

TD 4 : CALCULS ALGÈBRIQUES

► Sommes et produits

EXERCICE 4.1 Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n \frac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}} \quad 2. \sum_{i=0}^n i(i-1) \quad 3. \sum_{k=0}^n (2k+1) \quad 4. \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad 5. \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{3k}$$

où $x \in \mathbf{R}$

F

EXERCICE 4.2 Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

F

EXERCICE 4.3 Calculer les produits suivants :

$$1. \prod_{k=1}^n 2k^2 \quad 3. \prod_{k=0}^n \exp(2^k) \quad 5. \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$$

$$2. \prod_{i=1}^n (4i^2 - 1) \quad 4. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad (n \geq 2) \quad 6. \prod_{k=1}^n (-3)^{k^2-k}$$

F

EXERCICE 4.4 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$. Pour quelle(s) valeur(s) de n est-ce une inégalité stricte ?

F

EXERCICE 4.5 Soit q un réel fixé.

- Montrer que $\sum_{k=0}^n kq^k = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} q^k$.
- En procédant à une interversion de sommes, calculer $\sum_{k=0}^n kq^k$.

PD

EXERCICE 4.6 Sommes doubles

Calculer les quantités suivantes :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (i+j) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i,j) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n |i-j| \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |i-j| \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i2^j \quad \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \frac{k\ell}{n(n-1)}$$

PD

EXERCICE 4.7 Des produits semblables, mais différents !

On considère les produits suivants

$$A = \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij, \quad B = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq j}} ij, \quad C = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij, \quad D = \prod_{1 \leq j < i \leq n} ij, \quad E = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij.$$

Calculer A . En déduire B . Exprimer B en fonction de C et D . En déduire C , puis D et E .

AD

EXERCICE 4.8 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^3$.

AD

En déduire une expression de $\sum_{i=1}^n (-1)^i i^3$ en fonction de n . On pourra distinguer deux cas suivant la parité de n .

EXERCICE 4.9 Soit $x, y \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Simplifier les sommes $C_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(x+ky)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(x+ky)$.

AD

EXERCICE 4.10 En remarquant que $k = (k+1) - 1$, calculer $\sum_{k=0}^n kk!$ et $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

PD

EXERCICE 4.11

- Montrer qu'il existe deux réels a et b , que l'on déterminera, tels que $\forall x > 1, \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$.
- En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$.

PD

► Coefficients binomiaux et formule du binôme

EXERCICE 4.12

1. En dérivant de deux manières la fonction $x \mapsto (1+x)^k$, déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
2. Sur le même principe, calculer les valeurs de $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

AD

EXERCICE 4.13 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$. En déduire $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}$.

AD

EXERCICE 4.14 Calculer $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{i}{j}$.

PD

EXERCICE 4.15 On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

AD

1. Donner deux preuves de cette formule : l'une par récurrence, l'autre en calculant de deux manières $\sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4)$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n ij$.

EXERCICE 4.16 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^n + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

D

À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

EXERCICE 4.17 Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

D

EXERCICE 4.18 Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{n+1}{i} \right]$.

TD

► Systèmes linéaires

EXERCICE 4.19 Résoudre $\begin{cases} 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \\ x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ -2x + 4y + 4z - 5t = 3 \\ 6x - 12y - 12z + 16t = 4 \end{cases}, \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = -1 \end{cases}, \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y - 4z = 3 \end{cases}$

F

EXERCICE 4.20 Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues complexes :

F

$$\begin{cases} -5x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x - y - 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - (3+i)y - (9+3i)z = 5-3i \\ 2x - 2y - 6z = 2-2i \\ 4x - (2+2i)y - (6+6i)z = 6-2i \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 4.21 Des systèmes à paramètres

AD

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues réelles. On pourra si besoin distinguer plusieurs cas suivant la valeur de $m \in \mathbf{R}$.

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 4.22 Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbf{R}$ le nombre de solutions du système

AD

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 4

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.1

1. Notons que $\frac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}} = \frac{2 \cdot (2^2)^k}{3^{-1} \cdot (3^2)^k} = 6 \left(\frac{4}{9}\right)^k$.

Et donc en utilisant la formule pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique¹

¹ Ici de raison $\frac{4}{9} \neq 1$.

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}} = 6 \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k = 6 \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{54}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right).$$

2. On a $i(i-1) = i^2 - i$ et donc

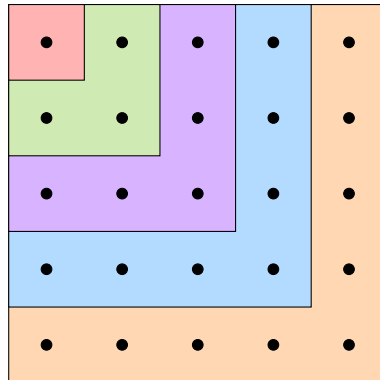
$$\sum_{i=0}^n i(i-1) = \sum_{i=0}^n i^2 - \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

3. Par linéarité de la somme, on a

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2.$$

Interprétation géométrique : notons que la somme calculée n'est autre que $1+3+5+\dots+(2n+1)$, la somme des $(n+1)$ premiers entiers impairs.

