# TD 20 : Dérivabilité

## ▶ Généralités, dérivées successives

**Exercice 20.1** Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions $f : x \mapsto x|x|$ et $g : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ (x+1)^3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ F

**Exercice 20.2** Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f$ pour que la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$ soit dérivable sur $[0,1]$. PD

**Exercice 20.3** Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire, resp. périodique) est impaire (resp. paire, resp. périodique). F

**Exercice 20.4** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $a$. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$. PD

**Exercice 20.5** Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = x^{n-1}\ln(x)$. Calculer $f_n^{(n)}$. PD

## ▶ Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

**Exercice 20.6** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et périodique. Prouver que $f$ est lipschitzienne. PD

**Exercice 20.7** À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$. PD

**Exercice 20.8** Soit $n \geqslant 1$, soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f$ une fonction $n$ fois dérivable sur $I$, qui s'annule en $n+1$ points distincts de $I$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $I$. PD

**Exercice 20.9** Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction $n$ fois dérivable telle que $f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$. PD

**Exercice 20.10** Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que $P'$ est scindé. AD

**Exercice 20.11 Théorème de Darboux** AD

Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, et soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbf{R})$. On souhaite prouver que $f'(I)$ est un intervalle.

1. Prouver le résultat si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. On suppose à présent que $a < b$ sont deux points de $I$, et que $y$ est strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On note $g$ la fonction définie sur $I$ par $g(x) = f(x) - xy$.
   (a) Montrer que $g$ n'est pas monotone sur $I$.
   (b) En déduire que $g$ n'est pas injective sur $I$.
   (c) Conclure.

**Exercice 20.12 La règle de l'Hôpital (Pour faire plaisir à Philippe)** AD

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[0,a]$, dérivables sur $]0,a[$, avec $f(0) = g(0) = 0$. On suppose que $g$ et $g'$ ne s'annulent pas sur $]0,a[$

1. Pour tout $x \in ]0,a]$, montrer qu'il existe $c \in ]0,x]$ tel que $g'(c)f(x) = f'(c)g(x)$.
2. Montrer que si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi, et que ces limites sont égales.
3. **Applications** : calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1-\cos x}$, et prouver que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

**Exercice 20.13** Montrer que pour $P \in \mathbf{R}[X]$ non nul, l'équation $P(x) = e^x$ possède au plus $\deg P + 1$ solutions.

**Exercice 20.14** Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples. Montrer que $P$ ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls. AD

**Exercice 20.15 Une généralisation du théorème de Rolle** AD

Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}_+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. On suppose que $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.

**Application** ($\star$) : soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que pour $\lambda \in \mathbf{R}$, $P' + \lambda P$ est scindé.

## Exercice 20.16 F

1. Prouver que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leqslant |x - y|$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|1 - \cos(x)| \leqslant |x|$.

## Exercice 20.17 Sommes de Riemann (Banque CCP 47) D

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $R_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$.
2. Déterminer la limite de la suite $(x_n)$ définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3n^2+k^2}$.

## Exercice 20.18 D

Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}$. Soit $a \in I$.

1. Soit $b \in I \setminus \{a\}$.
   (a) Déterminer un réel $A$ tel que la fonction $\varphi : t \mapsto f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(b-t)^k - \frac{A}{(n+1)!}(b-t)^{n+1}$ s'annule en $a$.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in I$ tel que $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$.
   Ce résultat s'appelle *l'égalité de Taylor-Lagrange*.
2. On suppose que $f^{(n+1)}$ est bornée sur $I$ (ce qui est par exemple le cas si $I$ est un segment). Montrer que pour tout $(a, b) \in I^2$,
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_I |f^{(n+1)}|$$
   Ce résultat s'appelle **inégalité de Taylor-Lagrange** et nous la reprouverons dans un chapitre ultérieur.
3. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, et que $\ln(2) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   *Pour la seconde égalité, on pourra considérer* $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

## Exercice 20.19 (Oral ENS) D

*Pour cet exercice, on admettra l'inégalité de Taylor-Lagrange prouvée dans l'exercice précédent.*
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré impair, et soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|$. Que dire de $f$ ?

## Exercice 20.20 (Oral ENS Ulm) TD

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\omega_1, \dots, \omega_n$ des réels non nuls et $a_1, \dots, a_n$ des réels. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \cos(\omega_i x)$ s'annule une infinité de fois.

# ▸ Prolongements $\mathscr{C}^1/\mathscr{C}^k$

## Exercice 20.21 PD

Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto x^3 \ln x$ se prolonge en une fonction $\widetilde{f}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$. Quelle est la valeur maximale de $k$ telle que $\widetilde{f}$ soit de classe $\mathscr{C}^k$ ?

## Exercice 20.22 AD

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que $f$ se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbf{R}_+$.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que
$$\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$
3. En déduire que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$.

