Suites numériques 12

12.1 Généralités sur les suites réelles

Définition 12.1 – Un suite réelle est une application u de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$. On note généralement u_n au lieu de $u(n)$.
Et de même, on note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ au lieu de u.

Il faut bien comprendre que la distinction entre u_n et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la même qu'entre une fonction f et $f(x)$, l'image d'un nombre x par f.
Ainsi, u_n désigne un réel[1], quand $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désigne la suite, c'est-à-dire un élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
On dit que u_n est **le terme général** de la suite (u_n).

[1] Donc un **nombre**.

Il est aussi possible considérer des suites définies à partir d'un certain rang n_0, c'est-à-dire dont l'ensemble de départ est $\mathbf{N} \setminus [\![0, n_0 - 1]\!]$.
Par exemple, si on pose $u_n = n^2 \ln(n)$ et $v_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$, alors u_n n'est défini que pour $n \geqslant 1$ et v_n n'est défini que pour $n \geqslant 2$.
Dans ce cas on note la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ pour bien marquer le fait qu'elle n'est pas définie sur $\mathbf{N}$ tout entier.

Définition 12.2 – Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **constante** si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **stationnaire** si il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_{n+1} = u_n$.

Une suite stationnaire est donc une suite qui est constante **à partir d'un certain rang.**

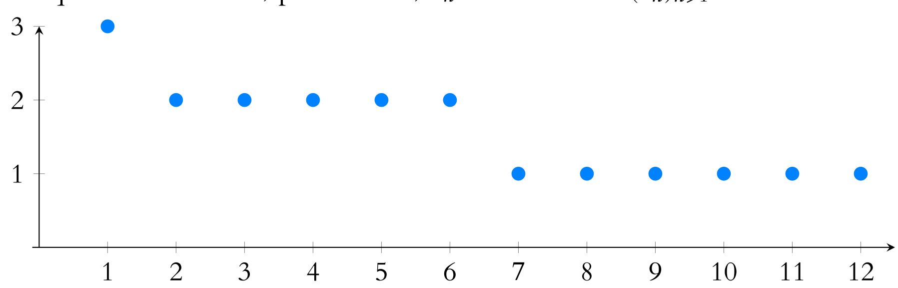
Exemples 12.3

▸ Toute suite décroissante (u_n) d'entiers naturels est stationnaire.
En effet, soit $A = \{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Alors A est une partie non vide de $\mathbf{N}$.
Elle contient donc un plus petit élément : $\exists k \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, u_k \leqslant u_n$.
Et alors pour $n \geqslant k$, on a à la fois $u_n \leqslant u_k$ par décroissance de la suite, et $u_k \leqslant u_n$ par ce qui précède. Donc $u_n = u_k$: la suite est stationnaire.

Corollaire
Il n'existe pas de suite d'entiers **naturels** strictement décroissante.

▸ Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \left\lfloor \dfrac{1}{\ln(\sqrt{x}+1)} + 1 \right\rfloor$.
Pour $\ln(\sqrt{n}+1) > 1$, on a $1 \leqslant \dfrac{1}{\ln(\sqrt{n}+1)} < 2$ et donc $u_n = 1$.
Mais, $\ln(\sqrt{n}+1) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > e \Leftrightarrow n+1 > e^2 \Leftrightarrow n > e^2 - 1$.
Puisque $e^2 - 1 \simeq 7.39$, pour $n \geqslant 8$, $u_n = 1$. Et donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est stationnaire[2].

[2] Et dans la définition de suite stationnaire, on peut prendre ici $n_1 = 8$. Ou $n_1 = 9$. Ou $n_1 = 100$...



Définition 12.4 – Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite, et pour tout $n \geqslant n_0$, soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition faisant intervenir la suite (u_n).
On dit que (u_n) vérifie $\mathscr{P}(n)$ **à partir d'un certain rang**, s'il existe $N \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie.

Par exemple, une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang.
On peut également considérer des suites croissantes à partir d'un certain rang, ou encore positives à partir d'un certain rang. Notons que cette appellation n'a d'intérêt que si la valeur du N à partir duquel la proposition est vraie est sans importance, mais qu'il suffit de savoir qu'il existe.
Cela permet souvent d'écarter à peu de frais un nombre fini de valeurs problématiques. De toutes façons, la plupart des notions qui suivent, et en particulier tout ce qui touche à la notion de limite ne dépend pas des premiers termes de la suite.
Par exemple, si on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$, alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas monotone, puisque $u_2 > u_1$, mais $u_4 < u_3$.
En revanche, on a $u_{n+1} < u_n$ dès que $n \geqslant 3$, et donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
On peut donc par exemple lui appliquer le théorème de la limite monotone et prouver qu'elle converge.

