TD 22 : Développements limités

► Calcul niveau 1

Exercice 22.1 **Des sommes** F

Calculer les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

1. $\cos(x) - \sin(x)$, $n = 4$
2. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, $n = 3$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x)$, $n = 3$
4. $e^{-x} + \ln(1+x)$, $n = 5$

Exercice 22.2 **Des produits** PD

Calculer les développements limités suivants en 0, à l'ordre n indiqué

1. $\sin(x)\tan(x)$, $n = 3$
2. $\dfrac{e^x}{1-x}$, $n = 3$.
3. $\sin(x)\sqrt{1+x}\ln(1-2x)$, $n = 4$
4. $x^3\sqrt{1+x}$, $n = 5$
5. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, $n = 5$.

Exercice 22.3 **Avec des composées** AD

Calculer les développements limités suivants en 0 à l'ordre n indiqué.

1. $e^{\sin x}$, $n = 4$
2. $\sqrt{1+\sin(x)}$, $n = 3$
3. $\operatorname{Arctan}(e^x)$, $n = 3$.
4. $e^{\sqrt{1+x}}$, $n = 3$.

Exercice 22.4 **Et ailleurs qu'en zéro ?** AD

Calculer les développements limités suivant en a à l'ordre n.

1. e^x, $a = 1$, $n = 4$
2. $\ln(x)$, $a = e$, $n = 3$
3. $\sin(x)$, $a = \frac{\pi}{4}$, $n = 3$.
4. $\operatorname{Arcsin}(x)^2$, $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $n = 2$.
5. $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $a = 1$, $n = 3$.

► Calcul niveau 2

Exercice 22.5 Calculer les développements limités à l'ordre n indiqué, en 0. AD

1. $\ln(3e^x + e^{-x})$, $n = 3$
2. $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$, $n = 5$
3. $(1+x)^{1/x}$, $n = 3$
4. $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arcsin} x}$, $n = 4$
5. $\operatorname{Arcsin}(\sin^2 x)$, $n = 6$
6. $\dfrac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{x\cos x\sqrt{1-\sin x}}$, $n = 2$

Exercice 22.6 **Développement limité de la tangente** AD

1. Justifier que la tangente possède un développement limité à l'ordre 7 en 0.
2. En utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, détermine ce développement limité.
3. Proposer au moins deux autres méthodes pour obtenir le développement limité de la tangente, et les essayer à l'ordre 5.

Exercice 22.7 Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$. D

Exercice 22.8 AD

1. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+t}$. On notera $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ sa partie principale.
2. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X)$.
3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $N^4 = 0$. Déterminer une racine carrée de $I_n + N$, c'est-à-dire une matrice dont le carré est $I_n + N$.

Exercice 22.9 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1 + 2x}{3}$.

1. Prouver que f est bijective sur $\mathbf{R}$.
2. Prouver que f^{-1} possède un développement limité à tout ordre.
3. Déterminer $DL_2(0)(f^{-1})$.

▸ Applications des développements limités

Exercice 22.10 Calculer les les limites suivantes : AD

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2^x}{\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(1)}$.

Exercice 22.11 Montrer que la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. PD

Exercice 22.12 Soit $\Phi : t \mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{e^t - 1} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. PD

On note alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \Phi(t)\, dt$. Montrer que F admet un développement limité d'ordre 3 en 0, que l'on déterminera.

Exercice 22.13 Former un développement asymptotique en 0 de la fonction $x \mapsto (ex)^x$, à la précision $x^2 \ln^2(x)$. PD

Exercice 22.14 Former un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln\left(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, à la précision $\frac{1}{x^6}$.

Exercice 22.15 Sans calculer directement sa dérivée, prouver que $f : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2 - 1}$ admet un point critique en 1. AD
Déterminer la nature locale de ce point critique.

Exercice 22.16 Déterminer les asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ des fonctions f suivantes, et déterminer leur position par rapport à Γ_f. AD

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} \operatorname{Arctan}(x)$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 22

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.1

1. On a $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$, et donc

$$\cos(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

2. On a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right).$$

Et alors, en changeant[1] x en $-x$, on a

$$\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$$

et donc par somme

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 2 - \frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right).$$

[1] C'est de la composition à droite !

3. On a $\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o\left(x^3\right) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$.

Et $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5}{16}x^3 + o\left(x^3\right)$.

Donc par somme, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}x^2 + \frac{113}{48}x^3 + o\left(x^3\right)$.

4. On a $e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$.

Et donc en sommant avec $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$.

