TD 21 : Dimension finie

▶ Dimension d'un espace vectoriel, sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 21.1 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer la dimension. **F**

1. $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+2y=0\}$
2. $F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x+5y-3z=0 \\ -x-4y+2z=0 \end{cases}\right\}$
3. $F_3 = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid (X-1)P' - XP'' = 2P\}$
4. $F_4 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid MN = NM\}$ où $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 deux réels fixés distincts.
5. $F_5 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$

Exercice 21.2 Soient a, b deux complexes distincts. Montrer que la famille $(X-a)^k(X-b)^{n-k}, 0 \leqslant k \leqslant n$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$. **F**

Exercice 21.3 Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l'ensemble des suites p-périodiques (c'est-à-dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+p} = u_n$) est un espace vectoriel, et en déterminer la dimension. **PD**

Exercice 21.4 Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$. Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre. **F**

Exercice 21.5 Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$. Montrer que la famille $f_a : x \mapsto \sin(x+a)$, $f_b : x \mapsto \sin(x+b)$, $f_c : x \mapsto \sin(x+c)$ est liée dans $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. **PD**

Exercice 21.6 Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $k \in [\![0, n]\!]$. On pose $f_k : x \mapsto \cos^k x$ et $g_k : x \mapsto \cos(kx)$. **AD**

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ et $(g_0, \dots, g_n)$ sont deux familles libres (dans quel espace ?).
2. Soit $F_n = \operatorname{Vect}(f_0, \dots, f_n)$ et $G_n = \operatorname{Vect}(g_0, \dots, g_n)$. Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f_k \in G_n$.
3. Montrer que $F_n = G_n$.

Exercice 21.7 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, F_3 des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ si et seulement si **PD**

$$\begin{cases} \dim E = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 \\ F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ (F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\} \end{cases}$$

Exercice 21.8 Montrer, **sans analyse-synthèse** que F et G sont supplémentaires dans E dans les deux cas suivants : **PD**

1. $E = \mathbf{R}^4$, $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x+2z+t=0$ **et** $2y+3z-t=0\}$, $G = \operatorname{Vect}((1,1,1,1),(1,-1,1,1))$
2. $E = \mathbf{R}_3[X]$, $F = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2P(X)\}$, $G = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(0) = P(2)\}$

▶ Théorème du rang et conséquences

Exercice 21.9 Soient $(a_1, \dots, a_n)$ des éléments distincts de $\mathbf{K}$. Montrer que $\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{array}\right.$ est un isomorphisme. Connaissez-vous sa bijection réciproque ? **PD**

Exercice 21.10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$. Montrer que E et F sont deux projecteurs. **AD**

Exercice 21.11 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ si et seulement si n est pair. **AD**

Exercice 21.12 On note $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer qu'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathcal{T}_n(\mathbf{K}) \to \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$. **PD**

Exercice 21.13 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. **PD**
Montrer que $\varphi : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1), \dots, u(e_n)) \end{array}\right.$ est un isomorphisme, et retrouver la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 21.14 **PD**

1. Pour $n \geqslant 2$, on pose $\varphi_n : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P + P(0)X + XP'' \end{array}\right.$. Montrer que φ_n est un isomorphisme.

2. En déduire que $\varphi : \begin{array}{|ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + P(0)X + XP'' \end{array}$ est un isomorphisme.
3. Les endomorphismes $f : \begin{array}{|ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP(X) \end{array}$ et $f : \begin{array}{|ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'' \end{array}$ sont-ils injectifs ? Surjectifs ?

Exercice 21.15 Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, et que $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$. Montrer que pour tout $k \leqslant n$, on a $\dim(\operatorname{Ker} u^k) = k$. **D**

Exercice 21.16 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. **AD**

1. On suppose que f est nilpotent, d'indice de nilpotence p (c'est-à-dire tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$). On souhaite prouver que $p \leqslant n$.
   (a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$.
   (b) Montrer qu'alors la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
   (c) Conclure.
2. On suppose à présent que pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $f^p(x) = 0_E$. Montrer que f est nilpotent. Donner un exemple d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension infinie pour lequel ce résultat est faux.

Exercice 21.17 Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. **D**
En considérant $\Phi : \begin{array}{|ccc} F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n & \longrightarrow & F_1 + \cdots + F_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array}$, retrouver le résultat suivant : la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si $\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Exercice 21.18 Inégalité de Sylvester (Oral X) **TD**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, u et v deux endomorphismes de E.

1. Comparer $\operatorname{rg}(u+v)$ à $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$ et $\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)$.
2. Prouver que
$$\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \Leftrightarrow (\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0_E\} \text{ et } \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v = E).$$
3. Montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - n \leqslant \operatorname{rg}(uv) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

► Hyperplans et formes linéaires

Exercice 21.19 Déterminer la dimension de $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$ et en déterminer un supplémentaire. **F**

Exercice 21.20 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. **PD**

1. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, et soit $x \notin \operatorname{Ker} \varphi$. Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Vect}(x)$ sont supplémentaires dans E.
2. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice 21.21 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. **D**

1. Montrer que si F et G sont deux hyperplans de E, ils possèdent un supplémentaire commun.
2. On suppose que $\dim F = \dim G$. Montrer que F et G possèdent un supplémentaire commun.