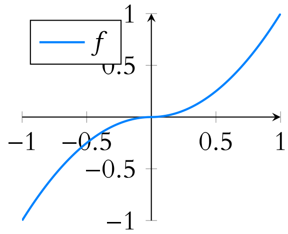
# CORRECTION DES EXERCICES DU TD 20

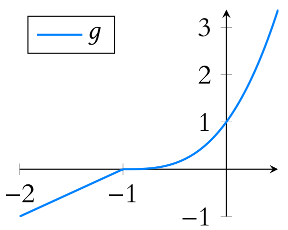
## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.1

Notons $f : x \mapsto x|x|$.
Puisque la valeur absolue est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, par produit de fonctions dérivables, $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
Par contre, le fait que la valeur absolue ne soit pas dérivable en 0 ne prouve en rien[1] que $f$ ne l'est pas.
Soit donc $x \neq 0$. Alors $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Donc $f$ est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$, et donc elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier.

[1] Ai-je mentionné en cours un théorème qui dirait quelque chose comme «le produit de fonctions non dérivables n'est pas dérivable» ? Pas que je sache...

De même, il est clair que $g$ est dérivable sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$, car les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto (x+1)^3$ le sont.
Pour $x \neq -1$, on a $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ (x+1)^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.
La limite à gauche de ce taux d'accroissement vaut alors 1, mais la limite à droite vaut 0.
Donc $g$ n'est pas dérivable en $-1$.



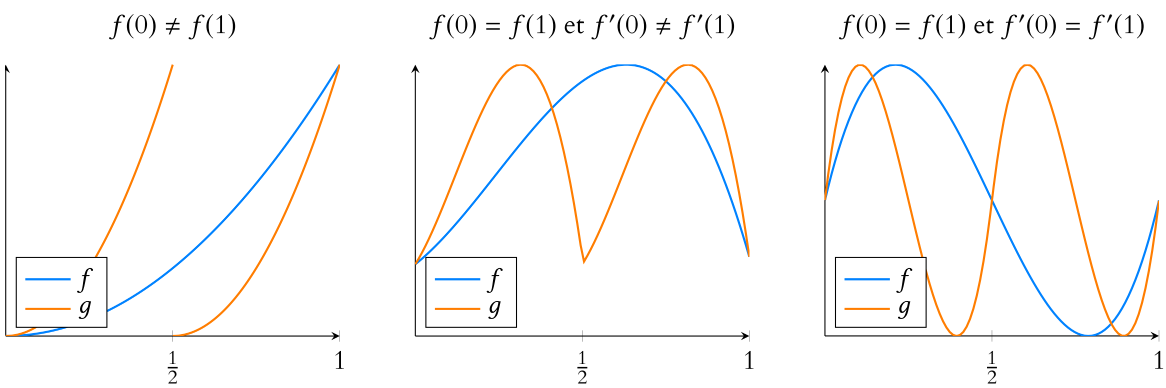

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.2

Notons déjà que $g$ est dérivable sur $[0,\frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2},1]$ par composition de fonctions qui le sont.
D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} g(x) = f(1)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x) = f(0)$, donc $g$ est continue en $\frac{1}{2}$ si et seulement si $f(0) = f(1)$.
Et dans le cas où $g$ est continue en $\frac{1}{2}$, $g$ est dérivable à droite et à gauche en $\frac{1}{2}$ par composition de fonctions dérivables, avec

$$g_g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2f'(1) \text{ et } g_f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2f'(0).$$

Donc $g$ est dérivable en $\frac{1}{2}$ si et seulement si $\begin{cases} f(0 = f(1) \\ f'(0) = f'(1) \end{cases}$.

**Rappel**
Une fonction dérivable est nécessairement continue, donc la continuité de $g$ est une condition nécessaire (mais pas suffisante à sa dérivabilité).




## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.3

Soit $f$ une fonction paire et dérivable sur un intervalle[2] $I$.
Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$.

[2] Nécessairement symétrique.

En dérivant cette relation, il vient : pour tout $x \in I$, $f'(x) = -f'(-x)$, et donc $f'$ est impaire.
De même, si $f$ est impaire, alors $f(x) = -f(-x)$ ce qui après dérivation nous donne $f'(x) = f'(-x)$, donc $f'$ est paire.
Enfin, si $f$ est $T$-périodique, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(x+T)$, de sorte que $f'(x) = f'(x+T)$, et donc $f'$ est $T$-périodique.