Donc

$$e^{-x} + \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + \frac{23x^5}{120} + o\left(x^5\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.2

1. On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right)$ et $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right)$. Et donc

$$\sin(x)\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x + o\left(x^2\right)\right)\left(x + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^3\right).$$

2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ et $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)$.

Donc par produit,

$$\frac{e^x}{1-x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

3. Notons que le développement limité de $\sin(x)$ comme celui de $\ln(1-2x)$ ne contiennent pas de termes constants. Donc il suffit de faire le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2, et les deux autres à l'ordre 3.

$$\sin(x)\ln(1-2x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(-2x^2 - 2x^3 - \frac{8}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right) = -2x^2 - 2x^3 - \frac{7}{3}x^4 + o\left(x^3\right).$$

4. Puisque nous avons déjà un x^3, il suffit de faire le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$.

C'est $1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, de sorte que

$$x^3\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{8} + o(x^5).$$

5. Puisque le premier terme non nul du développement limité de $\ln(1+x)$ est de degré 1, il suffit d'utiliser un $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$ et un $DL_5(0)$ de $\ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)x^5 + o(x^5)\\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \frac{137}{60}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Question subsidiaire *: au vu des calculs précédents, pensez-vous pouvoir exprimer le développement limité à n'importe quel ordre de $\ln(1+x)/(1+x)$ en fonctions des nombres harmoniques $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$?*

Solution de l'exercice 22.3

1. $1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)$.
2. $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)$.
3. Une petite subtilité ici : lorsque $x \to 0$, $e^x \to 1$.
Donc il nous faut un développement limité à l'ordre 3 de l'arctangente au voisinage de 1.
La formule de Taylor-Young, qui s'applique puisque l'arctangente est bien $\mathscr{C}^3$, peut nous fournir ce développement limité, en notant que

$$\operatorname{Arctan}''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ et } \operatorname{Arctan}^{(3)}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Il vient donc

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

Et par composition avec le $DL_3(0)$ de e^x,

$$\operatorname{Arctan}(e^x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3).$$

4. $e^{\sqrt{1+x}} = e \times e^{\sqrt{1+x}-1} \underset{x\to 0}{=} e\left(1 + \dfrac{1}{2}x + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)\right).$

Solution de l'exercice 22.4

1. Notons $h = x - 1$. Alors

$$e^x \underset{x\to 1}{=} e^{h+1} \underset{x\to 1}{=} ee^h \underset{x\to 1}{=} e\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(h^4)\right).$$

2. Notons $h = x - e$. Alors

$$\ln(x) = \ln(e+h) = 1 + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) \underset{x\to e}{=} 1 + \frac{h}{e} - \frac{h^2}{2e^2} + \frac{h^3}{3e^3} + o(h^3).$$

3. Posons $h = x - \dfrac{\pi}{4}$, de sorte que

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin(h) + \cos(h)\right).$$

Puisque $h \to 0$, on a donc, utilisant les DL de sin et cos en 0 :

$$\sin(x) \underset{x\to\pi/4}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + \frac{h^5}{120} + o(h^5)\right).$$

4. Notons $h = x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Alors par la formule de Taylor-Young, on obtient

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 1/\sqrt{2}}{=} \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}h + h^2 + o(h^2).$$

Et donc par produit,

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 1/\sqrt{2}}{=} \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}h + \left(\frac{\pi}{2}+2\right)h^2 + o(h^2).$$

5. Posons $h = x - 1$. Alors

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{x\to 1}{=} h - h^2 + \frac{23}{24}h^3 + o(h^3).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.5

1. Au voisinage de 0, on a

$$3e^x + e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 3 + 3x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 4 + 2x + 2x^2 + \frac{x^3}{6}.$$

Donc $\ln(3e^x + e^{-x}) \underset{x\to 0}{=} \ln(4) + \ln\left(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)$.
En utilisant alors le $DL_3(0)$ de $\ln(1+u)$, on arrive à

$$\ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

2. $\sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)$.
Donc après calculs

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} \frac{|x|}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{8\sqrt{2}}\frac{7}{128\sqrt{2}}x^5 + o(x^5)$$

3. Par définition, $(x+1)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\right)$. Mais

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3).\end{aligned}$$

Méthode
On va jusqu'à l'ordre 4 pour le $\ln(1+x)$, puisque la division par x va nous faire perdre un ordre.

