# TD 23 : Dénombrement

## ► Cardinal, injections, surjections

**Exercice 23.1** Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Prouver que s'il existe une injection $E \to F$, alors il existe une surjection $F \to E$. PD

**Exercice 23.2** Prouver par récurrence sur $n \geqslant 2$ la formule du crible : si $A_1, \dots, A_n$ sont $n$ parties finies d'un ensemble $E$, alors D

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

($\star$) **Application** : on note $D_n$ l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans points fixes. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$. En appliquant la formule du crible astucieusement, prouver que $\mathrm{Card}\, D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

**Exercice 23.3** Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels de l'intervalle $[0, 1[$. Prouver qu'il en existe deux qui sont à distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre. F

**Exercice 23.4 Dénombrement par construction d'une bijection** D
Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. On souhaite déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. Notons $\mathscr{C} = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$.

Pour $(A, B) \in \mathscr{C}$, on note $\chi_{A,B}$ la fonction définie sur $E$ par $\chi_{A,B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \in A \end{cases}$.

Montrer que $\chi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \{0, 1, 2\}^E \\ (A, B) & \longmapsto & \chi_{A,B} \end{array} \right.$ est bijective, et conclure.

## ► Dénombrement

**Exercice 23.5** Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot MPSI ? De 8 lettres ? De 9 lettres ? PD

**Exercice 23.6** Lors de son inscription à un site de commerce en ligne, un utilisateur se voit demander un mot de passe contenant 6 à 8 caractères, un tel mot de passe étant formé de lettres majuscules et de chiffres, et contenant au moins une lettre. Combien de mots de passe sont-ils possibles ? PD

**Exercice 23.7** Combien de relations d'ordre total existe-t-il sur un ensemble à $n$ éléments ? PD

**Exercice 23.8** Déterminer le nombre d'anagrammes (=mot obtenu par permutation des lettres) des mots suivants : COVID, CONFINE, CORONAVIRUS, CONFINEMENT. PD

**Exercice 23.9** Soient $p \leqslant n$ deux entiers naturels non nuls. Combien existe-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ qui contiennent : PD

1. un seul élément de $[\![1, p]\!]$ ?
2. au moins un élément de $[\![1, p]\!]$ ?

**Exercice 23.10** On considère les entiers de 4 chiffres (en base 10), sous la forme $abcd$. On dit qu'un entier $abcd$ a ses chiffres croissants si $a < b < c < d$. Par exemple, 1259 a ses chiffres croissants, pas 1065. D
Quel est le nombre d'entiers de 4 chiffres dont les chiffres vont en croissant ?

**Exercice 23.11** Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. Déterminer le nombre de couples $(A, B)$ de parties de $E$ telles que $A \cup B = E$. AD

**Exercice 23.12** Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$ ? De $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 3]\!]$ ? De $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ ?

**Exercice 23.13** Combien y a-t-il de manières de partitionner l'ensemble des 48 élèves de la MPSI2 en 16 trinômes de colle ? AD

**Exercice 23.14** D

1. Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

2. (a) Soit $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ croissante. Montrer que la fonction $g : k \mapsto f(k)+k-1$ est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+p-1]\!]$.
   (b) Soit $g : [\![1,p]\!] \to [\![n+p-1]\!]$ strictement croissante. Montrer que $f : k \mapsto g(k)-k+1$ est croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
   (c) En déduire le nombre de fonctions croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

**Exercice 23.15 Formule de Vandermonde** AD

Soient $(m,r,n) \in \mathbf{N}^3$. À l'aide d'arguments combinatoires, prouver la formule suivante (déjà prouvée par d'autres moyens dans le TD17) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}$.

**Exercice 23.16 Le poker** PD

Au poker, combien y a-t-il de mains contenant :

1. une quinte flush (cinq cartes consécutives de même couleur) ?
2. une couleur (5 cartes de même couleur, qui ne forment pas une quinte flush) ?
3. exactement trois trèfles ?
4. exactement un as et deux cœurs ?