## Solution de l'exercice 20.4

Pour $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h} = \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h} = 2\frac{f(a+2h)-f(a)}{h} + \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
$$\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 2f'(a) + f'(a) = 3f'(a).$$

Pour la seconde limite, on a

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = \frac{(x-a)f(a)+af(a)-af(x)}{x-a} = f(a) - a\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a) - af'(a).$$

## Solution de l'exercice 20.5

La formule de Leibniz est toute indiquée, puisque les fonctions $g_n : x \mapsto x^{n-1}$ et ln sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ (et donc $\mathscr{C}^n$) sur $\mathbf{R}_+^*$.
On a alors, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$g_n^{(k)} : x \mapsto \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k} \text{ et } g_n^{(n)}(x) = 0.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\ln^{(3)}(x) = \frac{2}{k^3}$, et une récurrence rapide prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\ln(k)(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Donc par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}
f_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g_n^{(k)}(x)\ln^{(n-k)}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}\frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k-1}\frac{(n-1)!}{x}\\
&= \frac{(n-1)!}{x}\left(\binom{n}{n} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{x}(1-(1-1)^n) = \frac{(n-1)!}{x}.
\end{aligned}$$

Le terme $k = n$ est nul car $g_n^{(n)}$ l'est.

## Solution de l'exercice 20.6

Notons $T$ une période de $f$. Alors $f'$ est également $T$-périodique.
Puisque $f$ est $\mathscr{C}^1$, alors $f'$ est continue sur $[0, T]$, et donc $|f'|$ est bornée.
Notons $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in [0, T]$, $|f'(x)| \leqslant M$.
Alors, par périodicité, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f'(x)| \leqslant M$.
Et donc par l'inégalité des accroissements finis, $f$ est $M$-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$.

## Solution de l'exercice 20.7

La fonction $f : t \mapsto te^{1/t}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
En particulier, pour $x > 0$, elle est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, donc il existe $t_x \in ]x, x+1[$ tel que $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = f'(t_x)(x+1-x) = f'(t_x)$.
Mais $f'(t) = e^{1/t} - \frac{1}{t}e^{\frac{1}{t}} = \frac{t-1}{t}e^{\frac{1}{t}}$.
On constate alors que $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et alors, pour $x > 0$, $t_x \geqslant x$, de sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} t_x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(t_x) = 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = 1$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.8

Prouvons le résultat par récurrence sur $n$, et notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété «si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et s'annule au moins $n$ fois sur $I$, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $I$.»
Si $n=1$, et si $a<b$ sont deux éléments de $I$ tels que $f(a)=f(b)$, alors par le théorème de Rolle[3], il existe $c \in ]a,b[\subset I$ tel que $f'(c)=0$.
Donc $f'$ s'annule au moins une fois sur $I$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soit alors $f$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur $I$, et soient $a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}$ des points de $I$ tels que $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_{n+1})$.
Alors, en appliquant le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[a_i,a_{i+1}]$, $f'$ s'annule au moins une fois sur chacun des $]a_i,a_{i+1}[$, et donc en $n$ points distincts.
Mais $f'$ est $n$ fois dérivable. Donc par l'hypothèse de récurrence $(f')^{(n)}=f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $I$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n\geqslant 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

[3] Qui s'applique puisque $f$ est dérivable.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.9

Puisque $f(a)=f(b)$, et que $f$ est dérivable sur $[a,b]$, alors par le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in ]a,b[$ tel que $f'(c_1)=0$.
Mais alors $f'(a)=f'(c_1)$, et $f'$ est dérivable sur $]a,b[$, donc il existe $c_2 \in ]a,c_1[$ tel que $f''(c_2)=0$.
Puis de proche en proche, on prouve qu'il existe $c_{i+1} \in ]a,c_i[$ tel que $f^{(i)}(c_i)=0$.
Et donc au final, il existe $c_n \in ]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c_n)=0$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.10

Ceci a été fait en cours, dans le cas d'un polynôme scindé à racines simples seulement.

Supposons donc que $P$ soit un polynôme de degré $n\geqslant 1$, scindé, de la forme $P=\alpha\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{m_i}$,

où $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p$ sont les racines **distinctes** de $P$.
Par le théorème de Rolle, $P'$ possède une racine dans $]\alpha_1,\alpha_2[$, une dans $]\alpha_2,\alpha_3[,\dots$, une dans $]\alpha_{p-1},\alpha_p[$, soient déjà $p-1$ racines.
Donc si $p=n$, c'est-à-dire si toutes les racines de $P$ sont simples, nous avons autant de racines que le degré de $P'$, qui est donc scindé[4]
En revanche, si $P$ possède des racines multiples, il nous manque des racines de $P'$.
Mais si $\alpha_i$ est une racine de $P$ de multiplicité $m_i\geqslant 2$, alors $\alpha_i$ est racine de $P'$ de multiplicité $m_i-1$.

[4] Et à racines simples.

Puisque $P$ est scindé, $\sum_{i=1}^{p} m_i=n$.