Le dessin ci-dessous (dans le cas $n=4$) devrait vous convaincre du résultat.



⚠ Attention !

Entre 0 et n , il y a $n+1$ nombres, et non n .

Et donc $\sum_{k=0}^n 1 = (n+1)$.

4. Il s'agit de noter que $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$.

Et donc nous sommes en présence d'une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

5. C'est directement la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{3k} = \sum_{k=0}^n (-x^3)^k 1^{n-k} = (1 - x^3)^n.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.2

Notons $P = \prod_{k=0}^n (2k+1)$, et notons que P est le produit de tous les entiers impairs de 1 à

$2n+1$.

Or, nous savons que le produit de tous les entiers² de 1 à $2n+1$ vaut $(2n+1)!$.

² Pairs et impairs.

On a donc

$$P = \frac{(2n+1)!}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} k} = \frac{(2n+1)!}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n+1)!}{\left(\prod_{k=1}^n 2\right) \left(\prod_{k=1}^n k\right)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.3

1. On a $\prod_{k=1}^n 2k^2 = 2^n \left(\prod_{k=1}^n k \right)^2 = 2^n (n!)^2$.

2. Notons que $(4i^2 - 1) = (2i + 1)(2i - 1)$. Et donc

$$\prod_{i=1}^n (4i^2 - 1) = \prod_{i=1}^n (2i + 1) \times \prod_{i=1}^n (2i - 1).$$

Notons que nous avons reconnu le produit d'entiers impairs consécutifs.
On a alors

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (2i + 1) &= \frac{\prod_{i=1}^n (2i + 1) \prod_{i=1}^n (2i)}{\prod_{i=1}^n (2i)} \\ &= \frac{3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1) \times (2n + 1) \times 2 \times 4 \times \dots \times 2n}{2^n \prod_{i=1}^n i} \\ &= \frac{(2n + 1)!}{2^n n!}. \end{aligned}$$

Et de même, il vient $\prod_{i=1}^n (2i - 1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

On en déduit donc que $\prod_{i=1}^n (4i^2 - 1) = \frac{(2n)!(2n + 1)!}{4^n (n!)^2}$.

3. On a $\exp(2^k) = (e^2)^k$, et donc

$$\prod_{k=0}^n \exp(2^k) = (e^2)^{0+1+\dots+n} = (e^2)^{\frac{n(n+1)}{2}} = e^{n(n+1)}.$$

4. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$.

Et donc

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\left(\prod_{k=2}^n (k-1) \right) \left(\prod_{k=2}^n (k+1) \right)}{\left(\prod_{k=2}^n k \right)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} i \prod_{j=3}^{n+1} j}{\prod_{k=2}^n k \prod_{k=2}^n k} \\ &= \frac{1 \times \prod_{i=2}^{n-1} i \quad (n+1) \times \prod_{j=3}^n j}{n \times \prod_{i=2}^{n-1} i \quad 2 \times \prod_{j=3}^n j} \\ &= \frac{1}{n} \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

5. On a

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{\prod_{k=1}^n 2k}{\prod_{k=1}^n (2k+1)}$$

Méthode

On multiplie numérateur et dénominateur par le produit des entiers pairs afin de faire apparaître une factorielle.

Astuce

C'est un archi-classique :
 $k^2 - 1 = k^2 - 1^2 = (k-1)(k+1)$.

Chgts d'indices

Dans le premier produit, on a posé $i = k - 1$ et dans le second, $j = k + 1$.

Rédaction

Avec l'habitude, on peut se passer de détailler cette étape si on est certain d'avoir bien repéré les termes qui ne se simplifient pas.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{k=1}^n 2k}{\prod_{k=1}^n 2k} \frac{\prod_{k=1}^n 2k}{\prod_{k=1}^n (2k+1)} \\
&= \frac{\left(\prod_{i=1}^n 2i\right)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{\left(2^n \prod_{i=1}^n i\right)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

Détails

Nous avons reconnu que le dénominateur est le produit des entiers impairs de 3 à $2n+1$.
On choisit alors de multiplier (au numérateur et au dénominateur) par le produit des entiers pairs de 2 à $2n$ afin de faire apparaître une factorielle.