Et donc

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/x} &= e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\\ &= e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)\right).\end{aligned}$$

4. Commençons par noter que nous savons que les fonctions Arcsin et Arctan sont toutes deux équivalentes à x en 0.
Et que donc pour calculer un développement limité du quotient, nous allons commencer par diviser par x pour pouvoir utiliser le DL de $\dfrac{1}{1+u}$.
Donc il va nous falloir des $DL_5(0)$ de Arctan et Arcsin.
Rappelons que le développement limité de Arctan s'obtient en intégrant celui de $\dfrac{1}{1+x^2}$.
Pour avoir Arctan à l'ordre 5, il suffit d'avoir celui de $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 4.
Or, $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)$, et donc

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

Donc en intégrant,

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\operatorname{Arctan}(0)}_{=0} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

De même, on obtient le $DL_5(0)$ de Arcsin en intégrant le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Mais $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ et donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

Et donc

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\operatorname{Arcsin}(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{6} + + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5).$$

Reste alors à calculer le quotient :

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{\operatorname{Arcsin}(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x - \dfrac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}{x + \frac{x^3}{6} + + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \dfrac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)}.\end{aligned}$$

Commençons par calculer le DL de $\dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)}$. La méthode est classique : composer avec le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$.

Il vient donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)} &= 1 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right)^2 \\ &\quad \underbrace{- \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right)^3 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right)^4}_{=o(x^4)} + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{17}{360}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Et donc en multipliant ensuite par $1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{5} + o(x^4)$, on obtient

$$\frac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arcsin}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

> **Remarque**
> Notons que nous sommes en fait en train de calculer le $DL_4(0)$ de $\frac{x}{\operatorname{Arcsin}(x)}$.

> **Remarque**
> Si l'on voit tout de suite que les deux derniers termes ne vont faire apparaître que des degrés supérieurs à 4, il n'est pas utile de les calculer.

5. La question précédente rappelle comment obtenir le développement limité de l'arcsinus.
Avant de nous lancer dans des calculs, remarquons que le terme de plus bas degré de $\sin^2 x$ est de degré 2.
Et donc que pour obtenir un développement limité à l'ordre 6 de $\operatorname{Arcsin}(\sin^2(x))$, il suffit de composer un $DL_3(0)$ de Arcsin avec le $DL_6(0)$ de $\sin^2(x)$.
On a donc $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$, et donc

$$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6).$$

Et $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, de sorte que par composition,

$$\operatorname{Arcsin}(\sin^2(x)) \underset{x\to 0}{=} \sin^2(x) + \frac{1}{6}(\sin^2 x)^3 + \underbrace{o(\sin^3(x))}_{=o(x^6)} \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{19}{90}x^6 + o(x^6).$$

> **Autrement dit**
> Pour $k \geqslant 4$,
> $$(\sin^2 x)^k \underset{x\to 0}{=} o(x^6).$$

6. Commençons par nous intéresser au dénominateur : on a $x\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x$, de sorte que le terme non nul de plus petit degré dans un développement limité de $x\cos(x)\sqrt{1-\sin x}$ sera de degré 1.
Donc pour calculer un développement limité du quotient, il nous faudra commencer par diviser par x pour composer avec le DL de $\frac{1}{1+u}$.
Nous avons donc besoin d'un $DL_3(0)$ du numérateur et du dénominateur.
On a

$$\ln(1+e^x)-\ln(2) = \ln(2+e^x-1)-\ln(2) = \ln\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^3).$$

Puis $x\cos(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{2}+o(x^3)$.
Et donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+e^x)-\ln(2)}{x\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{x^2}{4}+o(x^2).\end{aligned}$$

Détails
On a ici composé avec le DL de $\frac{1}{1-x}$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}} = (1-\sin(x))^{-1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{3}{8}\sin^2(x)+o(\sin^2(x))\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

Et donc enfin, par produit,

$$\frac{\ln(1+e^x)-\ln(2)}{x\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.6

1. La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc possède des développements limités de tout ordre.
Notons dés à présent que la tangente étant impaire, il est inutile de chercher des termes de degré pair.

2. Nous connaissons déjà le terme de degré 1 du DL, c'est x.
Donc notons $\tan x \underset{x\to 0}{=} x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+o(x^7)$ le développement limité cherché.
Alors $1+\tan^2 \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+2a_3x^4+(a_3^2+2a_5)x^6+o(x^6)$.
Mais $\tan' = 1+\tan^2$, donc en intégrant ce développement limité, ce qui fait apparaître la constante $\tan(0)=0$, il vient

$$x+c_3x^3+c_5x^5+c7x^7+o(x^7) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2a_3}{5}x^5+\frac{a_3^2+2a_5}{7}x^7+o(x^7).$$

Par identification des parties régulières, on en vient à

$$c_3 = \frac{1}{3},\ c_5 = \frac{2}{15},\ c_7 = \frac{17}{315}.$$

3. Une autre option serait de noter que $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$.
Or, $\frac{1}{\cos^2 x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2}$.
Or un calcul nous donne $\frac{1}{\cos^2(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$.