Exercice 21.22 Dual de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ **D**

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, calculer $\operatorname{tr}(AE_{i,j})$ en fonction des coefficients de A.
2. En déduire que si φ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors il existe un unique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM)$.

► Sous-espaces affines

Exercice 21.23 Soit $\alpha \in \mathbf{K}$. Montrer que $\{P \in \mathbf{K}[X] \mid P(\alpha) = 1\}$ est un sous-espace affine dont on donner un point et la direction. **F**

Exercice 21.24 Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. À quelle condition une translation et f commutent-ils ? **AD**

Exercice 21.25 Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines disjoints de E. Montrer qu'il existe $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{G}_1$ deux sous-espaces affines de E, disjoints, de même direction, et contenant respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. **AD**

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 21

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.1

1. On a

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = -2y\} = \{(-2y,y,z),\ (y,z) \in \mathbf{R}^2\} = \{y(-2,1,0)+z(0,0,1),\ (y,z) \in \mathbf{R}^2\} = \mathrm{Vect}((-2,1,0),(0,0,1)).$$

Ainsi, la famille $(-2,1,0),(0,0,1)$ est génératrice de F_1. Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires : c'est une base de F_1, qui est donc de dimension 2.

2.

$$\begin{aligned} F_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x+5y-3z=0 \\ -x-4y+2z=0 \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x+5y-3z=0 \\ y=z \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x=-2z \\ y=z \end{cases}\right\} \\ &= \{(-2z,z,z),\ z \in \mathbf{R}\} = \{z(-2,1,1),\ z \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}(-2,1,1). \end{aligned}$$

La famille $(-2,1,1)$ est donc génératrice de F_2. Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul[1] : c'est donc une base de F_2 et $\dim F_2 = 1$.

[1] Une famille formée d'un seul vecteur est libre... à condition que ce vecteur soit non nul !

3. Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors $P \in F_3$ si et seulement si

$$(X-1)(2aX+b)-2aX = aX^2+bX+c \Leftrightarrow 2aX^2+bX-2aX-b = aX^2+bX+c.$$

Par identification des coefficients, c'est le cas si et seulement si

$$\begin{cases} 2a=a \\ b-2a=b \\ -b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Remarque
Il n'y a donc aucune contrainte sur b.

Et donc $P \in F_3 \Leftrightarrow P = bX$, de sorte que $F_3 = \mathrm{Vect}(X)$.
En particulier, F_3 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[X]$, de base X, de sorte que $\dim F_3 = 1$.

Astuce
Si on arrive à écrire un ensemble sous forme d'un Vect, c'est automatiquement un sous-espace vectoriel.

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Alors

$$MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } NM = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $M \in F_4$ si et seulement si

$$\begin{cases} a\lambda_1 = a\lambda_1 \\ b\lambda_1 = b\lambda_2 \\ c\lambda_1 = c\lambda_2 \\ d\lambda_2 = d\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(\lambda_1-\lambda_2)=0 \\ c(\lambda_1-\lambda_2)=0 \end{cases}$$

Et puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ceci équivaut à $b = c = 0$.
Ainsi,

$$F_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, (a,d) \in \mathbf{R}^2\right\} = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a,d) \in \mathbf{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Donc F_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, dont une famille génératrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Puisqu'il s'agit d'une famille de deux vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ non colinéaires, elle est libre, et donc c'est une base de F_4.

5. Il s'agit de noter qu'une matrice de trace nulle s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{2,1} & \dots & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ddots & & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & m_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & \dots & -(m_{1,1}+\dots+m_{n-1,n-1}) \end{pmatrix} = \sum_{i\neq j} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}(E_{i,i}-E_{n,n})$$

On a alors une famille[2] génératrice, dont on prouve facilement qu'elle est libre.
Et donc c'est une base de F_5, qui est de dimension n^2-1.

[2] La famille formée des $E_{i,j}$ pour $i\neq j$ et des $E_{i,i}-E_{n,n}$.

Solution de l'exercice 21.2

Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ des complexes tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X-a)^i(X-b)^{n-i} = 0$.
En évaluant en $X=b$, il vient $\lambda_0(b-a)^n = 0$. Or $b\neq a$, donc $\lambda_0 = 0$.
Il reste donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (X-a)^i(X-b)^{n-i} = 0$.
En simplifiant[3] par $(X-a)$, il reste

$$\lambda_1(X-b)^{n-1} + \lambda_2(X-a)(X-b)^{n-2} + \dots + \lambda_n(X-b)^n = 0.$$

[3] Ce qui est possible car $\mathbf{C}[X]$ est un anneau intègre.

