,1,0,-1) + b(-1,0,1,1) \text{ et } v = \lambda(1,0,0,1) + \mu(0,1,1,0).$$

Et alors $(x,y,z,t) = u + v = (-a-b+\lambda, a+\mu, b+\mu, -a+b+\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b+\lambda = x \\ a+\mu = y \\ b+\mu = z \\ -a+b+\lambda = t \end{cases}$.

Après résolution de ce système d'inconnues (a,b,λ,μ), on obtient comme unique solution $a = y - z + \frac{t-x}{2}, b = \frac{t-x}{2}, \lambda = t + y - z, \mu = z + \frac{x-t}{2}$.
Donc tout vecteur de $\mathbf{R}^4$ s'écrit d'une unique manière comme un élément de F plus un élément de G.
Et donc $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.10

1. Prouvons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
Par définition, $F \subset \mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, et la fonction nulle est dans F, puisqu'elle vaut 0 en $x = 0$ et en $x = 1$.
Soient f et g deux éléments de F, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\lambda f + g$ est continue et
$$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda f(1) + g(1) = (\lambda f + g)(1).$$
Ainsi, $\lambda f + g \in F$, et donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
2. Nous allons prouver que toute fonction continue s'écrit de manière unique comme un élément de F plus un élément de $\text{Vect}(g)$.

Procédons par analyse-synthèse : soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, et supposons que $f = f_1 + f_2$, avec $f_1 \in F$ et $f_2 \in \text{Vect}(g)$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f_1 = \lambda g$.
On a alors $f(0) = f_1(0) + \lambda \cdot 0 = f_1(0)$ et $f(1) = f_1(1) + \lambda = f_1(0) + \lambda$.
Et donc $f(1) = f(0) + \lambda \Leftrightarrow \lambda = f(1) - f(0)$.
On en déduit que $f_1 = f - f_2 = f - (f(0) - f(1)) \cdot g$.

Inversement, posons $f_2 = (f(1) - f(0)) \cdot g$ et $f_1 = f - f_2$.
Alors il est évident que $f_2 \in \text{Vect}(g)$, et $f_1 \in F$ car f_1 est continue car différence de fonctions continues, et

$$f_1(0) = f(0) - (f(1) - f(0))\underbrace{g(0)}_{=0} = f(0) \text{ et } f_1(1) = f(1) - (f(1) - f(0))\underbrace{g(1)}_{=1} = f(0) = f_1(0).$$

Enfin, on a bien
$$f_1 + f_2 = f - f_2 + f_2 = f.$$
Ainsi, f s'écrit de manière unique comme une fonction de F plus une fonction de $\text{Vect}(g)$, et donc $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}) = F \oplus \text{Vect}(g)$.

Détails
On a utilisé ici le fait que $f_1 \in F$, et donc $f_1(0) = f_1(1)$.

Explications
Nous venons de prouver que si f était somme d'un élément f_1 de F et d'un élément f_2 de $\text{Vect}(g)$, alors il n'y avait qu'une seule décomposition possible.
Autrement dit, que f s'écrit **d'au plus** une manière comme un élément de F et un élément de $\text{Vect}(g)$. Il reste à vérifier l'existence d'une telle décomposition.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.11

Soit $x \in F + (G \cap H)$. Alors il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G \cap H$ tel que $x = x_1 + x_2$.
Mais alors $x \in F + G$ car $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, et de même, $x \in F + H$.
Donc on a bien $x \in (F + G) \cap (F + H)$.

Si $F \subset G$, on a $F + G = G$, puisqu'il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G.

Soit $x \in (F+G) \cap (F+H) = G \cap (F+H)$.
Alors $x \in G$, et $x = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in H$. Mais alors $v = x - u \in G$. Donc $v \in G \cap H$.
Et donc $x = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G \cap H$, donc $x \in F + (G \cap H)$.
On en déduit donc que $(F+G) \cap (F+H) \subset F + (G \cap H)$, d'où l'égalité.