**Exercice 23.17 (Banque CCP 113)** AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $E$ un ensemble de cardinal $n$.

1. Déterminer le nombre $a$ de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre $b$ de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre $c$ de triplets $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que $A, B$ et $C$ soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

**Exercice 23.18 (Oral X)** TD

Montrer qu'un ensemble $E$ est infini si et seulement si pour toute application $f : E \to E$, il existe $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ telle que $f(A) \subset A$.

# CORRECTION DES EXERCICES DU TD 23

## SOLUTION DE L'EXERCICE 23.1

Notons $f : E \to F$ une injection.
Si $f$ est surjective, alors elle est bijective, et $f^{-1} : F \to E$ est surjective[1].
Sinon, fixons $a \in E$, et définissons une application $g : F \to E$ de la manière suivante : pour $y \in F$, on pose

- $g(y)$ est l'unique antécédent de $y$ par $f$ si $y \in \operatorname{Im} f$
- $g(y) = a$ si $y \notin \operatorname{Im} f$.

Alors il est aisé de constater que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, et donc en particulier que $g$ est surjective.

[1] Car bijective.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 23.2

Pour $n = 2$, c'est une formule du cours[2].
Supposons donc que la formule soit vraie pour $n$ parties, et soient $A_1, \dots, A_{n+1}$ des parties finies de $E$. Alors

[2] Et nous l'avons même prouvé pour $n = 3$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}) &= \operatorname{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) + \operatorname{Card}(A_{n+1}) - \operatorname{Card}\left((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(1_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \operatorname{Card}(A_{n+1}) - \operatorname{Card}\left((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(1_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \operatorname{Card}(A_{n+1})\\
&- \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_\ell \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell} \cap A_{n+1})\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(1_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \operatorname{Card}(A_{n+1})\\
&- \sum_{\ell=2}^{n+1} (-1)^{\ell} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_\ell \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell} \cap A_{n+1})\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(1_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})\\
&+ \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_\ell \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_\ell} \cap A_{n+1})
\end{aligned}$$

C'est encore l'hypothèse de récurrence.

Le terme correspondant à $\ell = 1$ était juste $\operatorname{Card}(A_{n+1})$.

Il faut alors remarquer que dans la première somme (celle sur $k$), se trouvent tous les termes avec des intersections de $k$ des $A_1, \dots, A_{n+1}$, toutes distinctes de $A_{n+1}$.
Et dans la seconde somme se trouvent toutes les intersection de $A_{n+1}$ avec l'intersection de $k$ autres des $A_i$, donc toutes les intersections de $k$ des $A_i$, contenant $A_{n+1}$.
Donc ces deux sommes peuvent se regrouper en une seule :

**Remarque**
Si elles sont toutes distinctes de $A_{n+1}$, il ne peut y en avoir que $n$ au maximum.

$$\operatorname{Card}(A_1, \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n+1} \operatorname{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}).$$

Par le principe de récurrence, etc.

Dans le cas qui nous intéresse, remarquons que $D_n = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$.

Mais, par la formule du crible,

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Il s'agit alors de voir que la somme intérieure, à $k$ fixé, contient $\binom{n}{k}$ termes.

Et que l'intersection de $k$ des $A_i$ est formée par les permutations qui fixent $k$ points donnés

de $[\![1,n]\!]$. Elle sont au même nombre que les permutations de $n-k$ nombres restants, de sorte que pour $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$, $\mathrm{Card}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=(n-k)!$.
Et donc

$$\mathrm{Card}\,\overline{D_n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!}.$$

## Solution de l'exercice 23.3

Il s'agit de noter que $[0,1[$ se partitionne en $\left[0,\frac{1}{n}\right[\cup\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right[\cup\cdots\cup\left[\frac{n-1}{n},1\right[$.
Ce qui nous fait $n$ ensembles. Donc des $n+1$ nombres $x_0,x_1,\dots,x_n$, il 'en trouve au moins deux dans le même intervalle $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[$, qui sont donc nécessairement à distance inférieure stricte à $\frac{1}{n}$.