Et donc $\sum_{i=1}^{p}(m_i-1)=n-p$.

**Remarque**
Dans cette somme, les racines simples de $P$ n'apportent rien puisqu'alors $m_i-1=0$.

Ainsi, comptées avec multiplicités, $P'$ possède déjà $n-p$ racines parmi $\alpha_1,\dots,\alpha_p$.
D'autre part, nous avons déjà trouvé $p-1$ racines distinctes des $\alpha_i$ par le théorème de Rolle.
Soit, avec multiplicités, au moins $n-p+p-1=n-1$ racines de $P'$.
Mais $P'$ étant de degré $n-1$, nous avons là toutes les racines, et donc $P'$ est scindé.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.11

**1.** Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors $f'$ est continue, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $f'(I)$ est un intervalle.

**2.a.** La fonction $g$ est dérivable sur $I$, et sa dérivée est $g':x\mapsto f'(x)-y$.
On a donc $g'(a)=f'(a)-y$ et $g'(b)=g'(b)-y$ de signes opposés. Donc $g$ n'est pas monotone sur $I$.

**2.b.** La fonction $g$ est continue sur l'intervalle $I$. Or, nous savons qu'une fonction continue sur un intervalle est injective si et seulement si elle est strictement monotone sur cet intervalle.
Donc $g$ n'est pas injective.

**2.c.** Puisque $g$ n'est pas injective sur $I$, il existe deux points $c<d$ de $I$ tels que $g(c)=g(d)$.
Mais $g$ est continue sur $[c,d]$, dérivable sur $]c,d[$, et donc par le théorème de Rolle, il existe $\lambda \in ]c,d[\subset I$ tel que $g'(\lambda)=0 \Leftrightarrow f'(\lambda)=y$.
Ainsi, $y\in f'(I)$, et donc $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

**Rappel**
Un intervalle est un ensemble qui, dès qu'il contient deux réels $a$ et $b$, contient tous les réels compris entre $a$ et $b$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.12

1. Appliquons le théorème de Rolle à la fonction $\varphi : t \mapsto g(t)f(x) - f(t)g(x)$.
Celle-ci est en effet continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = f(x)g(x) - f(x)g(x) = 0$.
Donc il existe $c \in ]0,x[$ tel que $\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow g'(c)f(x) = f'(c)g(x)$.

2. Soit $x \in ]0,a[$. Par la question 1, il existe $c_x \in ]0,x[$ tel que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.
Or, $0 \leqslant c_x \leqslant c$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} c_x = 0$.
Et donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

3. Nous sommes en présence de cas où les équivalents rencontrés jusqu'à présent ne peuvent pas suffire[5].
Appliquons la règle de l'Hôpital à $f(x) = e^x - 1 - x$ et $g(x) = 1 - \cos x$, qui satisfont bien aux hypothèses ci-dessus, par exemple avec $a = 1$.
Alors $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$.
À l'aide des équivalents usuels, $\dfrac{e^x-1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1 - \cos(x)} = 1$.
Notons que ceci prouve que $e^x - 1 - x \underset{x\to 0}{\sim} 1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
Pour la seconde question[6], il s'agit de prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.
Mais par la règle de l'Hôpital,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

[5] Mais les développements limités d'ordre supérieurs que nous verrons prochainement permettront de conclure.

**Remarque**
Une alternative aurait été d'appliquer une seconde fois la règle de L'Hôpital.

[6] Ce que nous nommerons bientôt développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$.

## Solution de l'exercice 20.13

Prouvons le résultat par récurrence sur $d = \deg P$.
Si $d = 0$, c'est une conséquence directe de l'injectivité de l'exponentielle : elle ne prend au plus qu'une fois chaque valeur.
Supposons le résultat vrai pour un polynôme de degré $d$, et soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré $d+1$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $P(x) = e^x$ possède au moins $d+2$ solutions distinctes.
Alors la fonction $x \mapsto P(x) - e^x$ s'annule en au moins $d+2$ points.
Par applications du théorème de Rolle, sa dérivée, qui est la fonction $x \mapsto P'(x) - e^x$ s'annule au moins $d+1$ fois.
Et donc l'équation $P'(x) = e^x$ possède au moins $d+1$ solutions, avec $\deg P' = d$. Ceci contredit l'hypothèse de récurrence, et donc $P(x) = e^x$ possède au plus $d+1$ solutions distinctes.
Par le principe de récurrence, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ non nul, $P(x) = e^x$ possède au plus $\deg P + 1$ solutions.