En évaluant en $X=b$, il vient $\lambda_1(b-a)^{n-1} = 0$, et donc $\lambda_1 = 0$.
Ne reste donc que $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i (X-a)^i(X-b)^{n-i} = 0$.
De proche en proche, on prouve ainsi que les λ_i sont nuls, donc que la famille est libre.
Étant de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$, c'est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Solution de l'exercice 21.4

Puisque $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$, de cardinal $n = \dim \mathbf{K}^n$, c'est une base de $\mathbf{K}^n$, et en particulier une famille libre.
Donc toute sous-famille en est libre, et c'est notamment le cas de $(e_1,\dots,e_{n-1})$.
Remarque *: ceci n'est plus vrai pour une famille génératrice dont le cardinal dépasse la dimension de l'espace ambiant.*
Par exemple $(1,1),(2,2),(1,0)$ *est génératrice de* $\mathbf{R}^2$*, mais la famille formée de ses deux premiers vecteurs n'est pas libre.*

Solution de l'exercice 21.5

Notons que $\sin(x+a) = \sin(x)\cos(a)+\cos(x)\sin(a)$, et donc $f_a \in \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.
Et de même, $f_b, f_c \in \mathrm{Vect}(\sin,\cos)$.
Donc (f_a,f_b,f_c) est une famille de trois vecteurs d'un espace de dimension au plus[4] 2.
Nécessairement, il s'agit d'une famille liée.

[4] Et même en fait exactement deux car il n'est pas très difficile, même si inutile ici, de voir que (sin, cos) est une famille libre.

Solution de l'exercice 21.6

1. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.
Alors en évaluant en $\frac{\pi}{2}$, on a $\lambda_0 = 0$.
Sur $[0,\frac{\pi}{2}[$, on peut diviser par $\cos(x)$, et on a alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos^{k-1}(x) = 0$.
En prenant la limite lorsque $x\to\frac{\pi}{2}$, il vient $\lambda_1 = 0$.
De proche en proche, en divisant par $\cos^i(x)$ sur $[0,\frac{\pi}{2}[$, puis en prenant la limite lorsque $x\to\frac{\pi}{2}$, on montre que $\lambda_i = 0$.
Donc la famille $(f_0,\dots,f_n)$ est libre.

Montrons par récurrence sur n que $(g_0,\dots,g_n)$ est libre.
Pour $n=0$, c'est évident.
Supposons que ce soit vrai au rang n, et soit $\sum_{k=0}^{n+1} \lambda g_k$ une combinaison linéaire nulle.

En dérivant deux fois, il vient, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 \lambda_k \cos(kx) = 0.$$

Mais alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k((n+1)^2 - k^2)\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k((n+1)^2 - k^2)\cos(kx) = 0$.
Par l'hypothèse de récurrence, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Et alors $\lambda_{n+1} = 0$. Donc par récurrence, la famille $(g_0, \dots, g_n)$ est libre.

Alternative *: voici une autre preuve*[5] *pour la liberté de* $(f_0, \dots, f_n)$.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ *des réels tels que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cos^i = 0$.

Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i$ *est une fonction polynomiale, qui s'annule en tous les éléments de* $[-1, 1]$ *(car* cos *est surjective sur* $[-1, 1]$*). Elle est donc nulle*[6]*, de sorte que tous ses coefficients sont nuls :* $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

[5] Proposée par Jean.

[6] Car possède une infinité de racines.

2. Par récurrence sur k : si $k = 0$, c'est évident.
Si $\cos^{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \cos(ix)$, alors

$$\cos^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \cos(ix)\cos(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(\cos((i+1)x) + \cos((i-1)x))$$

et donc $g_k \in F_k$.

3. Les deux espaces sont de même dimension $n+1$, et on vient de prouver que $F_n \subset G_n$ à la question précédente.
Donc nécessairement $F_n = G_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.7

Supposons que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$. Alors déjà

$$\dim E = \dim(F_1 \oplus F_2 \oplus F_3) = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3.$$

Rappel
La dimension d'une somme directe est la somme des dimensions.

Si $x \in F_1 \cap F_2$, alors on a $0 = \underbrace{x}_{\in F_1} + (\underbrace{-x}_{\in F_2}) + \underbrace{0}_{\in F_3}$, et donc, la somme étant directe, $x = -x = 0$. Donc $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.
De même, si $x \in (F_1 + F_2) \cap F_3$, alors $x = x_1 + x_2, x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$. Et donc on a $0 = \underbrace{x_1}_{\in F_1} + \underbrace{x_2}_{\in F_2} - \underbrace{x}_{\in F_3}$, et donc $x = x_1 = x_2 = 0$, de sorte que $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\}$.

Inversement, supposons les trois conditions vérifiées, et montrons que $F_1 + F_2 + F_3$ est une somme directe. Soient donc $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, x_3 \in F_3$ tels que $0 = x_1 + x_2 + x_3$.
Alors $x_3 = -(x_1 + x_2) \in F_3 \cap (F_1 + F_2)$. Et donc $x_3 = \{0\}$.
Il reste alors $x_1 + x_2 = 0$, soit encore $x_1 = -x_2 \in F_1 \cap F_2$. Et donc $x_1 = x_2 = 0$.
Ainsi, la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe, et donc de dimension $\dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 = \dim E$.
Or, le seul sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E$ est E tout entier, et donc $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.8

1. Il est clair que G est de dimension 2, et une base de F est $\left(-2, -\frac{3}{2}, 1, 0\right), \left(-1, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$, de sorte que F est aussi de dimension 2.
Soit alors $(x, y, z, t) \in F \cap G$.
Il existe alors deux réels λ et μ tels que $(x, y, z, t) = \lambda(1, 1, 1, 1) + \mu(1, -1, 1, 1) = (\lambda + \mu, \lambda - \mu, \lambda + \mu, \lambda + \mu)$.
Mais alors[7] $\begin{cases} 6(\lambda + \mu = 0 \\ 2(\lambda - \mu) + 2(\lambda + \mu) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$
Donc $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$, de sorte que $F \cap G$ est réduit au vecteur nul.
Donc F et G sont en somme directe, et puisqu'on a déjà $\dim F + \dim G = \dim \mathbf{R}^4$, ils sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

[7] On utilise là le fait qu'il s'agit d'un vecteur de F.

2. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors

$$P \in F \Leftrightarrow aX^6 + bX^4 + cX^2 + d = aX^5 + cX^4 + bX^3 + dX^2 \Leftrightarrow a = c = d = 0 \Leftrightarrow P \in \text{Vect}(X^2).$$

Donc F est de dimension 1.
De même, on prouve que $G = \text{Vect}(X^3 - 8, X^2 - 4, X - 1)$. Puisqu'il s'agit d'une famille de polynômes de degrés distincts, elle est libre, et donc $\dim G = 3$.

Pour prouver que F et G sont supplémentaires, nous pourrions procéder comme dans la première partie, en prouvant que $F \cap G = \{0\}$. Mais il est également possible de prouver que la concaténation d'une base de F et d'une base de G (par exemple les bases que nous venons d'obtenir) est libre.
Ceci se fait sans difficultés. Étant libre et de cardinal $4 = \dim \mathbf{R}_3[X]$, la famille ainsi obtenue, que l'on sait être génératrice de $F + G$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$. Et donc $\mathbf{R}_3[X] = F + G$.
Puisque $\dim F + \dim G = \dim \mathbf{R}_3[X]$, on a donc $\mathbf{R}_3[X] = F \oplus G$.

3.

Solution de l'exercice 21.9

La linéarité de Φ ne pose pas de difficulté.
Soit $P \in \text{Ker}\,\Phi$. Alors $(P(a_1), \dots, P(a_n)) = 0_{\mathbf{K}^n}$.
Donc $P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$, de sorte que P possède n racines distinctes.
Étant de degré au plus $n - 1$, c'est le polynôme nul, donc $\text{Ker}\,P = \{0\}$.
On en déduit que Φ est injectif. Mais $\dim \mathbf{K}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbf{K}^n$, donc Φ est bijectif : c'est un isomorphisme.

Sa bijection réciproque est l'application qui à un n-uplet $(y_1, \dots, y_n)$ associe l'unique polynôme P de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = y_i$.
Notons alors $L_1, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $a_1, \dots, a_n$.
Alors $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$ est un polynôme de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$, tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = y_i$.
C'est donc l'unique antécédent de $(y_1, \dots, y_n)$ par Φ.
Et donc $\Phi^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}_{n-1}[X] \\ (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i \end{array} \right.$.

Solution de l'exercice 21.10

Puisque $f + g = \text{id}_E$, on a $f^2 = f \circ (\text{id} - g) = f - f \circ g$.
Si nous voulons prouver que f est un projecteur, il nous faut donc prouver que $f \circ g = 0$, soit encore que $\text{Im}\,g \subset \text{Ker}\,f$.
Par le théorème du rang, nous savons que $\dim \text{Ker}\,f = \dim E - \dim \text{Im}\,f = \dim \text{Im}\,g$.
Par ailleurs, pour $x \in \text{Ker}\,f$, on a $x = \text{id}_E(x) = f(x) + g(x) = g(x) \in \text{Im}\,g$.
Donc $F \subset \text{Im}\,g$. Ces deux espaces possédant mêmes dimensions, ils son égaux.
Et donc en particulier, $\text{Im}\,g \subset \text{Ker}\,f$, et donc on a bien $f^2 = f$, donc f est un projecteur.
Nous pourrions refaire un calcul similaire pour g, mais notons plutôt que $g = \text{id}_E - f$ est la projection sur $\text{Ker}\,f$ parallèlement à $\text{Im}\,f$.

Solution de l'exercice 21.11

Supposons qu'un tel endomorphisme existe. Alors $\dim E = \dim \text{Ker}\,f + \dim \text{Im}\,f = 2 \dim \text{Ker}\,f$ est pair.

Inversement, supposons que $\dim E = 2p$ soit pair, et soit $(e_1, \dots, e_{2p})$ une base de E.
Soit alors f l'unique endomorphisme de E tel que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = e_{i+p}$ et $\forall i \in [\![p+1, 2p]\!]$, $f(e_i) = 0_E$.

Solution de l'exercice 21.12

Une solution simple pour prouver l'existence d'un tel isomorphisme[8] est de prouver que les deux espaces ont même dimension.
Nous avons déjà donné en cours la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, c'est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

[8] Et pas d'en construire un.