Solution de l'exercice 19.12

1. Un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ est dans F_j si et seulement si tous les $i \in [\![0, n]\!] \setminus \{j\}$ en sont racines, c'est-à-dire si et seulement si il est divisible par $P_i = \displaystyle\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} (X - i)$.
Mais puisque P_i est de degré n, le quotient de P par P_i est nécessairement de degré 1, c'est-à-dire une constante.
Et donc $F_i = \mathrm{Vect}(P_i)$: ce qui prouve à la fois qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel, et qui en donne une base.
2. Soient $Q_0, \dots, Q_n \in F_0 \times \dots \times F_n$ tels que $0 = Q_0 + \dots + Q_n$.
Alors, pour $i \in [\![0, n]\!]$, en évaluant cette relation en $X = i$, il vient
$$Q_0(i) + Q_1(i) + \dots + Q_n(i) = 0 \Leftrightarrow Q_i(i) = 0.$$
Mais alors Q_i, qui est de degré au plus n possède $0, 1, \dots, n$ comme racines, et donc possède $n+1$ racines distinctes. C'est donc le polynôme nul : $Q_i = 0$.
Et donc la seule façon d'écrire le polynôme nul comme somme d'éléments des F_i est $0 = 0 + \dots + 0$.
Donc la somme $F_0 + \dots + F_n$ est directe.
3. Puisque nous savons déjà que la somme est directe, il ne reste qu'à prouver qu'elle est égale à $\mathbf{R}_n[X]$ tout entier, c'est-à-dire que tout polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ est somme d'éléments des F_i.
Soit donc $P \in \mathbf{R}_n[X]$, et supposons qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$.
Alors en évaluant en $j \in [\![0, n]\!]$, il vient $P(j) = \lambda_j P_j(j)$, soit encore $\lambda_j = \dfrac{P(j)}{P_j(j)}$.
Inversement, $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{P(i)}{P_i(i)} P_i$ est un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que $\forall j \in [\![0, n]\!], Q(j) = P(j)$.
Donc $P - Q$ possède au moins $n+1$ racines, il est donc nul : donc $P = Q$ est bien dans $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} F_i$.
Et donc $\mathbf{R}_n[X] = F_0 + \dots + F_n = F_0 \oplus \dots \oplus F_n$.

> **Question subsidiaire**
> Avez-vous remarqué que les polynômes qu'on a notés P_i sont quasiment des polynômes de Lagrange ?

Solution de l'exercice 19.13

1. Supposons que les F_i sont en somme directe. Soit alors $k \in [\![2, n]\!]$, et soit $x \in \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap F_k$.
Alors il existe $e_1, \dots, e_{k-1}$, avec $e_i \in F_i$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} e_i$.
Mais alors $0_E = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{e_i}_{\in F_i} + \underbrace{(-x)}_{\in F_k}$, et donc $e_1 = \dots = e_{k-1} = -x = 0_E$, et en particulier $x = 0_E$.
Donc $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap F_k = \{0_E\}$.
Inversement, supposons la condition de l'énoncé vérifiée, et soient $(e_1, \dots, e_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i = 0_E$.
Alors $\underbrace{e_n}_{\in F_n} = \underbrace{-\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} e_i}_{\in \sum_{i=1}^{n-1} F_i} \in \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap F_n$.
Donc $e_n = 0_E$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} e_i = 0_E$.

Puis $e_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-2} e_i \in \left(\sum_{i=1}^{n-2} F_i\right) \cap F_{n-1}$.

Donc $e_{n-1} = 0_E$ et $\sum_{i=1}^{n-2} e_i = 0_E$.

De proche en proche on prouve que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = 0_E$, et donc que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.

2. Dans $\mathbf{R}^2$, prenons $F_1 = \text{Vect}(1,0)$, $F_2 = \text{Vect}(0,1)$ et $F_3 = \text{Vect}(1,1)$.
Alors, il n'est pas dur de constater que $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour $i \neq j$.
Pourtant, F_1, F_2 et F_3 ne sont pas en somme directe car $(0,0) = (1,0) + (0,1) - (1,1)$.
A fortiori, l'intersection des trois sous-espaces est réduite au vecteur nul, et la somme n'est toujours pas directe...