**Remarque** Notons que si on remplace $[0,1[$ par $[0,1]$, on est obligés de supprimer «strictement» dans la conclusion. Voyez-vous pourquoi ?

## Solution de l'exercice 23.4

Soit $\psi\in\{0,1,2\}^E$. Posons alors $A=\psi^{-1}(\{2\})$ et $B=\overline{\psi^{-1}(\{0\})}$.
On a bien $A\subset B$ puisque $2\neq 0$.
Et il est clair que $\chi((A,B))=\psi$, donc $\chi$ est surjective.
D'autre part, si $\chi(A,B)=\chi((A',B'))$, alors pour tout $x\in E$,

$$x\in A\Leftrightarrow\chi((A,B))(x)=2\Leftrightarrow\chi((A',B'))(x)=2\Leftrightarrow x\in A'.$$

Donc $A=A'$. Puis $B=\overline{\chi((A,B))^{-1}(\{0\})}=B'$.
Donc $\chi$ est injective, et par conséquent bijective.
Puisque $\{0,1,2\}^E$ est de cardinal $3^n$, il en est donc de même de $\mathscr{C}$.

**Remarque** Ce résultat est prouvé de manière plus agréable dans l'exercice 18.

## Solution de l'exercice 23.5

Choisir un tel mot nécessite de choisir :

- la position du M débutant MPSI, qui peut être entre la première et la quatrième lettre. Il y a donc 4 choix possibles.
- les 2 lettres qui ne forment pas MPSI. Il y a donc $26^3$ choix possibles.

Soit un total de $4\times 26^3$ mots de 7 lettres contenant MPSI.

Dans le cas de mots de 8 lettres, le principe est le même, si ce n'est qu'un mot a été compté deux fois : il s'agit du mot MPSIMPSI.
Donc il y a en tout $5\times 26^4-1$ mots de 8 lettres contenant MPSI.

**Détails** En effet, nous l'avons compté à la fois comme un mot commençant par MPSI et comme un mot finissant par MPSI.

Enfin, pour les mots de 9 lettres, la situation est pire, puisqu'il y a de nombreux mots qui ont été comptés deux fois : tous ceux de la forme MPSI⋆MPSI, ⋆MPSIMPSI ou MPSIMPSI⋆.
Soit un total de $6\times 26^5-3\times 26$ mots de 9 lettres contenant MPSI.

## Solution de l'exercice 23.6

Il y a donc $26+10=36$ caractères autorisés, donc $36^6+36^7+36^8$ combinaisons possibles.
Auxquelles il faut retrancher les mots de passe formés uniquement de chiffres, qui sont au nombre de $10^6+10^7+10^8$.
Donc le nombre total de mots de passe possibles est

$$36^6+36^7+36^8-10^6-10^7-10^8.$$

**Ordre de grandeur** C'est environ 200 milliards.

## Solution de l'exercice 23.7

Choisir une relation d'ordre totale sur un ensemble $E$ à $n$ éléments, c'est se donner un $n$-arrangement de $E$, à savoir le seul $n$-uplet d'éléments de $E$ dont les éléments sont deux à deux distincts et rangés par ordre croissant.
Mais un tel $n$-arrangement est en fait une permutation de $E$, et il y en a $n!$.

## Solution de l'exercice 23.8

1. Toutes les permutations des 5 lettres de COVID sont distinctes, et elles sont au nombre de $5!=120$, dont il y a 120 anagrammes à COVID.
2. Cette fois, le mot de départ contient deux fois la même lettre (le N).
Pour bien les différencier, notons les $\mathrm{N}_1$ et $\mathrm{N}_2$, de sorte que le terme de départ est $\mathrm{CON_1FIN_2E}$.
Si on compte juste le nombre de permutations des lettres, nous allons compter comme

deux mots différents les termes $N_1$FIECO$N_2$ et $N_2$FIECO$N_1$, alors qu'il s'agit du même mot.
Et en réalité, nous allons tous les compter deux fois, donc il y a en tout $\frac{7!}{2}$ anagrammes distincts.