D'autre part, pour $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a

$$M \in \mathcal{T}_n(\mathbf{K}) \Leftrightarrow \forall i \neq j, m_{i,j} = m_{j,i} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{1,n-1} & & & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{1,n} & m_{2,n} & \dots & m_{n-1,n} & m_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} m_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i}).$$

Donc la famille formée des $E_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et des $E_{i,j}+E_{j,i}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ est une famille génératrice de $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$.
Elle est libre car si $m_{1,1},\dots,m_{n,n},m_{1,2},\dots,m_{n-1,n}$ sont des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} m_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i}) = 0_n$$

alors en remontant les calculs réalisés précédemment, il vient

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{1,n-1} & & & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{1,n} & m_{2,n} & \dots & m_{n-1,n} & m_{n,n} \end{pmatrix} = 0$$

et donc tous les coefficients sont nuls.
On a donc une base de $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$, de cardinal $n + (n-1) + \dots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Donc $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ sont de même dimension, et donc sont isomorphes.

En réalité, il est facile de construire un isomorphisme entre ces deux espaces, et on peut par exemple prendre l'application $\varphi : \mathcal{T}_n(\mathbf{K}) \to \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ définie par

$$\varphi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{1,n-1} & & & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{1,n} & m_{2,n} & \dots & m_{n-1,n} & m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Méthode
Ici, il faudra faire à la main et l'injectivité et la surjectivité, pas question d'utiliser le théorème du rang si vous ne connaissez pas les dimensions de l'espace de départ et/ou de l'espace d'arrivée !

Je vous laisse le soin de prouver qu'elle est linéaire, et bijective.

Solution de l'exercice 21.13

Commençons par prouver que φ est bien linéaire : soient u, v deux applications linéaires de E dans F, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda u + v) &= ((\lambda u+v)(e_1),\dots,(\lambda u+v)(e_n)) = (\lambda u(e_1)+v(e_1),\dots,\lambda u(e_n)+v(e_n)) \\ &= \lambda(u(e_1),\dots,u(e_n)) + (v(e_1),\dots,v(e_n)) = \lambda\varphi(u)+\varphi(v).\end{aligned}$$

C'est un isomorphisme car nous avons prouvé que pour tout n-uplet $(y_1,\dots,y_n) \in F^n$, il existe une **unique** application linéaire $u : E \to F$ telle que $u(e_1) = y_1,\dots,u(e_n) = y_n$.
Ce qui revient à dire que φ est bijective : tout élément de l'espace d'arrivée possède un unique antécédent par φ.
Et donc $\mathcal{L}(E,F)$ et F^n ont même dimension.
Mais $\dim F^n = \dim F + \dim F + \dots + \dim F = n\dim F = \dim E \times \dim F$.

$\dim E = n$
n est bien la dimension de E, puisque nous avons noté n le cardinal d'une base de E.

Solution de l'exercice 21.14

1. La linéarité de φ_n est évidente.
Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi_n$. Alors $\varphi(P) = 0$, et donc $P = -P(0)X - XP''$.
En particulier, $P(0) = 0$, et donc $P = -XP''$. Si P est non nul, ceci n'est pas possible pour des raisons de degré : XP'' est de degré inférieur ou égal[9] à $\deg P - 1$, et ne peut donc être égal à P.
Donc $\operatorname{Ker}\varphi_n$ est injective.
Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est une bijection.

[9] Et en fait égal si $\deg P \geqslant 2$.

2. Pour les mêmes raisons que précédemment, φ est injectif.
Et si $Q \in \mathbf{R}_n[X]$, alors la question 1 prouve que Q possède un unique antécédent $P \in \mathbf{R}_n[X]$ par φ_n.
Et donc $\varphi(P) = \varphi_n(P) = Q$, de sorte que Q possède un antécédent par φ, qui se trouve donc être surjectif.
Et donc φ est bijectif : c'est un isomorphisme.
3. L'application f est clairement injective, puisque $f(P) = f(Q) \Leftrightarrow XP = XQ \Leftrightarrow P = Q$.
Pourtant elle n'est pas surjective puisque pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, si $P \neq 0$, $\deg \varphi(P) \geqslant 1$.
Donc les polynômes constants non nuls ne sont pas dans l'image de f.

Solution de l'exercice 21.15

Soit p l'indice de nilpotence de u, de sorte que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. On a facilement[10] les inclusions :

$$0 \subset \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} u^p.$$

Par le théorème du rang, appliqué à la restriction de u à $\operatorname{Ker} u^{k+1}$, on a

$$\dim(\operatorname{Ker} u^{k+1}) = \dim u(\operatorname{Ker} u^{k+1}) + \dim \operatorname{Ker} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}}.$$

Or, $\operatorname{Ker} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u$.
Vu l'hypothèse faite sur $\operatorname{Ker} u$, il s'agit là d'une droite vectorielle.
Par ailleurs, si $y \in u(\operatorname{Ker} u^{k+1})$, alors il existe $x \in \operatorname{Ker} u^{k+1}$ tel que $y = u(x)$, avec $u^{k+1}(x) = 0_E$.
Donc en particulier, $u^k(y) = u^{k+1}(x) = 0_E$, et donc $y \in \operatorname{Ker} u^k$.
Ainsi, $u(\operatorname{Ker} u^{k+1}) \subset \operatorname{Ker} u^k$, et donc $\dim u(\operatorname{Ker} u^{k+1}) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(u^k)$.
On a donc

$$\dim(\operatorname{Ker} u^{k+1}) = \dim u(\operatorname{Ker} u^{k+1}) + 1 \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u^k) + 1.$$

Ceci prouve déjà que pour $k \in [\![1, p]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k \leqslant k$.
Puisqu'en particulier $\dim \operatorname{Ker} u^p = \dim E = n$, nécessairement $n \leqslant p$.