6. On a

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^n (-3)^{k^2-k} &= \frac{\prod_{k=0}^n (-3)^{k^2}}{\prod_{k=0}^n (-3)^k} = \frac{(-3)^{\sum_{k=0}^n k^2}}{(-3)^{\sum_{k=0}^n k}} \\
&= \frac{(-3)^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}{(-3)^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\
&= (-3)^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}} \\
&= (-3)^{\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}} = (-3)^{\frac{n(n+1)(n-1)}{3}}.
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.4

Notons que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $k! \leq n!$

Et donc en sommant ces inégalités, il vient $\sum_{k=0}^n k! \leq \sum_{k=0}^n n!$

Or dans cette dernière somme, le terme à l'intérieur de la somme ne dépend pas de k , donc

$$\sum_{k=0}^n n! = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

Ceci prouve donc que $\sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$

Si $n=1$, on a $\sum_{k=0}^1 k! = 0! + 1! = 2$ et $(n+1)! = 2! = 2$. Donc l'inégalité n'est pas stricte.

En revanche, dès que $n \geq 2$, on a $0! < n!$ et donc

$$\sum_{k=0}^n k! < \sum_{k=0}^n n! = (n+1)!$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.5

1. Commençons par noter que pour $k=0$, on a $kq^k = 0$ et donc $\sum_{k=0}^n kq^k = \sum_{k=1}^n kq^k$.

On a alors

$$= \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} q^k = \sum_{k=1}^n q^k \sum_{i=1}^k 1 = \sum_{k=1}^n kq^k.$$

2. Si $q=1$, alors $\sum_{k=1}^n kq^k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Nous supposons donc à présent que $q \neq 1$. En intervertissant les deux sommes de l'égalité

Attention !

Le nombre de termes est bien $n+1$ (et non n) car on somme de 0 à n et non de 1 à n .

Rappel

Lorsqu'on somme des inégalités, dès que l'une des inégalités est stricte, l'inégalité obtenue par sommation est stricte.
Même si toutes les autres sont des égalités.

obtenue précédemment, il vient

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} q^k &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n q^k \\
 &= \sum_{i=1}^n q^i \frac{1 - q^{n-i+1}}{1 - q} \\
 &= \frac{1}{1 - q} \sum_{i=1}^n (q^i - q^{n+1}) \\
 &= \frac{1}{1 - q} \left(\sum_{i=1}^n q^i - \sum_{i=1}^n q^{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{1 - q} \left(q \frac{1 - q^n}{1 - q} - nq^{n+1} \right) \\
 &= \frac{q - (n + 1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1 - q)^2}.
 \end{aligned}$$

C'est ici qu'il est important d'avoir $q \neq 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.6

1. On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (i + j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n i + \sum_{j=1}^n j \right) = \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \sum_{j=1}^i j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \frac{i(i+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (3i^2 + i) \\
 &= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{3}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Détails

La première somme est une somme de constantes (i ne dépend pas de j , et donc vaut i fois le nombre de termes, qui ici est également i).

2. On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \max(i, j) + \sum_{j=i+1}^n \max(i, j) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i i + \sum_{j=i+1}^n j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^i j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i(i-1)}{2} \\
 &= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} \\
 &= \frac{n(n+1)}{12} (6n + 2n + 1 - 3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
 \end{aligned}$$

Relation de Chasles.

3. Notons que pour $i \leq j$, on a $i - j \leq 0$ et donc $|i - j| = j - i$. Et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n |i - j| &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j - i) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j (j - i) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(j \sum_{i=1}^j 1 - \sum_{i=1}^j i \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(j^2 - \frac{j(j+1)}{2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{j^2 - j}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{12} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}. \end{aligned}$$

4. Séparons en trois la seconde somme, suivant que $i - j$ soit strictement positif, strictement négatif, ou nul :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |i - j| &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} |i - j| + \underbrace{|i - i|}_{=0} + \sum_{j=i+1}^n |i - j| \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} (i - j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (j - i) \\ &= \sum_{1 \leq j < i \leq n} (i - j) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}. \end{aligned}$$

Ces deux sommes sont les mêmes !

Détails

On reconnaît la somme calculée à la question précédente.