12.1.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 12.5 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que M est :

1. **majorée** s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant M$.
   Un réel M tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant M$ est appelé un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. **minorée** s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant m$. Un tel réel m est appelé un minorant de la suite (u_n).
3. **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. Autrement dit s'il existe deux réels m et M tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

En termes d'application
Une suite est majorée si l'application $u : n \mapsto u_n$ est majorée.
Ou encore si son ensemble image est une partie majorée de **R**.

⚠ Un majorant/minorant est une **constante**, qui ne dépend donc pas de n.

Par exemple, si $u_n = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, on a, pour tout entier n, $u_n \leqslant n$, mais ceci ne prouve sûrement pas que la suite (u_n) est majorée.
En revanche, si on se souvient[3] que pour tout $x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$, alors il vient, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n \leqslant n^2 \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est bien majorée et que 1 en est un majorant.
Notons qu'une suite (u_n) est majorée si et seulement si $\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ (ce qui n'est rien d'autre que l'image de l'application $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$) est majoré.

[3] Ce qui se retrouve par une simple étude de fonction.

Terminologie
On ne parle pas **du** majorant, mais bien d'**un** majorant, car si une suite est majorée, elle possède toujours une infinité de majorants.
Par exemple ici, (u_n) est également majorée par 2, par π, par e^{100}, etc

Proposition 12.6 : *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.*
Soit encore si et seulement si il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée, et soient M et m deux réels tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
Soit alors $M_1 = \max(|M|, |m|) \geqslant 0$.
Alors on a $M \leqslant |M| \leqslant M_1$ et $m \geqslant -|m| \geqslant -M_1$, de sorte que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ -M_1 \leqslant u_n \leqslant M_1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leqslant M_1.$$

Inversement, s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$, alors $-M \leqslant u_n \leqslant M$, de sorte que (u_n) est à la fois majorée[4] et minorée[5] et donc bornée. □

[5] par $-M$.
[4] Par M.

12.1.2 Suites monotones

Définition 12.7 – Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite :

- **croissante** si $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- **décroissante** si $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$
- **monotone** si elle est soit croissante soit décroissante.

Remarque
Une suite peut être à la fois croissante et décroissante, mais c'est le cas si et seulement si elle est constante.

Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut notamment étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si ce signe est toujours positif, (u_n) est croissante (car $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$), s'il est toujours négatif, (u_n) est décroissante, et si ce signe n'est pas constant[6], alors (u_n) n'est pas monotone.

[6] C'est-à-dire s'il dépend de la valeur de n.

Proposition 12.8 : *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite **à valeurs strictement positives**. Alors (u_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$).*

Démonstration. Il s'agit seulement de remarquer que $u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
Notons que ceci ne vaut plus si u_n n'est pas positif, car il faut alors changer le sens de l'inégalité ! □

Remarque
En réalité, ceci s'adapte assez bien aux suites à termes négatifs : il suffit de changer le sens des inégalités. Par contre, plus rien ne fonctionne pour les suites qui ne sont pas de signe constant.

Ceci nous donne donc une autre méthode pour étudier la monotonie des suites à termes positifs.
On préférera cette méthode à la précédente pour les suites dont le terme général contient un produit ou une factorielle, c'est-à-dire lorsque le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ se simplifie.
Au contraire, pour les suites faisant apparaître une somme, cette méthode a peu de chances d'aboutir.