Par ailleurs, à chaque étape, l'inclusion $\operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1}$ est stricte : $\operatorname{Ker} u^k \subsetneq \operatorname{Ker} u^{k+1}$.
En effet, supposons par l'absurde que deux termes consécutifs soient égaux, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}$.
Alors pour $x \in \operatorname{Ker} u^{k+2}$, il vient $u^{k+2}(x) = 0_E = u^{(k+1)}(u(x))$.
Donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u^k$, et donc $u^k(u(x)) = 0_E \Leftrightarrow u^{k+1}(x) = 0_E$.
Donc si pour un $k_0 < p$, $\operatorname{Ker} u^{k_0} = \operatorname{Ker} u^{k_0+1}$, alors $\operatorname{Ker} u^{k_0+2} = \operatorname{Ker} u^{k_0+1}$, et donc la suite est stationnaire à partir de k_0.
En particulier, $\operatorname{Ker} u^{p-1} = \operatorname{Ker} u^p$, ce qui contredit la définition de l'indice de nilpotence.
Donc pour tout $k < p$, $\operatorname{Ker} u^k \subsetneq \operatorname{Ker} u^{k+1}$, et donc $\dim(\operatorname{Ker} u^{k+1}) \geqslant \dim(\operatorname{Ker} u^k) + 1$.
Comme nous avions déjà prouvé l'inégalité inverse, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} = \dim \operatorname{Ker} u^k + 1$, et donc $\forall p \in [\![1, p]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.
Notons qu'en particulier, ceci prouve que $p = n$.

[10] Et la nilpotence de u n'est d'aucune utilité ici.

Solution de l'exercice 21.16

1.a. Puisque f^{p-1} n'est pas l'application nulle par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$.
1.b. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0_E.$$

En appliquant f^{p-1}, il vient

$$\lambda_0 f^{p-1}(x) + \underbrace{\lambda_1 f^p(x)}_{=0_E} + \cdots + \lambda_{p-1} f^{2p-2}(x) = 0_E \Leftrightarrow \lambda_0 f^{p-1}(x) = 0_E.$$

Puisque $f^{p-1}(x) \neq 0_E$, c'est donc que $\lambda_0 = 0$.
IL ne reste donc que $\lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0_E$.
En appliquant f^{p-2}, il vient alors $\lambda_1 f^{p-1}(x) = 0_E$, et donc $\lambda_1 = 0$.
De proche en proche, on prouve que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$, et donc la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
1.c. Nous venons d'obtenir une famille libre de p vecteurs dans un espace de dimension n, donc $p \leqslant n$.

Rappel
Toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à la dimension.

2. La différence ici réside dans l'ordre des quantificateurs : ici l'entier p peut dépendre du vecteur x choisi alors que pour un endomorphisme nilpotent, il s'agit nécessairement du même p pour tous les vecteurs de E.
Toutefois, le raisonnement de la question précédente fonctionne encore : à $x \in E \setminus \{0\}$ fixé, soit p le plus petit entier tel que $f^p(x) = 0_E$.
Alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre, et donc $p \leqslant n$.
Et par conséquent, $f^n(x) = 0_E$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $f^n = 0$, et donc f est bien nilpotente.

Ceci ne vaut plus en dimension infinie, comme le prouve par exemple le cas de la dérivation des polynômes, qui est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.
En effet, étant donné un polynôme P non nul, si $n = \deg P$, alors $f^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$.
Pour autant, $f : P \mapsto P'$ n'est pas nilpotente, car pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^n(X^n) \neq 0$.

Solution de l'exercice 21.17

Il est facile de prouver que Φ est linéaire.
Et elle est surjective par définition de la somme de sous-espaces vectoriels.

De plus, on a $(x_1, \dots, x_n) \in \operatorname{Ker} \Phi \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n = 0_E$.
Mais rappelons que, par définition, la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x_1 + \dots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0_E$.
Soit encore si et seulement si $(x_1, \dots, x_n) \in \operatorname{Ker} \Phi \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0_E, \dots, 0_E)$.
Donc si et seulement si Φ est injective.

Comme nous avons toujours la surjectivité, la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si Φ est un isomorphisme.
Si la somme est directe, alors Φ est un isomorphisme, et donc $F_1 \times \dots \times F_n$ et $F_1 + \dots + F_n$ ont même dimension.
Mais nous connaissons celle du produit : c'est la somme des dimensions des F_i, donc $\dim(F_1 + \dots + F_n) = \dim F_1 + \dim F_2 + \dots + \dim F_n$.

Inversement, si cette égalité est vérifiée, alors l'espace de départ et d'arrivée de Φ ont même dimension. Mais Φ étant surjective, par le théorème du rang, c'est un isomorphisme. Et donc $\dim F_1 + \dots + F_n = \dim F_1 + \dots + \dim F_n$.