Notons qu'il existe toujours des polynômes réalisant cette borne. En effet, pour $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, si on note $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés, alors $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} e^{\lambda_i} L_i$ est un polynôme de degré au plus $n$ tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

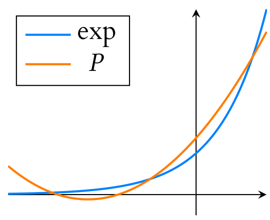


Figure 20.1– Un polynôme de degré 2 qui rencontre 3 fois l'exponentielle.

## Solution de l'exercice 20.14

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, scindé à racines simples, et soient $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ ses racines.
Alors, par le théorème de Rolle, pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, $P'$ possède une racine dans $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$, soit en tout $n - 1 = \deg P'$ racines distinctes.
Donc $P'$ est scindé, et ses racines sont encore simples .
En itérant, on prouve donc que $P'', P^{(3)}, \dots, P^{(n-1)}$ sont scindé à racines simples. Notons que $P^{(n)}$ étant constant, par définition il n'est pas scindé.

**Rappel**
Un polynôme qui possède autant de racines que son degré (c'est-à-dire le nombre maximal de racines) ne peut avoir que des racines simples, faute de quoi, le nombre de racines comptées avec multiplicité excéderait le degré.

Rappelons que par la formule de Taylor appliquée en 0, les coefficients de $P$ sont donnés

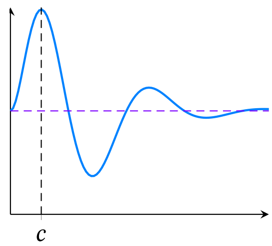
par $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.
Si $P$ possède deux coefficients consécutifs nuls, alors il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $P^{(k)}(0) = P^{(k+1)}(0) = 0$.
Et donc 0 est racine double de $P^{(k)}$, ce qui contredit le fait que toutes ses racines sont simples.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.15

Quitte à retirer une constante à $f$, ce qui ne change rien à sa dérivée, on peut supposer que $f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Si $f$ est constante sur $\mathbf{R}_+$, il n'y a rien à dire.
Supposons donc que $f$ n'est pas constante, et supposons[7] qu'elle prenne une valeur strictement positive et soit $a \in \mathbf{R}_+$ tel que $f(a) > 0$.
Inspirons nous de la preuve de Rolle, qui prouve l'existence d'un point critique de $f$ en prouvant l'existence d'un maximum.
Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, en prenant $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$, il existe $A \in \mathbf{R}_+$ tel que pour $x \geqslant A$, $|f(x)| < \frac{f(a)}{2}$.
Soit alors $M$ le maximum[8] de $f$ sur le **segment** $[0, A]$. Alors $M \geqslant f(a)$, et donc pour $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant M$.
On en déduit donc que $M$ est le maximum de $f$ sur $\mathbf{R}_+$ tout entier, atteint en un point $c$ de $\mathbf{R}_+^*$.
En particulier, $f$ possède un maximum local en $c$, et donc $f'(c) = 0$.
***Remarque*** *: il est bien entendu possible de généraliser plus largement. Une version assez générale serait la suivante : si $f$ est dérivable sur $]a, b[$, avec $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, et que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x)$, alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*
**Application** : Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$ (le cas $\lambda = 0$ est l'exercice 10), et considérons l'application $\varphi_\lambda : t \mapsto P(t)e^{\lambda t}$.
Sa dérivée est $\varphi_\lambda' : t \mapsto (P' + \lambda P)e^{\lambda t}$, qui s'annule uniquement en les zéros de $P' + \lambda P$.
Comme dans l'exercice 10, notons $n = \deg P$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$ les racines des $P$, alors elles annulent $\varphi_\lambda$.
Donc par Rolle, $\varphi_\lambda'$ s'annule une fois sur chacun des intervalles $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.
Ceci nous donne donc $p - 1$ racines distinctes de $P' + \lambda P$.
De plus, les racines de multiplicité $m \geqslant 2$ de $P$ sont racines de multiplicité $m - 1 > 0$ de $P'$, et donc sont racines de multiplicité $m - 1$ de $P + \lambda P' + \lambda P$.
Donc avec multiplicité, on a déjà $n - 1$ racines de $P' + \lambda P$.
La différence avec l'exercice 10 réside dans le fait que $P' + \lambda P$ est de degré $n$, donc il nous manque encore une racine.
Mais $\varphi_\lambda(\alpha_n) = 0 = \lim_{x\to+\infty} \varphi_\lambda(x)$.
Donc par la généralisation de Rolle, il existe $c \in ]\alpha_n, +\infty[$ tel que $\varphi_\lambda'(c) = 0 \Leftrightarrow P'(c) + \lambda P(c) = 0$.
Cette racine est nécessairement distincte de toutes celles obtenues précédemment, donc on a $n$ racines de $P' + \lambda P$ comptées avec multiplicité, donc $P' + \lambda P$ est bien scindé.

[7] Quitte à changer $f$ en son opposé.