> **Détails**
> Plus généralement, si u et v ne sont pas colinéaires, alors
> $$\text{Vect}(u) \cap \text{Vect}(v) = \{0_E\}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.14

1. p est clairement définie de $\mathbf{C}^2$ dans lui-même, donc il reste à prouver que p est linéaire.
Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbf{C}^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors

$$p(\lambda(x,y)+(x',y')) = p(\lambda x+x', \lambda y+y') = \frac{1}{5}(\lambda x+x'+2(\lambda y+y'), 2(\lambda x+x')+4(\lambda y+y')) =$$
$$\lambda\frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y) + \frac{1}{5}(x'+2y', 2x'+4y') = \lambda p(x,y) + p(x',y').$$

Ainsi p est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbf{C}^2$.

2. Par définition,

$$\text{Ker}p = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : p(x,y) = (0,0)\} = \left\{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : \begin{cases} x+2y = 0 \\ 2x+4y = 0 \end{cases}\right\} = \{(-2y, y), y \in \mathbf{C}\} = \text{Vect}(-2,1).$$

On en déduit qu'une base de $\text{Ker}p$ est donnée par $(-2,1)$. En particulier, $\text{Ker}p$ est de dimension 1, et donc p n'est pas injective.

3. D'après le théorème du rang, $\text{Im}p$ est de dimension 1, donc est engendré par n'importe lequel de ses vecteur non nuls.
Par exemple, $p(5,0) = (1,2) \in \text{Im}p$, donc une base de $\text{Im}p$ est formée par $(1,2)$.

4. Soit $(x,y) \in \mathbf{C}^2$. On a

$$\begin{aligned} p(p(x,y)) &= p\left(\frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y)\right) \\ &= \frac{1}{5}p(x+2y, 2x+4y) = \frac{1}{25}(x+2y+2(2x+4y), 2(x+2y)+4(2x+4y)) \\ &= \frac{1}{25}(5x+10y, 10x+20y) = \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y) = p(x,y). \end{aligned}$$

Nous avons donc bien $p \circ p = p$.
p est donc un projecteur, de sorte que $\text{Ker}p$ et $\text{Im}p$ sont supplémentaires dans $\mathbf{C}^2$.

> **Alternative**
> Nous pourrions également retrouver ce résultat en prouvant par exemple que la juxtaposition d'une base de $\text{Ker}p$ et d'une base de $\text{Im}p$ est une base de $\mathbf{C}^2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.16

Commençons par la linéarité : soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$\varphi(\lambda P+Q) = ((\lambda P+Q)(0), (\lambda P+Q)') = (\lambda P(0)+Q(0), \lambda P'+Q') = \lambda(P(0), P')+(Q(0), Q') = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q).$$

Donc φ est bien linéaire.
Soit $P \in \text{Ker}\,\varphi$. Alors $\varphi(P) = 0$, c'est-à-dire $P(0) = 0$ et $P' = 0$.
Puisque $P' = 0$, P est constant, et puisque $P(0) = 0$, P est le polynôme nul.
Donc $\text{Ker}\,\varphi = \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$, de sorte que φ est injective.

Soit à présent $(\lambda, Q) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}[X]$, avec $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$, et soit $P = \lambda + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1}$.

Alors $P(0) = \lambda$ et $P' = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = Q$, de sorte que $\varphi(P) = (\lambda, Q)$.

Donc φ est surjective, et donc est un isomorphisme.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.17

1. Supposons que $g \circ f = 0$, et soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Et donc $g(y) = g(f(x)) = 0_G$. Et alors, $y \in \operatorname{Ker} g$, de sorte que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Inversement, supposons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} p$.

2. Si p est un projecteur, alors $p \circ p = p \Leftrightarrow (p - \mathrm{id}) \circ p = 0$.
Donc $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.
L'inclusion réciproque est évidente car si $x \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, alors $p(x) - x = 0_E \Leftrightarrow x = p(x) \in \operatorname{Im} p$.

Inversement, si $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, alors par la question 1,

$$(p - \mathrm{id}_E) \circ p = 0 \Leftrightarrow p \circ p - p = 0 \Leftrightarrow p \circ p = p$$

donc p est un projecteur.

Méthode
Un tel exercice n'a rien de difficile, mais il faut être très méthodique, et maîtriser parfaitement ses définitions.
Par exemple, comment prouver que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g
Cela signifie que si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $g(x) \in \operatorname{Ker} f$.
Mais que veut dire ce dernier point ? Que $g(f(x)) = 0_E$. Il est donc naturel de calculer $g(f(x))$.