5. Puisque $i2^j$ est le produit d'un terme ne dépendant que de i et d'un terme ne dépendant que de j , un résultat du cours nous garantit directement que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i2^j = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n 2^j \right) = \frac{n(n+1)}{2} 2(2^n - 1) = n(n+1)(2^n - 1).$$

- 6.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \frac{k\ell}{n(n-1)} &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n k \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \ell \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{\ell=1}^n \ell - k \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{n(n+1)}{2} - k \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)}{2} \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \frac{n(n+1)}{12} (3n(n+1) - 2(2n+1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n(n-1)} \frac{n(n+1)}{12} (3n^2 - n - 2) \\
 &= \frac{n+1}{12(n-1)} (n-1)(3n+2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.
 \end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.7

On a

$$\begin{aligned}
 A &= \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n ij = \prod_{i=1}^n i^n \prod_{j=1}^n j \\
 &= \prod_{i=1}^n i^n n! = (n!)^n \prod_{i=1}^n i^n = \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n (n!)^2 \\
 &= (n!)^n \times (n!)^n = (n!)^{2n}.
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$B = \frac{A}{\prod_{i=1}^n i^2} = \frac{A}{(\prod_{i=1}^n i)^2} = \frac{A}{(n!)^2} = (n!)^{2n-2}.$$

On a ensuite

$$C \times D = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij \times \prod_{i=1}^n i^2 = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq j}} ij \times \left(\prod_{i=1}^n i^2 \right)^2 = B(n!)^4.$$

Il est clair³ que $C = D$.

Et donc $CD = C^2 = B(n!)^4 \Rightarrow C^2 = (n!)^{2n+2} \Rightarrow C = (n!)^{n+1}$.

Enfin, $C = E \times \prod_{i=1}^n i^2 = E(n!)^2$ et donc $E = \frac{C}{(n!)^2} = (n!)^{n-1}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.8

Effectuons une sommation par paquets, en notant que

$$\llbracket 1, 2n \rrbracket = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \dots \cup \{2n-1, 2n\} = \bigcup_{k=1}^n \{2k-1, 2k\}.$$

Alors il vient

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^3 &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{2k-1} (2k-1)^3 + (-1)^{2k} (2k)^3 \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left((2k)^3 - (2k-1)^3 \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(8k^3 - (8k^3 - 12k^2 + 6k - 1) \right) \\
 &= 12 \sum_{k=1}^n k^2 - 6 \sum_{k=1}^n k + n \\
 &= 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n \\
 &= n(2(n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 1) \\
 &= n(4n^2 + 6n + 2 - 3n - 3 + 1) = n(4n^2 + 3n) \\
 &= n^2(4n+3).
 \end{aligned}$$

Donc, si n est pair, avec $n = 2p$, on a

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i i^3 = \sum_{i=1}^{2p} (-1)^i i^3 = p^2(4p+3) = \frac{n^2}{4}(2n+3).$$

Et si $n = 2p+1$ est impair, on a

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i i^3 = \sum_{i=1}^{2p} (-1)^i i^3 + (-1)^{2p+1} (2p+1)^3 = p^2(4p+3) - n^3.$$

 **Danger !**

Le produit est traître : si vous «sortez» un λ du produit (ici i), il sort à la puissance le nombre de termes !

³ Les noms de variables sont muets !

Or, $p = \frac{n-1}{2}$, de sorte que $p^2(4p+3) = \frac{(n-1)^2}{4}(2n+1)$ et donc

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i i^3 = \frac{(n-1)^2(2n+1)}{4} - n^3.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.9

Il est clair que si $y = 0$, alors

$$C_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(x) = (n+1) \operatorname{ch}(x) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(x) = (n+1) \operatorname{sh}(x).$$

En revanche, si $y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(x+ky) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{x+ky} + e^{-x-ky}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (e^{x+ky} + e^{-x-ky}) \\ &= \frac{e^x}{2} \sum_{k=0}^n (e^y)^k + \frac{e^{-x}}{2} \sum_{k=0}^n (e^{-y})^k \\ &= \frac{e^x}{2} \frac{1 - (e^y)^{n+1}}{1 - e^y} + \frac{e^{-x}}{2} \frac{1 - (e^{-y})^{n+1}}{1 - e^{-y}} \\ &= \frac{e^x}{2} \frac{1 - e^{(n+1)y}}{1 - e^y} + \frac{e^{-x}}{2} \frac{1 - e^{-(n+1)y}}{1 - e^{-y}} \\ &= \frac{e^x}{2} \frac{e^{\frac{n+1}{2}y} e^{-\frac{n+1}{2}y} - e^{-\frac{n+1}{2}y} e^{\frac{n+1}{2}y}}{e^{y/2} - e^{-y/2}} + \frac{e^{-x}}{2} \frac{e^{-\frac{n+1}{2}y} e^{\frac{n+1}{2}y} - e^{\frac{n+1}{2}y} e^{-\frac{n+1}{2}y}}{e^{-y/2} - e^{y/2}} \\ &= \frac{\exp(x + \frac{n}{2}y) \operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}y)}{2 \operatorname{sh}(\frac{y}{2})} + \frac{\exp(-x - \frac{n}{2}y) \operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}y)}{2 \operatorname{sh}(\frac{y}{2})} \\ &= \operatorname{ch}\left(x + \frac{n}{2}y\right) \frac{\operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}y)}{\operatorname{sh}(\frac{y}{2})}. \end{aligned}$$

Détails

Il était ici important d'avoir $e^y \neq 1$ et $e^{-y} \neq 1$ afin d'appliquer une formule bien connue sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Astuce

On factorise $e^a - e^b$ par $e^{\frac{a+b}{2}}$.
En particulier lorsque $a = 0$, $1 - e^b$ peut se factoriser par $e^{b/2}$.