Exemple 12.9

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.
Alors il est clair que la suite (u_n) est à termes positifs, et on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2\frac{2n+1}{n+1} \geqslant 2 \geqslant 1.$$

Et donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

Définition 12.10 – Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
On dit que (u_n) est strictement monotone si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Notons qu'en particulier, une suite strictement croissante est croissante.
Les méthodes ci-dessus s'adaptent sans difficulté aux suites strictement monotones : $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} > u_n$, et dans le cas d'une suite positive, si et seulement si pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

12.2 Limite d'une suite

12.2.1 Suites convergentes

Définition 12.11 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

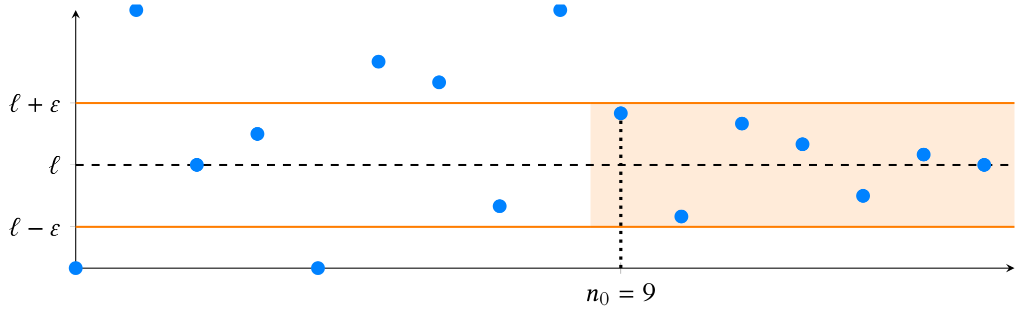
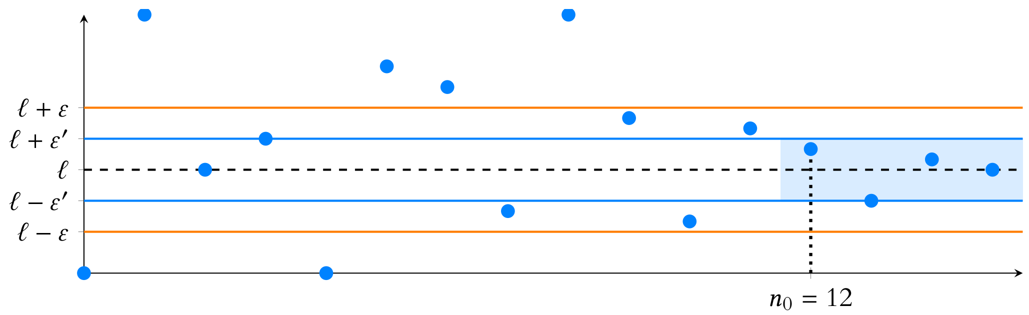


FIGURE 12.1 – La suite (u_n) converge vers ℓ : pour $n \geqslant n_0$, u_n est dans la «bande» $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.

Remarques.

- Intuitivement, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, l'écart entre u_n et ℓ est inférieur à ε.
- Il n'y a pas unicité de n_0 : dans le cas de la suite dessinée ci-dessus, $n_0 = 10$ convient également, et plus généralement, tout $n_0 \geqslant 9$ convient.
- Il se peut que pour (un ou plusieurs) $n < n_0$, on ait également $|u_n - \ell| < \varepsilon$. C'est par exemple ici le cas pour $n = 7$. L'essentiel n'est donc pas de trouver un terme u_n suffisamment proche de ε, mais de trouver à partir de quel rang **tous les termes** qui suivent sont suffisamment proches de ℓ.
- La valeur de n_0 dépend de ε : si ε diminue, il faudra augmenter la valeur de n_0. Par exemple, sur le dessin ci-dessous[7], avec $\varepsilon' < \varepsilon$, il faut prendre $n_0 \geqslant 12$.
- Si deux suites (u_n) et (v_n) sont égales à partir d'un certain rang, alors si l'une converge vers ℓ, l'autre converge aussi vers ℓ.

[7] Avec la même suite que précédemment.



Notons qu'il est quasi-immédiat que $u_n \to \ell$ si et seulement si $u_n - \ell \to 0$.
En effet, dans la définition de la convergence, il s'agit de noter que $|u_n - \ell| = |(u_n - \ell) - 0|$.

Proposition 12.12 (Unicité de la limite) : *Si (u_n) converge vers ℓ_1 et converge vers ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$. Autrement dit, si une suite converge, c'est vers une unique réel.*
Ce réel est alors appelé la limite de la suite (u_n) et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou bien $\ell = \lim u_n$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque
Notons que pour une suite, il n'est pas vraiment nécessaire de préciser vers quoi tend vers n : il tend nécessairement vers $+\infty$.