[8] Un tel maximum existe par le théorème des bornes atteintes.




## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.16

1. La dérivée de la fonction Arctan est $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
   Or, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.
   Donc $\sup_{t\in\mathbf{R}} |\mathrm{Arctan}'(t)| \leqslant 1$.
   Et donc par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,
   $$|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| \leqslant |x - y|.$$

**Sup/max**
Il n'y a aucune difficulté à constater que ce sup est en fait un maximum atteint uniquement en 0.

2. De même, la fonction cos est 1-lipschitzienne, et donc $\forall x \in \mathbf{R}$,
   $$|\cos(x) - 1| = |\cos(x) - \cos(0)| \leqslant |x - 0| \leqslant |x|.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.17

**1.** Notons que $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,dt$.

D'autre part, d'après la relation de Chasles, $\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,,dt$.

Donc

$$R_n(f) - \int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)dt.$$

Puisque $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, $f'$ est continue, donc bornée.
Notons alors $m = \min_{[0,1]} f'$ et $M = \max_{[0,1]} f'$.

Par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, et tout $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$,

$$m\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \leqslant M\left|x - \frac{k}{n}\right|$$

et donc $\frac{m}{n} \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \leqslant \frac{M}{n}$. Par croissance de l'intégrale, on a donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\frac{m}{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)dt \leqslant \frac{M}{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right).$$

Et donc en sommant pour $k$ allant de 1 à $n$, il vient

$$\frac{m}{n} \leqslant R_n(f) - \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \frac{M}{n}.$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

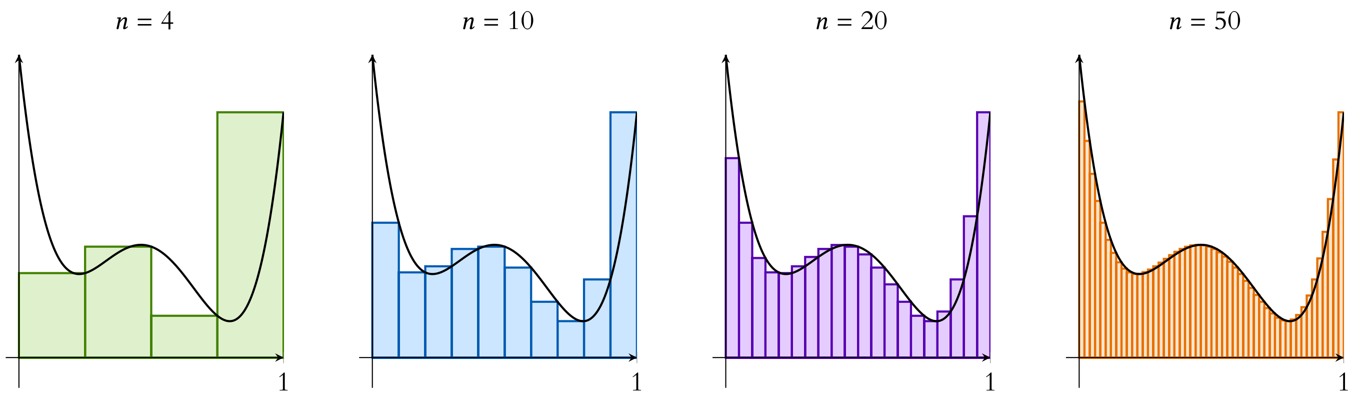



FIGURE 20.2 – La convergence de $R_n(f)$ vers l'intégrale se comprend bien graphiquement.

**2.** Tel que donné dans l'énoncé, $x_n$ n'a pas la forme de la question 1, mais il suffit de factoriser par $\frac{1}{n}$ :

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f$ est la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{3+x^2}$.

On a donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$.
Dès lors, ce n'est plus qu'un simple exercice de calcul d'intégrale.

$$\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.18

**1.a.** On a $\varphi(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \frac{A}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$, qui est nul si et seulement si

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right).$$

**1.b.** Puisque les $f^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n$ sont dérivables sur $I$ (car $f$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$), $\varphi$ est dérivable[9] sur $I$. En donc en particulier sur le segment $J$ d'extrémités $a$ et $b$.
Puisque $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, par le théorème de Rolle, il existe $c \in J$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
Mais la dérivée de $\varphi$ est

$$\varphi' : t \mapsto -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(b-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(b-t)^{k-1} + \frac{A}{n!}(b-t)^n.$$

En procédant à un changement d'indice dans la seconde somme, il vient

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(b-t)^k + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(b-t)^i + \frac{A}{n!}(b-t)^n \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n + \frac{A}{n!}(b-t)^n\end{aligned}$$

Et donc $\varphi'(c) = 0$ devient

$$\frac{A}{n!}(b-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n \Leftrightarrow f^{(n+1)}(c) = A.$$