Solution de l'exercice 19.18

Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et alors

$$g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f.$$

Donc $\operatorname{Im} f$ est stable par g.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0_E$, et donc $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$, de sorte que $g(x) \in \operatorname{Ker} f$.
Et donc $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

Solution de l'exercice 19.19

Nous savons que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
Autrement dit, si $x \in E$, alors de manière unique, $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} p$ et $p(x) = x_1$.
Alors $q(x) = \mathrm{id}(x) - p(x) = x - x_1 = x_2$.
Ainsi, q est la projection sur $\operatorname{Ker} p$ parallèlement à $\operatorname{Im} p$, et donc $\operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p$.
On en déduit donc que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Plus généralement
De la même manière, on prouve que si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $\mathrm{id} - p$ est la projection sur G parallèlement à F.

Solution de l'exercice 19.20

Supposons que $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$, et soit alors $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.
On a donc $f(x) = 0_E$, et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$.
Mais alors $f^2(y) = f(x) = 0_E$, de sorte que $x \in \operatorname{Ker} f^2$.
Par conséquent, $y \in \operatorname{Ker} f$, et donc $x = f(y) = 0_E$.
On en déduit que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$, et l'inclusion réciproque étant toujours vraie[8], on a bien l'égalité $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

[8] Tout sous-espace vectoriel de E contient 0_E.

Inversement, supposons que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Pour commencer, si $f(x) = 0_E$, alors $f^2(x) = 0_E$, de sorte que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$.
Inversement, soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$, et soit $y = f(x)$.
Alors $y \in \operatorname{Im}(f)$ par définition de l'image, et puisque $f(y) = f^2(x) = 0_E$, de sorte que $y \in \operatorname{Ker}(f)$.
Donc $y \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Et ainsi, $y = f(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker}(f)$.
Ceci prouve que $\operatorname{Ker}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f)$, d'où l'égalité.

Remarque
Cette inclusion est vraie pour tout endomorphisme, sans hypothèse supplémentaire.

Solution de l'exercice 19.21

Procédons par analyse-synthèse pour prouver que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\operatorname{Ker} \varphi$ et d'un élément de $\operatorname{Vect}(u)$.
Soit $x \in E$, et supposons que $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker} \varphi$ et $z \in \operatorname{Vect}(u)$.
Alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $z = \lambda \cdot u$.
En appliquant φ, il vient $\varphi(x) = \underbrace{\varphi(y)}_{=0} + \lambda \underbrace{\varphi(u)}_{\neq 0}$, égalité qui a lieu dans $\mathbf{K}$.

Et donc $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$.

Et alors nécessairement, $y = x - z = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u$.

Donc si une telle décomposition existe, elle est unique.

Inversement, posons $y = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u$ et $z = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} \cdot u$.
Alors $z \in \mathrm{Vect}(u)$ puisqu'il s'agit d'un multiple de u.

Et $\varphi(y) = \varphi\left(x - \underbrace{\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}}_{\in \mathbf{K}} u\right) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}\varphi(u) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$.

Donc y est bien dans $\mathrm{Ker}\,\varphi$.
Et bien entendu, on a $x = y + z$, de sorte que x s'écrit d'au moins une manière comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et d'un élément de $\mathrm{Vect}(u)$.
Et donc x s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et d'un élément de $\mathrm{Vect}(u)$: $E = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathrm{Vect}(u)$.

Solution de l'exercice 19.22

1. Commençons par prouver que π est linéaire.
Soient donc $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\pi(\alpha P + Q) &= \sum_{i=0}^{n} (\alpha P + Q)(\lambda_i)L_i = \sum_{i=0}^{n} (\alpha P(\lambda_i) + Q(\lambda_i))L_i \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i)L_i + \sum_{i=0}^{n} Q(\lambda_i)L_i = \alpha\pi(P) + \pi(Q).\end{aligned}$$

Linéarité de l'évaluation.