De la même manière, il vient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(x+ky) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{x+ky} - e^{-x-ky}}{2} \\ &= \frac{e^x}{2} \sum_{k=0}^n (e^y)^k - \frac{e^{-x}}{2} \sum_{k=0}^n (e^{-y})^k \\ &= \frac{\exp(x + \frac{n}{2}y) \operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}y)}{2 \operatorname{sh}(\frac{y}{2})} - \frac{\exp(-x - \frac{n}{2}y) \operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}y)}{2 \operatorname{sh}(\frac{y}{2})} \\ &= \operatorname{sh}\left(x + \frac{n}{2}y\right) \frac{\operatorname{sh}(\frac{n+1}{2}y)}{\operatorname{sh}(\frac{y}{2})}. \end{aligned}$$

Les deux sommes ci-dessus ont déjà été calculées et simplifiées ci-dessus, aucun besoin de refaire le calcul !

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.10

On a bien la relation $k = (k+1) - 1$, et donc

$$\sum_{k=0}^n k k! = \sum_{k=0}^n k((k+1) - 1) = \sum_{k=0}^n ((k+1)! - k!).$$

On reconnaît là une somme télescopique, qui vaut donc $(n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$.
Sur le même principe, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right).$$

Là encore il s'agit d'une somme télescopique qui vaut : $\frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.11

1. Pour $x > 1$, on a $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + b(x+1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x + (b-a)}{x^2-1}$.

On aura donc $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{1}{x^2-1}$ si et seulement si pour tout $x > 1$, $(a+b)x + (b-a) = 1$.

Par identification⁴, cela revient à $\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$.

2. On en déduit que pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.12

1. Notons $f_n : x \mapsto (1+x)^n$.

D'une part, on a $f'_n(x) = n(1+x)^{n-1}$.

Mais en utilisant la formule du binôme avant de dériver, on obtient, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \sum k = 0^n \binom{n}{k} x^k.$$

Et donc en dérivant⁵, $f'_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$.

En particulier, $f'_n(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k$.

On en déduit donc que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

2. En dérivant une seconde fois f_n , on obtient $f''_n(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ et $f''_n(x) =$

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}.$$

Donc en évaluant de nouveau en $x = 1$, il vient $n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$.

Pour calculer la somme des $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$, plutôt que de dériver f_n , intégrons la.

Une primitive de f_n est $F_n : x \mapsto \frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1}$.

D'autre part, une autre primitive de f_n est

$$G_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} x^{k+1}.$$

Donc F_n et G_n diffèrent d'une constante : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$G_n(x) = F_n(x) + \lambda.$$

Or, $F_n(0) = \frac{1}{n+1}$ et $G_n(0) = 0$, donc $\lambda = -\frac{1}{n+1}$.

On en déduit donc que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = G_n(0) = F_n(0) - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

⁴ Ce qui est légitime pour les coefficients d'un polynôme : deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Danger !

On a sûrement reconnu une somme «télescopique» en ce sens que la plupart des termes se simplifient deux à deux. Mais contrairement aux sommes télescopiques usuelles, ici les deux premiers et les deux derniers termes ne vont pas se simplifier, et pas seulement le premier et le dernier.

⁵ Ce qui est légitime car f_n est polynomiale, donc dérivable.

Danger !

Attention, il n'existe pas qu'une seule primitive (alors qu'il n'y a qu'une seule dérivée). Donc a priori, nous avons là deux primitives différentes, il n'est pas dit que ce soient les mêmes !

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.13

Les deux premières sont évidentes :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

et

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0.$$

Pour les deux autres sommes, il faut comprendre que les $2k, 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sont les entiers pairs inférieurs ou égaux à n .

$$\text{Et donc } \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^n \binom{n}{i}.$$

Et de même, les $2k+1, 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ sont les entiers impairs entre 0 et n .

$$\text{Et donc } \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^n \binom{n}{i}.$$

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^n \binom{n}{i} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^n \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

Et de même,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^n \binom{n}{i} - \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^n \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

$$\text{On en déduit que } \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}.$$

Et donc leur somme valant 2^n , ces deux quantités valent $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.14

Nous savons que pour $j > i$, $\binom{i}{j} = 0$.

Et donc

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{i}{j} &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} 1^j 1^{i-j} = \sum_{i=0}^n (1+1)^i \\ &= \sum_{i=0}^n 2^i = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Formule du binôme.