On en déduit alors que

$$\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

**2.** Il s'agit juste de remarquer que $|f^{(n+1)}(c)| \leqslant \sup_I |f^{(n+1)}|$ et donc

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_I |f^{(n+1)}|.$$

**3.** Si $f$ est la fonction exponentielle, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(t) = e^t$.
Soit alors $x \in \mathbf{R}$, et appliquons l'inégalité précédente sur le segment $I$ d'extrémités $0$ et $x$.
Sur ce segment, la fonction exponentielle est bornée, et $\sup_{t \in I} |e^t| \leqslant e^{|x|}$
Donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange, puisque tous les $f^{(k)}(0)$ valent $1$,

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}.$$

Mais par croissances comparées, $|x|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o((n+1)!)$, et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^|x| = 0$.

Et donc $\lim_{n\to+\infty} e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Si $f$ est la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$, et une récurrence rapide prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$f^{(k)}(t) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

[9] Et donc continue.

**Détails**
Si $x \geqslant 0$, la majoration est évidente par croissance de l'exponentielle.
Et si $x < 0$, sur $[x, 0]$, $e^t \leqslant e^0 \leqslant e^{|t|}$.

En particulier, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.
Appliquons alors l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $a = 0$ et $b = 1$ : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}(1-0)^k \right| \leqslant \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{\sup_{t\in[0,1]} \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}}_{=n!} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Et donc par passage à la limite,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 0 \Leftrightarrow \ln(2) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

## Solution de l'exercice 20.19

Puisque $P$ est de degré impair, il admet au moins une racine réelle $\alpha$.
Mais alors toutes les dérivées de $f$ en $\alpha$ sont nulles, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|f^{(n)}(\alpha)| \leqslant |P(\alpha)|$.
Soit alors $x \in \mathbf{R}$, et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors, par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$|f(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k \right| \leqslant \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[\alpha,x]} |P(t)|.$$

Mais par croissances comparées, $\frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $|f(x)| = 0$.
Ainsi, $f$ est la fonction nulle.

**Rappel**
L'existence d'une telle racine est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

**Remarque**
Notons que le résultat est faux pour un polynôme de degré pair, par exemple si on prend $f = \cos$ et $P = X^2 + 1$, ou plus simplement $P = 1$.

## Solution de l'exercice 20.20

On peut bien évidemment supposer que les $a_i$ sont tous non nuls, et quitte à les renuméroter[10], on peut également supposer que $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$.
Et par parité du cosinus, on peut même supposer que tous les $\omega_i$ sont strictement positifs.

Un premier cas est facile à traiter : celui où il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_i| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_j|$.

Alors pour $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$f\left(\frac{2k\pi}{\omega_i}\right) = a_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_j \cos\left(\frac{2k\pi}{\omega_i}\omega_j\right).$$

Mais

$$\left| \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_j \cos\left(\frac{2k\pi}{\omega_i}\omega_j\right) \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_j| < |a_i|.$$

Donc $f\left(\frac{2k\pi}{\omega_i}\right)$ est du signe de $a_i$.
Et de même, $f\left(\frac{(2k+1)\pi}{\omega_i}\right) = -a_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} aj \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{\omega_i}\omega_j\right)$ est du signe de $-a_i$.
Donc par le théorème de Rolle, $f$ s'annule entre $\frac{2k\pi}{\omega_i}$ et $\frac{(2k+1)\pi}{\omega_i}$.
Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $f$ s'annule une infinité de fois.
Dans le cas où aucun des coefficients ne l'emporte sur les autres, intégrons $f$.
En effet, par le théorème de Rolle, si une primitive de $f$ s'annule une infinité de fois, alors $f$ s'annulera aussi une infinité de fois.

Une primitive de $f$ est $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\omega_i} \sin(\omega_i x)$.
Nous pourrions tenir le même raisonnement que précédemment, mais pour garder des sommes de cosinus, intégrons $4k$ fois, et considérons $F_k : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\omega_i^{4k}} \cos(\omega_i x)$.

[10] Et à regrouper des termes si besoin.