Ne reste alors qu'à intégrer.

Enfin, une dernière méthode est de revenir à la définition, en posant $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, et en calculant un développement limité de ce quotient.
Lorsque vous avez le choix, vous privilégierez la première des trois méthodes.

Solution de l'exercice 22.7

Il faut être assez soigneux sur les ordres.
On a $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right)$.
Donc $\dfrac{\tan x}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{63} + \dfrac{2}{15}x^4 + o\left(x^5\right)$.
Donc $\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{63} + \frac{2}{15}x^4 + o\left(x^5\right)\right)$.
Posons alors $u = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + o(x^5)$, de sorte que

$$u^2 = \frac{x^4}{9} + o(x^5),\ u^3 = u^4 = u^5 = o(x^5).$$

Et donc $\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{7}{90}x^4 + o(x^5)$.
Donc $\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{90}x^2 + o\left(x^3\right)$.
En composant par l'exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)\right) \underset{x\to 0}{=} e^{1/3}e^{\frac{7}{90}x^2+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} e^{1/3}\left(1 + \frac{7}{90}x^2 + o(x^3)\right).$$

Solution de l'exercice 22.8

1. C'est du cours, c'est $(1+t)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$.
   On a donc $\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3 + o(t^3)$.
2. Remarquons que $P = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)^2$ est un polynôme[2]
   Notons alors $P = X^4Q + R$ sa division euclidienne par X^4.
   En pratique, R est la troncature à l'ordre 3 de P : on n'a gardé que les termes de degré inférieur ou égal à 3.
   Alors, au voisinage de 0, $t^4Q(t)$ est équivalent à son terme de plus bas degré, qui est de degré supérieur ou égal à 4, et donc est négligeable devant t^3.

   D'autre part, par produit de développements limités, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $1+t$ est le carré de celui de $\sqrt{1+t}$, c'est-à-dire R.
   Donc $1 + t \underset{t\to 0}{=} R(t) + o(t^3)$ est le $DL_3(0)$ de $1+t$.
   Mais par ailleurs, on a évidemment $1 + t \underset{t\to 0}{=} 1 + t + o(t^3)$.
   Donc par unicité du développement limité, $R(t) = 1 + t$, et donc $1 + X = R(X) = (a - 0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)^2 - X^4Q(X)$.
3. Par la question précédente, on a

$$I_n + N = (a_0I_n + a_1N + a_2N^2 + a_3N^3)^2 + \underbrace{N^4}_{=0}Q(N) = (a_0I_n + a_1N + a_2N^2 + a_3N^3)^2.$$

   Et donc une racine carrée de $I_n + N$ est $a_0I_n + a_1N + a_2N^2 + a_3N^3$.

[2] De degré 6 mais peu importe.

Solution de l'exercice 22.9

1. Théorème de la bijection.
2. Puisque f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, et que sa dérivée ne s'y annule pas, f^{-1} est aussi une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
3. Puisque f^{-1} possède un développement limité d'ordre 2, notons-le $f(x) = c+bx+ax^2+o(x)$.
   Alors, puisque $f(0) = 0$, on a aussi $f^{-1}(0) = 0$, et donc $c = 0$.

il reste donc $f^{-1}(x) = bx + cx^2 + o(x^2)$.
Par ailleurs, le développement limité de f en 0 est

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Or, on a $x = f^{-1}(f(x))$, et donc

$$x \underset{x\to 0}{=} bf(x) + cf(x)^2 + o(f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} bx + \left(c + \frac{b}{6}\right)x^2 + o(x^2).$$

Par unicité du DL de x, on a donc $b = 1$ et $\frac{b}{6} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{6}$.
Et donc le $DL_2(0)$ de f^{-1} est $f^{-1}(x) = x - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.10

1. On a $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} = \exp\left(\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$.
Un développement limité à l'ordre 2 des termes dans la parenthèse nous donne

$$\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{3} + o(1).$$

Et donc par composition par l'exponentielle, la limite cherchée est $e^{-1/3}$.

⚠ Attention !
Il n'est pas nécessaire ici de faire un développement limité de l'exponentielle.