Solution de l'exercice 21.18

1. On a facilement $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$, et donc $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.
Et alors $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u + v(-v)) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(v)$.
Et donc $\operatorname{rg}(u+v) \geqslant \operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)$.
Notons qu'on obtient les mêmes inégalités en échangeant u et v, et donc $\operatorname{rg}(u+v) \geqslant |\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)|$.

2. Reprenons nos calculs : on a égalité $\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$ si et seulement si on a à la fois :
   - ▶$\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v$: la somme $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ est directe
   - ▶$\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$.

En particulier, si ces conditions sont vérifiées, alors[11] $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont en somme directe : $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0_E\}$.
Par ailleurs, on a $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker}(u+v)$.
En effet, l'inclusion $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker}(u+v)$ est toujours vraie, et si $x \in \operatorname{Ker}(u+v)$, alors $u(x) = -v(x) \in \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v)$, de sorte que $u(x) = v(x) = 0_E$, et donc $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v$.
Donc par la formule de Grassmann, couplée au théorème du rang,

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v) &= \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker} v - \dim \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v\\ &= n - \operatorname{rg}(u) + n - \operatorname{rg}(v) - n + \operatorname{rg}(u+v).\end{aligned}$$

Mais $\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$, et donc $\dim(\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v) = n = \dim E$, de sorte que $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v = E$.

Inversement, si on suppose à la fois $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v = E$ et $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0_E\}$, alors on a toujours $\operatorname{Ker}(u+v) = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v$ et donc

$$\dim \operatorname{Im}(u+v) = n - \dim \operatorname{Ker}(u+v) = n - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v)$$

[11] Puisque la dimension de la somme vaut la somme des dimensions.

$$= n - \dim \operatorname{Ker} u - \dim \operatorname{Ker} v + \dim(\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v)$$
$$= n - \dim \operatorname{Ker} u + n - \dim \operatorname{Ker} v = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v$$
$$= \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

3. Puisque $\operatorname{Im}(uv) \subset \operatorname{Im} u$, nécessairement $\operatorname{rg}(uv) \leqslant \operatorname{rg}(u)$.
Par ailleurs, $\operatorname{Im}(uv) = u(\operatorname{Im} v)$, qui est forcément[12] de dimension inférieure ou égale à celle de $\dim \operatorname{Im} v$.
Donc $\operatorname{rg}(uv) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.(Être plus petit que deux nombres, c'est être plus petit que leur minimum.)

[12] Une application linéaire ne peut que diminuer la dimension d'un sous-espace, et jamais l'augmenter.

Enfin, considérons la restriction de u à $\operatorname{Im} v$. On a alors, $\operatorname{Im} u_{|\operatorname{Im} v} = \operatorname{Im}(uv)$ et $\operatorname{Ker}(u_{|\operatorname{Im} v}) = \operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u$.
Et donc par le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Im} v = \operatorname{rg}(uv) + \dim(\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u) \geqslant \operatorname{rg}(uv) + \dim \operatorname{Ker} u$$

et donc $\operatorname{rg}(uv) \leqslant \operatorname{rg}(v) - \dim \operatorname{Ker} u \leqslant \operatorname{rg}(v) - n + \operatorname{rg}(u)$.

Plus généralement
Pour tout sev F de E, $\operatorname{Ker}(u_{|F}) = F \cap \operatorname{Ker} u$.

Solution de l'exercice 21.19

Puisque F est le noyau de la forme linéaire trace, c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, qui est donc de dimension $n^2 - 1$.
Nous avons prouvé en cours que pour toute matrice A qui n'est pas dans F, $\operatorname{Vect}(A)$ est un supplémentaire de F.
Reprouvons-le : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice de trace non nulle.
Alors $A \notin F$ et donc $\operatorname{Vect}(A) \cap F = \{0\}$, de sorte qu'on a à la fois $\operatorname{Vect}(A) \cap F = \{0\}$ et $\dim F + \dim \operatorname{Vect}(A) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, de sorte que F et $\operatorname{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Solution de l'exercice 21.20

Notons $n = \dim E$.

1. Puisque $x \notin \operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Vect}(x)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui contient $\operatorname{Ker} \varphi$, mais qui contient aussi x, donc n'est pas égal à $\operatorname{Ker} \varphi$.
Donc il est de dimension strictement supérieure à $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - 1$.
Donc il est de dimension n, et par conséquent égal à E : $E = \operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Vect}(x)$.

Par ailleurs, on a $\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Vect}(x) = n - 1 + 1 = n = \dim E$.

2. On a $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2)$.
Mais puisque H_1 et H_2 sont distincts, et qu'ils sont de même dimension, aucun des deux n'est inclus dans l'autre.
En particulier, il existe $x \in H_2$ qui n'est pas dans H_1. Donc par la question 1, $H_1 \oplus \operatorname{Vect}(x) = E$.
Or $H_1 \oplus \operatorname{Vect}(x) \subset H_1 + H_2$.
Donc $H_1 + H_2 = E$, de dimension n. Et donc $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2$.