Puisque les L_i sont tous de degré n, il est évident que π est à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$.
Mais par ailleurs, pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on a, d'après un résultat du cours sur les polynômes de Lagrange,

$$\pi(P) = \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i)L_i = P.$$

Donc pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\pi(P) \in \mathbf{R}_n[X]$ et donc $\pi(\pi(P)) = \pi(P)$, de sorte que $\pi^2 = \pi$.
Donc π est un projecteur.

Nous avons déjà prouvé que son image est incluse dans $\mathbf{R}_n[X]$, et puisque l'image d'un projecteur est exactement l'ensemble de ses points fixes, nous venons donc de prouver que $\mathbf{R}_n[X] \subset \mathrm{Im}\,\pi$.
Donc $\mathrm{Im}\,\pi = \mathbf{R}_n[X]$.

Enfin, $(L_0, \dots, L_n)$ étant une base de $\mathbf{R}_n[X]$, il s'agit en particulier d'une famille libre, et donc pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on a

$$P \in \mathrm{Ker}\,\pi \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i)L_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(\lambda_i) = 0.$$

Donc $\mathrm{Ker}\,\pi$ est l'ensemble des polynômes qui possèdent tous les λ_i comme racines.

2. Puisque π est un projecteur, nous savons que $\mathrm{Im}\,\pi$ et $\mathrm{Ker}\,\pi$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}[X]$.
Nous avons déjà prouvé que $\mathrm{Im}\,\pi = \mathbf{R}_n[X]$, et un polynôme possède les λ_i comme racines si et seulement si il est divisible par $\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - \lambda_i)$, donc $\mathrm{Ker}\,\pi = \left\{Q\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - \lambda_i),\ Q \in \mathbf{R}[X]\right\}$.
Ce qui prouve bien le résultat demandé.

Solution de l'exercice 19.23

Commençons par noter que puisque $\mathrm{Im}\,p \subset \mathrm{Ker}\,q$, $q \circ p = 0$.
Le fait que r soit linéaire est évident, prouvons qu'il s'agit bien d'un projecteur, c'est-à-dire que $r \circ r = r$.
On a

Détails
C'est la question 1 de l'exercice 17.

$$\begin{aligned}r^2 &= p^2 + q^2 - (p\circ q)^2 + p\circ q + q\circ p - p^2\circ q - q\circ p\circ q - p\circ q\circ p - p\circ q^2 \\ &= p + q - \underbrace{p\circ q\circ p\circ q}_{=0} + p\circ q + \underbrace{q\circ p}_{=0} - p\circ q - \underbrace{q\circ p\circ q}_{=0} - \underbrace{p\circ q\circ p}_{=0} - p\circ q\end{aligned}$$

$$= p + q - p \circ q = r.$$

Donc r est un projecteur de E.
On a $p \circ r = p^2 + p \circ q - p^2 \circ q = p + p \circ q - p \circ q = p$.
Donc $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p$, puisque si $r(x) = 0_E$, $p(x) = p(r(x)) = p(0_E) = 0_E$.
De même, $q \circ r = q$, et donc $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} q$.
Et donc $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
Inversement, si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$, alors $p(x) = q(x) = 0_E$, donc $q(x) = 0_E$.
Donc $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$, et donc il y a égalité.

Il est clair que $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ puisque $q(x) = \underbrace{p(x) - p(q(x))}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{q(x)}_{\in \operatorname{Im} q}$.
Inversement, si $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, alors $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Im} q$.
Mais alors $q(x) = q(x_1) + q(x_2) = x_2$, puisque $q \circ p = 0$.
Donc

$$\begin{aligned} r(x) &= p(x) + q(x) - (p \circ q)(x) = p(x_1) + p(x_2) + q(x_1) + q(x_2) - p(x_2) \\ &= x_1 + p(x_2) + x_2 - p(x_2) = x. \end{aligned}$$

Et donc $x \in \operatorname{Im} r$.
Donc $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
Notons qu'il est possible d'aller un peu plus loin et de prouver que cette somme est directe.
En effet, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors, puisque $x \in \operatorname{Im} q$, $q(x) = x$. Mais puisque $x \in \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$, $q(x) = 0_E$.
Donc $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0_E\}$, et donc $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Rappel
L'image d'un projecteur est l'ensemble de ses points fixes.