2. On a $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x} = \exp\left[x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - x\right)$.
On $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
Donc $x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - x \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{2x} + o(x)$.
On en déduit que $x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x} = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.11

On souhaite utiliser le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, puisque f est déjà $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Pour cela, il nous faut prouver que f et f' possède une limite[3] en 0.
On a

$$f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc déjà f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
De même, on a, pour $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{x^2\cos x - \sin x}{x^2\sin^2 x}.$$

Le dénominateur est équivalent à x^4 en 0, et un développement limité du numérateur prouve qu'il est équivalent à $-\frac{x^4}{6}$.
Et donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{6}$, de sorte que le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ s'applique, et le prolongement par continuité de f en 0 possède une dérivée en 0 qui vaut $-\frac{1}{6}$.

[3] À droite.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.12

On a $\Phi(t) \underset{t\to 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$.
Notons au passage qu'on prouve ainsi que Φ est continue en 0, et donc possède bien au moins une primitive sur $\mathbf{R}_+$.
Et alors, par intégration de développements limités[4] :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

[4] La constant d'intégration est ici nulle puisque nous cherchons la primitive qui s'annule en 0.

Solution de l'exercice 22.13

Souvenons nous que $(ex)^x = e^x e^{x\ln(x)}$.
Mais lorsque $x \to 0$, $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $e^{x\ln(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x\ln(x) + \dfrac{x^2\ln^2(x)}{2} + o\left(x^2\ln^2(x)\right)$.

Puisque d'autre part, $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, il vient, par produit

$$\begin{aligned}(ex)^x &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + x\ln(x) + \frac{x^2\ln^2(x)}{2} + o(x^2\ln^2(x))\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x\ln(x) + x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{1}{2}x^3\ln^2(x) + \frac{1}{4}x^4\ln^2(x) + o(x^2)}_{=o(x^2\ln^2(x))}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x\ln(x) + x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + o(x^2\ln^2(x)).\end{aligned}$$

Rédaction
Une bonne habitude dans les développements asymptotiques est, comme dans les développements limités, d'ordonner les termes de sorte que chacun soit négligeable devant le précédent.

Solution de l'exercice 22.14

Il s'agit de remarquer que $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et d'utiliser alors le développement limité de la tangente en 0 (voir l'exercice 6) :

$$\tan\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + \frac{2}{15}\frac{1}{x^5} + \frac{17}{315}\frac{1}{x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right).$$

Il s'agit ensuite de multiplier par x puis de composer avec le développement limité à l'ordre 6 de $\ln(1+x)$.

$$\ln\left(x\tan\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{3x^2} + \frac{7}{90x^4} + \frac{62}{2835x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

Solution de l'exercice 22.15

Notons $f : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.
Alors f n'est pas définie en 1, mais nous allons voir qu'elle est prolongeable en une fonction dérivable.
Posons $h = x - 1$ de sorte que

$$\frac{x\ln(x)}{x^2-1} = \frac{(h+1)\ln(1+h)}{h(h+2)}.$$

Après calculs, on arrive à $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{12}h^2 + o(h^2)$.

En particulier, f admet une limite, égale à $\dfrac{1}{2}$ en 1, donc est prolongeable en une fonction continue.

Et alors $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} \underset{x\to 1}{=} o(x-1) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, donc f (ou plutôt son prolongement) est dérivable en 1, avec une dérivée nulle en 1.
Donc f possède bien un point critique en 1.

Puisque de plus on a $f(x) - f(1) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{12}(x-1)^2$, et que cette dernière quantité reste négative, on a, au voisinage de 1,

$$f(x) - f(1) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(1)$$

et donc f possède un maximum local en 1.

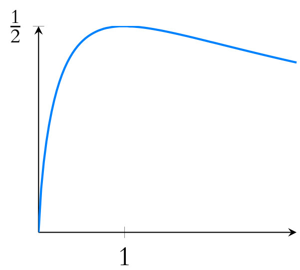

Figure 22.1– La fonction f.

Solution de l'exercice 22.16

1.

2. On a $\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}$, et donc au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{x^2}{x+1} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - 1\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par ailleurs, on a $\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$, de sorte qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Et par produit, il vient donc

$$\frac{x^2}{x+1} \operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

En particulier, on en déduit que $\frac{x^2}{x+1} \operatorname{Arctan}(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
Et d'autre part, $\frac{x^2}{x+1} \operatorname{Arctan}(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\frac{1}{x}$ est du signe, au voisinage de $+\infty$ de x, et donc Γ_f est située au dessus de son asymptote.