**3.** Même chose ici, sauf que deux lettres apparaissent deux fois. Donc il y a 2 permutations possibles des deux O et pour chaque permutation des deux NO, il y a deux permutations possibles des deux R. Soit en tout 4 permutations possibles.
Donc il y a $\frac{11!}{4}$ anagrammes.

**4.** Même principe : il y a $3! = 6$ permutations possibles des trois E, et deux permutations des deux R, soit un total de $\frac{11!}{6\times 2}$ anagrammes.

## Solution de l'exercice 23.9

**1.** Choisir une telle partie, c'est choisir un élément de $[\![1,p]\!]$, et lui adjoindre une partie de $[\![p+1,n]\!]$.
Mais il y a $2^{n-p}$ telles parties, soit un total de $p2^{n-p}$ parties possibles.

**2.** Plutôt que de dénombrer les parties contenant un seul élément de $[\![1,p]\!]$, celles en contenant 2, etc, intéressons nous au complémentaire : combien y a-t-il de parties de $[\![1,n]\!]$ ne contenant aucun élément de $[\![1,p]\!]$ ?
Il y en a autant que de parties de $[\![p+1,n]\!]$, soit $2^{n-p}$.
Et donc il y a $2^n - 2^{n-p}$ parties de $[\![1,n]\!]$ contenant au moins un élément de $[\![1,p]\!]$.

## Solution de l'exercice 23.10

Étant donné une partie de 4 éléments distincts de $[\![0,9]\!]$, il existe une et une seule manière de les ordonner pour en faire un nombre ayant ses chiffres croissants. Donc le nombre cherché est le nombre de parties à 4 éléments de $[\![0,9]\!]$ : c'est $\binom{10}{4}$.

## Solution de l'exercice 23.11

Il y a $2^n$ choix pour $A$. Une fois $A$ choisie, il faut choisir une partie $B$ telle que $A\cup B = E$.
Soit encore telle que $\overline{A}\subset B$.
On a alors $B = (A\cap B)\cup\overline{A}$, et donc il s'agit de choisir la partie $A\cap B$.
Mais il y a $2^{\text{Card}(A)}$ manières de choisir $A\cap B$, qui peut donc être n'importe quelle partie de $A$.
En distinguant suivant le cardinal $k$ de $A$, il vient $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$, où $\binom{n}{k}$ est le nombre de manières de choisir $A$, et $2^k$ le nombre de manières de choisir $B$ une fois $A$ choisi.
Soit en tout $(2+1)^n = 3^n$ choix possibles.

**Autrement dit**
Une telle partie $B$ doit contenir $\overline{A}$, plus éventuellement des éléments de $A$.

## Solution de l'exercice 23.12

**1.** En tout, il y a $2^n$ applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$.
Parmi celle-ci, seules deux ne sont pas surjectives : les deux applications constantes.
Donc il y a $2^n - 2$ surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$.

**2.** Cette fois, il y a $3^n$ applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$.
Les trois fonctions constantes ne sont évidemment pas surjectives.
Les autres applications non surjectives sont celles dont l'image vaut $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ ou $\{2,3\}$.
Mais comme à la question 1, dans chacun des trois cas, il y a $2^n-2$ telles applications.
Donc le nombre de surjections cherché est $3^n - 3 - 3(2^n-2) = 3^n - 3\times 2^n + 3$.