Somme des termes d'une suite géométrique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.15

1. Pour $n = 1$, on a $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1$, donc la récurrence est initialisée.

Supposons que $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)(n^2 + 2n + 1) \\
&= \frac{n+1}{4} (n^2(n+1) + 4n^2 + 8n + 4) \\
&= \frac{n+1}{4} (n^3 + 5n^2 + 8n + 4) \\
&= \frac{n+1}{4} (n+1)(n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Méthode

Puisque $n^3 + 5n^2 + 8n + 4$ est un polynôme en n , dont -1 est une racine, il se factorise par $n+1$.

Et donc la formule est encore vraie au rang $n+1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Pour la seconde preuve, remarquons que $\sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4)$ est une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4) = \sum_{k=1}^n (k+1)^4 - \sum_{k=1}^n k^4 = \sum_{i=2}^{n+1} i^4 - \sum_{k=1}^n k^4 = (n+1)^4 - 1.$$

D'autre part, on a, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$(k+1)^4 - k^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4) &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\
&= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n \\
&= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + n(2n^2 + 5n + 4).
\end{aligned}$$

En isolant la somme des cubes, on obtient donc

$$\begin{aligned}
4 \sum_{k=1}^n k^3 &= (n+1)^4 - 1 - n(2n^2 + 5n + 4) \\
&= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 5n + 4) \\
&= n(n^3 + 2n^2 + n) = n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2.
\end{aligned}$$

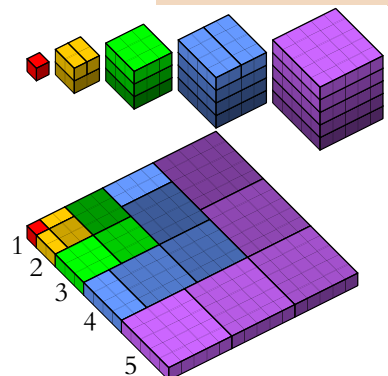
Et par conséquent, $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Cette formule possède l'interprétation graphique ci-dessous.

Plus loin

Les plus courageux d'entre vous pourront essayer de pousser cette méthode plus loin en calculant la somme des n premières puissances 4^{èmes} en calculant

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^5 - k^5).$$



2. Permutons les deux sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n ij &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} ij \\
&= \sum_{j=2}^n j \sum_{i=1}^{j-1} i \\
&= \sum_{j=2}^n j \frac{(j-1)j}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n (j^3 - j^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j^3 - j^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^3 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2+3n-4n-2)}{24} = \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24} \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.16

Soit $n \in \mathbf{N}$, et soient x, y deux réels strictement positifs. Alors

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x}{y}\right)^n + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{y}\right)^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{y}{x}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\left(\frac{x}{y}\right)^k + \left(\frac{y}{x}\right)^k \right).
\end{aligned}$$

Mais pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\left(\frac{y}{x}\right)^k = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^k}$.

Or, pour $t > 0$, on a

$$(t-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2t \leq t^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{t^2+1}{t} \geq 2 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $(t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

En particulier, pour $t = \left(\frac{x}{y}\right)^k$, il vient donc

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^n + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2 \leq 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \leq 2(1+1)^n \leq 2^{n+1}.$$

Si $n = 0$, l'inégalité est évidemment une égalité.

Et si $n > 0$, et que $x = y$, alors il y a encore égalité puisque $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

En revanche, si $x \neq y$, alors $\frac{x}{y} \neq 1$ et donc comme mentionné précédemment $\frac{x}{y} + \frac{1}{\frac{x}{y}} > 2$.

Donc dans la somme, le terme correspondant à $k = 1$ est une inégalité stricte, donc l'inégalité finale est également stricte.

Ainsi, l'inégalité $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^n + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$ est une égalité si et seulement si $n = 0$ ou $x = y$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.17

Notons que le premier et le dernier terme de la somme sont égaux à 1, et donc que

$$u_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geq 2.$$

D'autre part, pour $k = 1$ et $k = n - 1$, on a $\binom{n}{k} = \frac{1}{n}$.

Pour les autres coefficients, essayons de nous faire une petite intuition de ce qu'il se passe. Les coefficients que nous considérons sont sur une même ligne du triangle de Pascal. Or, vous avez probablement déjà constaté que sur une ligne du triangle de Pascal, les

Méthode

Puisque $3n^2 - n - 2$ est un polynôme de degré 2 en n , nous savons le factoriser en produit de termes de degré 1 en cherchant ses racines. Plutôt que de calculer un discriminant, notons que 1 est racine évidente, et donc qu'on peut le factoriser par $n - 1$.