Détails
Si l'un était inclus dans l'autre, étant de même dimension, ils seraient égaux.

Solution de l'exercice 21.21

1. Nous savons que les supplémentaires d'un hyperplan H sont les $\operatorname{Vect}(x)$, pour $x \notin H$.
Donc il nous faut ici trouver un vecteur x qui ne soit ni dans F ni dans G.
Puisque F et G ont même dimension, on ne peut avoir $F \subset G$, faute de quoi F et G seraient égaux, ce qui n'est pas le cas.
Donc il existe $u \in F \setminus G$.
De même, $G \not\subset F$, et donc il existe $v \in G \setminus F$.
Considérons alors $x = u + v$. Alors $x \notin F$, car sinon on aurait $v = x - u \in F$ car différence de deux éléments de F.
Et de même, $x \notin G$, donc $x \notin F \cup G$.
Et donc $\operatorname{Vect}(x)$ est un supplémentaire commun à F et G.

2. Nous allons procéder à une récurrence un peu surprenante[13] : une récurrence (descendante) sur la dimension de F.
Nous venons de prouver que si F et G sont des hyperplans de E, alors ils ont un supplémentaire commun.
Notons donc $\mathcal{P}(n)$: «deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension n possèdent un supplémentaire commun.»

[13] Mais vous allez vous habituer !

Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vrai pour $n \geqslant 2$, et prouvons $\mathscr{P}(n-1)$. Soient donc F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$.
Si $F = G$, tout supplémentaire de F fera l'affaire.
Si $F \neq G$, alors comme précédemment, il existe $u \in F \setminus G$, il existe $v \in G \setminus F$ et donc $x = u + v \notin F \cup G$.
Donc $F \oplus \mathrm{Vect}(x)$ est de dimension n, tout comme $G \oplus \mathrm{Vect}(x)$.
Par hypothèse de récurrence, ces deux sous-espaces possèdent donc un supplémentaire commun, notons-le H. Il est alors de dimension

$$\dim E - \dim(F \oplus \mathrm{Vect}(x)) = \dim E - (\dim F + 1) = \dim E - \dim F - 1.$$

Et alors, on a $E = F \oplus (H \mathrm{Vect}(x)) = G \oplus \mathrm{Vect}(x) \oplus H$.
Donc $\mathrm{Vect}(x) \oplus H$ est un supplémentaire de F et de G dans E.
Donc $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, etc.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.22

1. Nous l'avons déjà fait.
Rappelons[14] que multiplier A **à droite** par $E_{i,j}$ donne une matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$, qui est égale à la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.
En particulier, tous ses coefficients diagonaux sont nuls, à l'exception de celui situé à la $j^{\text{ème}}$ colonne, et qui vaut donc $a_{j,i}$.
Donc $\mathrm{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.
Bien entendu ce résultat pouvait s'obtenir à l'aide de la définition du produit matriciel et de la trace, mais c'est à réserver aux amateurs[15] de permutation de sommes et de symboles de Kronecker.

[14] Ça se retrouve avec les mains, ou sur un exemple.

[15] Dont je ne suis pas.

2. Considérons l'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \mathbf{K}) \\ A & \longmapsto & \varphi_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM) \end{array} \right.$.
Il n'est pas très difficile, à l'aide de la linéarité de la trace, de prouver que Φ est linéaire.
Soit donc $A \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, de sorte que φ_A est l'application nulle.
Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varphi_A(E_{i,j}) = \mathrm{tr}(AE_{i,j}) = 0$.
Mais par la question 1, $\mathrm{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.
Et donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = \varphi_A(E_{j,i}) = 0$, de sorte que $A = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$ et donc Φ est injective.
Mais $\dim \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \dim \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \mathbf{K})$, et donc Φ étant injectif, c'est un isomorphisme.
Et donc toute forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ possède un antécédent par Φ, autrement dit, pour toute forme linéaire φ, il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\varphi = \varphi_A$.

Dimensions
Notons qu'ici nous n'avons même pas besoin de connaître la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.22

1. Si $F = G$, alors tout supplémentaire de F fait l'affaire. Si $F \neq G$, alors il existe $u \in F, u \notin G$, et $v \in Gv \notin F$. Alors $u + v \notin F \cup G$.
Donc $\mathrm{Vect}(u+v)$ est un supplémentaire de F et aussi un supplémentaire de G.
2. Prouvons le résultat par récurrence descendante sur $\dim F = n$.
Si $n = \dim E$ ou si $n = \dim E - 1$, le résultat est déjà prouvé.
Supposons que le résultat est vrai pour $n+1$, et soient F, G de dimension n.
Alors si $F = G$, le résultat est évident. Sinon, il existe $u \in F \setminus G$ et $v \in G \setminus F$.
Alors $u + v \notin F \cup G$, et $F \oplus \mathrm{Vect}(u+v)$ et $G \oplus \mathrm{Vect}(u+v)$ sont de dimension $n+1$. Par hypothèse de récurrence, ils admettent donc un supplémentaire commun H.
Alors $H \oplus \mathrm{Vect}(u+v)$ est un supplémentaire commun à F et à G.