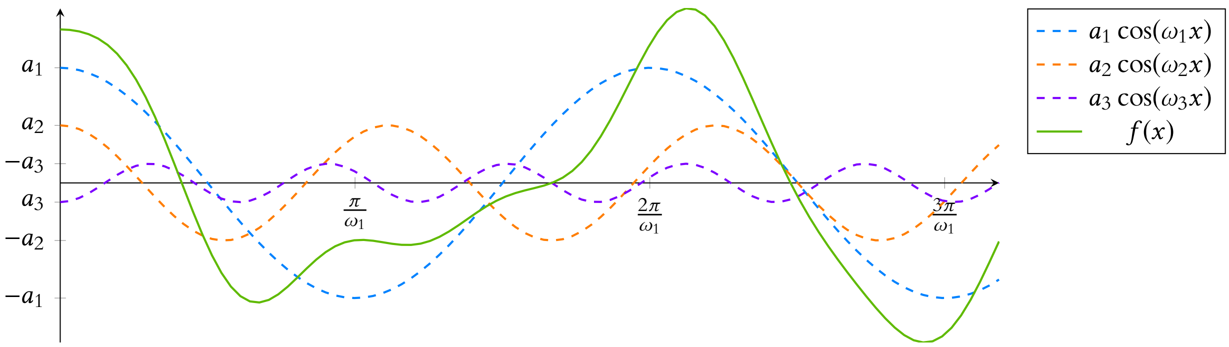



FIGURE 20.3 – Le cas $n = 3$, lorsque $|a_3| > |a_1| + |a_2|$.

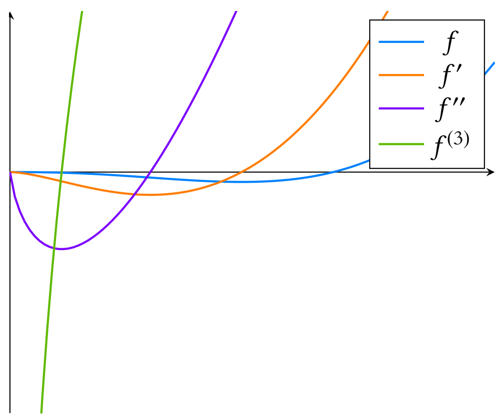
Puisque les $\omega_i$ sont deux à deux distincts, avec $\omega_1 < \cdots < \omega_n$, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\dfrac{1}{\omega_i^{4k}} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\omega_1^{4k}}\right)$.
Et donc $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{|a_i|}{\omega_i^{4k}} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{|a_1|}{\omega_1^{4k}}\right)$.
Par conséquent, il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $k \geqslant k_0$,

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{|a_i|}{\omega_i^{4k}}}{\frac{|a_1|}{\omega_1^{4k}}} < 1 \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n} \frac{|a_i|}{\omega_i^{4k}} < \frac{|a_1|}{\omega_1^{4k}}.$$

Et donc par le premier cas traité précédemment, $F_{4k_0}$ s'annule une fois sur chacun des intervalles de la forme $\left]\dfrac{2\ell\pi}{\omega_1}, \dfrac{(2\ell+1)\pi}{\omega_1}\right[$, $\ell \in \mathbf{Z}$.
Mais alors $F'_{4k_0}$ s'annule une infinité de fois par le théorème de Rolle.
Puis $F''_{4k_0}$, s'annule une infinité de fois, etc.
Et donc $F_{4k_0}^{(4k_0)} = f$ s'annule une infinité de fois.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.21

La fonction $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ car produit de fonctions qui le sont.
On a alors $f'(x) = x^2 + 3x^2\ln(x)$, $f''(x) = 2x + 6x\ln(x) + 3x$ et $f^{(3)}(x) = 11 + 6\ln(x)$.
En particulier, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0} f''(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} f^{(3)}(x) = -\infty$.
Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^2$, la fonction $f$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et le prolongement ainsi obtenu est $\mathscr{C}^2$.
Et la limite de $f^{(3)}$ en 0 étant infinie, ce prolongement ne saurait être de classe $\mathscr{C}^3$, car si c'était le cas, on aurait $\lim\limits_{x\to0} f^{(3)}(x) = f^{(3)}(0)$.




## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.22

1. $f$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Donc $f$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ en posant

$$\widetilde{f} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. La fonction $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ car composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ qu'il existe $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

Pour $n = 0$, c'est évident, il suffit de poser $P_0 = 1$.
Supposons donc que $P_n$ existe. Alors en dérivant $f^{(n)}$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}.$$

Si on pose $P_{n+1}(X) = -X^2P_n' + 2X^3P_n \in \mathbf{R}[X]$, alors on a bien $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$.
Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3. Il s'agit d'appliquer le théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $a_dX^d$ le monôme de plus haut degré de $P_n$.
Alors[11] $P_n\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{a_d}{x^d}$.
Et donc $f^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{a_d}{x^d}e^{-1/x^2}$.
Procédons alors au changement de variable $X = \frac{1}{x^2}$, de sorte que $X \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Alors

$$\frac{1}{x^d}e^{-1/x^2} = X^{d/2}e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées.
Donc $f^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$ (qui s'applique car les limites des dérivées sont finies), $\widetilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

[11] Un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré.

**Remarque**

Il se produit là un phénomène qui ne peut pas se produire pour les polynômes (because of Taylor) : une fonction non nulle dont toutes les dérivées en un point sont nulles.