**3.** Notons que si $\varphi$ est une surjection de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$, alors l'un des éléments de $[\![1,n]\!]$ aura deux antécédents, quand tous les autres n'en auront qu'un seul.
Donc pour choisir une telle surjection, il faut choisir l'élément $a$ de $[\![1,n]\!]$ qui aura deux antécédents, puis choisir ces 2 antécédents $b$ et $c$. Et enfin, choisir une bijection de $[\![1,n+1]\!]\setminus\{b,c\}$ sur $[\![1,n]\!]\setminus\{a\}$, et il y a $(n-1)!$ telles bijections.
Soit un total de $n\times\binom{n+1}{2}\times(n-1)! = \frac{n}{2}(n+1)!$ telles surjections.

**Remarque**
Le plus délicat dans ce genre d'exercice est souvent de s'assurer qu'on n'a pas compté deux fois le même élément.

## Solution de l'exercice 23.13

Il y a $\binom{48}{3}$ manières de choisir un premier trinôme. Une fois celui-ci choisi, il y a $\binom{45}{3}$ manières de choisir un second trinôme, disjoint du précédent, etc, et il n'y a qu'une façon

de choisir le 16ème trinôme.
Mais l'ordre de nos groupes n'a pas d'importance. Autrement dit, on a compté 16! fois chaque possibilité.
Donc il y a en tout :

$$\binom{48}{3}\binom{45}{3}\cdots\binom{6}{3}\binom{3}{3}\frac{1}{16!} = \frac{48!}{6^{16}16!}$$

partitions possibles. C'est de l'ordre de $2\times 10^{35}$.

## Solution de l'exercice 23.14

Rappelons à toutes fins utiles qu'une application strictement croissante est toujours injective.

**1.** Pour choisir une fonction strictement croissante, il suffit de choisir les $p$ images des éléments de $[\![1,p]\!]$, nécessairement toutes différentes. Une fois choisies, il n'y a pas de choix sur l'ordre : la plus petite est l'image de 1, la suivante l'image de 2, etc, la plus grand est l'image de $p$.

Donc le nombre d'applications strictement croissantes est $\binom{n}{p}$, le nombre de parties à $p$ éléments de $[\![1,n]\!]$.

**2.a.** Soient $k < k'$ deux éléments de $[\![1,p]\!]$. Alors

$$g(k) = f(k)+k-1 \leqslant f(k')+k-1 < f(k')+k'-1 = g(k').$$

Donc $g$ est strictement croissante.
Elle est bien à valeurs dans $[\![1,n+p-1$ car $f(k)\leqslant n$ et $k-1\leqslant p-1$.

**2.b.** Si $k<k'$, alors $f(k')-f(k) = g(k')-g(k)-(k'-k)$.
Mais pour $g$ strictement croissante, il est facile de prouver que $g(k')-g(k)\geqslant k'-k$.
En effet, entre $g(k)$ et $g(k')$ doivent se trouver les entiers distincts $g(k+1), g(k+2),\dots,g(k'-1)$.
Et donc $f(k')-f(k)\geqslant 0 \Leftrightarrow f(k)\leqslant f(k')$ : $f$ est croissante.

**2.c.** Les deux applications ci-dessus sont des bijection réciproques l'une de l'autre, entre l'ensemble des applications croissantes $[\![1,p]\!]\to[\![1,n+p-1]\!]$ et l'ensemble des applications strictement croissantes $[\![1,p]\!]\to[\![1,n]\!]$.
Et donc, d'après la question 1, le nombre de fonctions croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est $\binom{n+p-1}{p}$.

## Solution de l'exercice 23.15

Donnons nous un ensemble $E$ à $n+m$ éléments, partitionné en deux ensembles disjoints $A$ et $B$ de cardinaux respectifs $n$ et $m$.

Alors le nombre de parties de $E$ à $r$ éléments est $\binom{n+m}{r}$.

Mais une partie de $E$ de cardinal $r$ contient un certain nombre $k$ d'éléments de $B$, avec $0\leqslant k\leqslant r$.
Et donc elle contient alors $r-k$ éléments de $A$.
À $k$ fixé, il y a $\binom{m}{k}$ parties de $B$ à $k$ éléments, et pour chaque choix d'une telle partie, il y a $\binom{n}{r-k}$ choix possibles d'une partie de $A$ à $r-k$ éléments.