Alternative

Un autre moyen d'établir cette inégalité (classique) est d'étudier la fonction $t \mapsto t + \frac{1}{t}$.

Remarque

Ce terme n'apparaît dans la somme que si $n \geq 1$, raison pour laquelle nous avons du traiter à part le cas $n = 0$.

coefficients croissent jusqu'au milieu de la ligne, puis décroissent.

En particulier, si $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$, on doit avoir $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2}$.

Admettons provisoirement ceci. On aura alors, pour $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$, $\frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{2}{n(n-1)}$.

Et donc

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} \leq (n-3) \frac{2}{n(n-1)}.$$

Et par conséquent, il vient

$$2 \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + 2 \frac{(n-3)}{n(n-1)}.$$

Mais $\frac{2(n-3)}{n(n-1)} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{n - \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

Reste à présent à prouver ce que nous n'avons que «constaté» sur le triangle de Pascal.

Soit donc $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots (n-k+1)}{2 \times k \times (k-1) \times \cdots \times 3} = \frac{n(n-1)}{2} \frac{n-2}{k} \frac{n-3}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{3}.$$

Or, on a $k \leq n-2$, de sorte que $\frac{n-2}{k} \geq 1$. Puis $\frac{n-3}{k-1} \geq 1, \dots, \frac{n-k+1}{3} \geq 1$.

Et donc on a bien, comme annoncé, $\binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2}$.

Remarque : il aurait été possible d'utiliser le même raisonnement pour dire que pour tout $k \in$

$$\llbracket 1, n-1 \rrbracket, \binom{n}{k} \geq \binom{n}{1} \geq n.$$

Mais alors nous pourrions seulement affirmer que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \geq \frac{n-2}{n}$.

Nous aurions alors obtenu l'encadrement $2 \leq u_n \leq 2 + \frac{n-2}{n}$.

Malheureusement, le membre de droite tend alors vers 3, et donc le théorème des gendarmes ne peut plus s'appliquer.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.18

Il s'agit d'utiliser la formule de Pascal : pour $i \geq 1$, $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{n+1}{i} \right] &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[1 + \sum_{i=1}^k \binom{n+1}{i} \right] \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[1 + \sum_{i=1}^k \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) \right] \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[1 + \sum_{i=1}^k \binom{n}{i} + \sum_{i=1}^k \binom{n}{i-1} \right] \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[1 + \sum_{i=1}^k \binom{n}{i} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \right] \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i} + \binom{n}{k} \right] \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \left[2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} + \binom{n}{k} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 + 2 \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{k} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 + 2 \sum_{0 \leq i < k \leq n} \binom{n}{k} \binom{n}{i} \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right)^2 \\
&= (2^n)^2 = 2^{2n}.
\end{aligned}$$

Rappelons que la formule clé que nous avons utilisée à l'avant dernière étape est

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 = \sum_{k=0}^n a_k^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.19

1. Commençons par échanger la première ligne et la seconde, ce qui n'est pas obligatoire, mais nous permettra d'utiliser le 1 comme pivot plutôt qu'un 3.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \\ x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ -2x + 4y + 4z - 5t = 3 \\ 6x - 12y - 12z + 16t = 4 \end{cases} \xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \\ -2x + 4y + 4z - 5t = 3 \\ 6x - 12y - 12z + 16t = 4 \end{cases} \\
&\xleftrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1 \end{matrix}} \begin{cases} x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ 3z - 4t = 2 \\ -2z + 3t = 3 \\ 6z - 8t = 4 \end{cases} \\
&\xleftrightarrow{\begin{matrix} L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix}} \begin{cases} x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ 3z - 4t = 2 \\ t = 13 \end{cases} \\
&\xleftrightarrow{} \begin{cases} x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ z = 18 \\ t = 13 \end{cases} \\
&\xleftrightarrow{} \begin{cases} x = 2y + 2 \\ z = 18 \\ t = 13 \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\{(2y + 2, y, 18, 13), y \in \mathbf{K}\}$.

2. En soustrayant les deux lignes, il vient

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ -2y - 2t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 1 - t \end{cases}.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{(-z, 1 - t, z, t), (z, t) \in \mathbf{K}^2\}$.

3. Allons-y :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y - 4z = 3 \end{cases} \xleftrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3y - 7z = 1 \\ -2z = 1 \\ -3y - 6z = 3 \end{cases} \\
&\xleftrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_2} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3y - 7z = 1 \\ -2z = 1 \\ -13z = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les deux dernières équations ne peuvent être satisfaites simultanément, donc le système ne possède pas de solution.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.20

1. On a

$$\begin{cases} -5x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x - y - 2z = 2 \end{cases} \xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1]{L_2 \leftarrow -5L_2 + 2L_1} \begin{cases} -5x + y + 2z = 2 \\ 7y + 14z = 14 \\ -2y - 4z = 16 \end{cases} \\ \xleftrightarrow[L_3 \leftarrow -L_3/2]{L_2 \leftarrow L_2/7} \begin{cases} -5x + y + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = -8 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont clairement incompatibles, donc le système ne possède pas de solution.