Et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$ est le nombre total de parties à $r$ éléments de $E$, c'est-à-dire $\binom{n+m}{r}$.

## Solution de l'exercice 23.16

**1.** Par couleur, il y a 4 quintes flush possibles. Soit un total de 16 quintes flush.

**2.** Il y a $4\times\binom{8}{5} = 224$ mains d'une seule couleur possible. Auxquelles il faut retrancher les 16 quintes flush, pour un total de 208 couleurs possibles.

**3.** Il y a $\binom{8}{3}$ façons de choisir les trois trèfles, et pour chacune de ces manières, il y a $\binom{24}{2}$ façons de choisir les cartes restantes.

Soit un total de $\binom{8}{3}\binom{24}{2} = 15\,456$ mains contenant trois trèfles.

**4.** Il y a deux types de mains satisfaisant à la contrainte : celles qui contiennent l'as de cœur et celles qui contiennent un autre as.
Les premières sont donc formées de l'as de cœur, d'un autre cœur (il y en a 7) et de trois cartes qui ne sont ni des as ni des cœurs (donc parmi 21 cartes). Les secondes sont formées de deux cœurs qui ne sont pas l'as, d'un as parmi les trois as autres que le cœur et de deux cartes qui ne sont ni des cœurs ni des as.
Soit un total de $7 \times \binom{21}{3} + \binom{7}{2} \times 3 \binom{21}{2} = 22\,540$ mains.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 23.17

**1.** Une fois $B$ choisie, de cardinal $k$, il y a $2^k$ manières de choisir $A$.
Et donc $a = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$.

**2.** Une fois $B$ choisie de cardinal $k$, il faut prendre pour $A$ une partie de $\overline{B}$, qui est de cardinal $n-k$. Et il y a $2^{n-k}$ telles parties.
Donc $b = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$.
***Remarque*** *: en réalité, si on note $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des couples de parties satisfaisant la condition de la question 1 et $\mathscr{C}_2$ l'ensemble des couples satisfaisant la seconde, alors on a une bijection entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, qui est donnée par*

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_1 & \longrightarrow & \mathscr{C}_2 \\ (A, B) & \longmapsto & (A, \overline{B}) \end{array} \right.$$

*et donc $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont nécessairement le même cardinal.*

**3.** Une fois choisi un couple $(A, B)$ de parties de $E$ disjointes, il n'y a qu'une partie $C$ de $\mathscr{P}(E)$ qui convienne : c'est $C = \overline{A \cup B}$.
Donc $c = b \times 1 = b = 3^n$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 23.18

Supposons $E$ infini et soit $f : E \to E$.
Soit alors $x \in E$, et considérons les images de $x$ par les puissances de $f$ : $x, f(x), \dots, f^n(x), \dots$.
S'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n(x) = x$, alors $A = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ convient[3].
Et sinon, $\{f^n(x),\ n \in \mathbf{N}^*\}$ convient.

[3] Cette partie étant finie, elle ne peut valoir $E$ tout entier.

Dans l'autre sens, prouvons plutôt la contraposée, en prouvant que pour tout ensemble fini $E$, il existe une application $f : E \to E$ qui ne satisfait pas la propriété requise.
Si $E$ est vide, il n'y a rien à dire[4].
Si $E$ est de cardinal 1, il n'y a pas de parties de $E$ distincte de $\emptyset$ et de $E$.
Si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ est de cardinal $n$. Soit alors $f : E \to E$ définie par

$$f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_3, \dots, f(x_{n-1}) = x_n,\ f(x_n) = x_1.$$

Alors on prouve aisément que pour toute partie non vide $A$, $f(A) = E$, et donc qu'on ne peut avoir la propriété souhaitée.

[4] Car il n'y a pas d'application de $E$ dans $E$.