2. On a

$$\begin{cases} 4x - (3+i)y - (9+3i)z = 5-3i \\ 2x - 2y - 6z = 2-2i \\ 4x - (2+2i)y - (6+6i)z = 6-2i \end{cases} \xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1} \begin{cases} 4x - (3+i)y - (9+3i)z = 5-3i \\ (-1+i)y + (-3+3i)z = -1-i \\ (1-i)y + (3-3i)z = 1+i \end{cases} \\ \xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \begin{cases} 4x - (3+i)y - (9+3i)z = 5-3i \\ (-1+i)y + (-3+3i)z = -1-i \\ 0 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - (3+i)y - (9+3i)z = 5-3i \\ y = \frac{1+i}{1-i} - 3z \end{cases}$$

$$\text{Mais } \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

Et donc il vient $y = i - 3z$ et par conséquent

$$4x = 5 - 3i + (9 + 3i)z + (3 + i)(i - 3z) = 5 - 3i + (9 + 3i)z + 3i - 1 - 9z - 3iz = 4.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\{(1, i - 3z, z), z \in \mathbb{C}\}$.

3. Il est bien entendu possible d'utiliser la méthode du pivot : retirer la première ligne à chacune des autres fera disparaître les x_1 , et nous laissera une deuxième ligne avec un coefficient en x_2 égal à 1.

Puis nous retirerons la seconde ligne à chacune des suivantes, etc.

Mais notons qu'il est possible d'aller plus vite en réalisant les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

On obtient alors le système triangulaire suivant

$$\begin{cases} \textcircled{x_1} + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ x_3 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Ce système triangulaire possède alors pour unique solution $(1, 0, \dots, 0)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.21

1. Il est naturel de commencer par soustraire la première ligne aux deux suivantes :

$$\mathcal{S} \xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x - y + z = m \\ (m-1)y - 2z = 1-m \\ -2z = 1-m \end{cases}$$

► Si $m \neq 1$: alors ce système est triangulaire, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Remarque

Notons que la méthode du pivot aurait fait apparaître le même système triangulaire, mais aurait nécessité plus d'opérations. Il est d'ailleurs intéressant d'essayer de compter le nombre d'opérations élémentaires demandées par chacune de ces méthodes.

Il est donc de Cramer, et il vient successivement $z = \frac{m-1}{2}$, $y = 0$ et $x = m - z = \frac{m+1}{2}$.

L'unique solution du système est donc $\left(\frac{m+1}{2}, 0, \frac{m-1}{2}\right)$.

► Si $m = 1$: on a alors $z = 0$, et la première équation devient $x - y = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y$ et donc l'ensemble des solutions du système est $\{(1 + y, y, 0), y \in \mathbf{R}\}$.

2. Commençons par échanger la première et la dernière ligne, car le cas où $m = 0$ est problématique : on ne pourrait pas prendre m comme pivot.

Il vient alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases} &\xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases} \\ &\xleftrightarrow{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - mL_1}} \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 \\ (1-m)y + (1-m^2)z = 1-m \end{cases} \\ &\xleftrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 \\ (2-m-m^2)z = 1-m \end{cases} \end{aligned}$$

► Si $m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{1, -2\}$, alors la dernière équation ne possède pas de solution car $1 - m \neq 0$.

► En revanche, si $m^2 - m - 1 \neq 0$, alors $z = \frac{m-1}{m^2 + m - 2} = \frac{1}{m+2}$, $y = z$, et donc $x = 1 - (1+m)z = 1 - \frac{m+1}{m+2} = \frac{1}{m+2}$.

Donc le système possède une unique solution, qui est $\left(\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}\right)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.22

Commençons notre pivot :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases} &\xleftrightarrow{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_1}} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (a-2)y + 4z = 1 \end{cases} \\ &\xleftrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 - (a-2)L_2} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (-a^2 + a + 6)z = 3 - a \end{cases} \end{aligned}$$

► Si $a^2 - a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = 3$.

Alors soit $a = 2$, et la dernière ligne est $0 = 1$, qui n'est pas possible, donc le système est incompatible.

Soit $a = 3$, et donc la dernière ligne est $0 = 0$, qu'on peut donc supprimer.

Le système obtenu est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont non nuls, et possède une infinité de solutions.

► Si $a^2 - a - 6 \neq 0$, alors le système est échelonné, et possède une unique solution (que l'on pourrait exprimer en fonction de a , mais ce n'est pas demandé).