Démonstration. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux réels tels que (u_n) converge à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2.
Supposons par l'absurde que $\ell_1 \neq \ell_2$, et soit $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$.
Alors[8] il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$.
De même, il existe un entier $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Alors pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a à la fois $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$ et $|u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Or, on a $\ell_1 - \ell_2 = \ell_1 - u_n + (u_n - \ell_2)$ de sorte que par l'inégalité triangulaire,

$$|\ell_1 - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

[8] Car (u_n) converge vers ℓ_1.

Soit encore $|\ell_1 - \ell_2| < \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$, ce qui est absurde.
On en déduit que $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition 12.13 – S'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite **convergente**. Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est **divergente**.

Exemple 12.14

La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est divergente.
En effet, supposons par l'absurde qu'elle converge vers ℓ, et choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de la convergence : il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$.
Mais alors, par l'inégalité triangulaire, on a

$$|u_{n_0} - u_{n_0+1}| = |(u_{n_0} - \ell) + (\ell - u_{n_0+1})| \leqslant |u_{n_0} - \ell| + |u_{n_0+1} - \ell| \leqslant 1.$$

Or, la différence de deux termes consécutifs de (u_n) vaut toujours ± 2, et donc on arrive à $2 \leqslant 1$, ce qui est absurde.

⚠ Il est hors de question d'utiliser la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ avant d'avoir prouvé la convergence de la suite (soit par un calcul direct de la limite, soit à l'aide d'un des théorèmes d'existence ci-après).
Cette notation n'aura du sens que dans le cas d'une suite convergente, ce qui n'est pas le cas de toutes les suites.

Proposition 12.15 : *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente, et soit $\ell = \lim u_n$.
Alors[9] il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 1$. Et par conséquent, pour $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant |\ell| + 1.$$

Posons alors $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, |\ell| + 1)$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, il y a alors deux cas de figure :

- soit $n \geqslant n_0$, auquel cas $|u_n| \leqslant |\ell| + 1 \leqslant M$;
- soit $n < n_0$, auquel cas, par définition de M, $|u_n| \leqslant M$.

Ainsi, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$, et donc (u_n) est bornée. □

[9] En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de limite.

Remarque
Cette preuve montre qu'une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

⚠ La réciproque est archi-fausse, comme le prouve le cas de la suite de terme général $(-1)^n$.

12.2.2 Limites infinies

Définition 12.16 – On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A.$$

Ceci signifie que quel que soit le réel A qu'on se fixe, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont plus grands que A.

Exemple 12.17

La suite $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$. En effet, soit $A \geqslant 0$.

- si $A \leqslant 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant A$, donc on peut prendre $n_0 = 0$.
- si $A > 0$, soit $n_0 = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1$. Alors $n_0 \geqslant \sqrt{A}$, et donc pour $n \geqslant n_0$, il vient $u_n \geqslant \sqrt{A}^2 \geqslant A$.

Proposition 12.18 : *Une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ est minorée*[10].

[10] Mais n'est évidemment pas majorée.

Démonstration. Soit $A = 1$. Alors $\exists n \in \mathbf{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 1$.
Notons alors $m = \min(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, 1)$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant 1 \geqslant m$.
Et pour $n < n_0$, $u_n \geqslant \min(u_0, u_1, \cdots, u_{n_0-1}) \geqslant m$. Et donc m est un minorant de (u_n). □

Définition 12.19 – On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant B.$$

Notons qu'en particulier, une suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) n'est pas majorée[11] (resp. minorée) et donc qu'elle n'est pas convergente.
On prendra donc bien garde au fait qu'une suite qui tend vers $\pm\infty$ est une suite divergente !
D'ailleurs, on dit souvent que (u_n) diverge vers $\pm\infty$.
Une suite convergente est donc une suite qui admet une limite **finie.**

[11] Car elle prend des valeurs plus grandes que n'importe quel réel.

Proposition 12.20 : *Si $u_n \to -\infty$, alors (u_n) est majorée.*

⚠ On n'utilisera la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ que pour une suite (u_n) dont on sait qu'elle admet une limite (finie ou non).
Par exemple, si $u_n = (-1)^n n$, alors la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ne veut rien dire !

12.2.3 Notion de voisinage

Bien que différentes, vous constatez que les notions de limites finies et infinies ont certaines caractéristiques en commun.
Il existe en fait un vocabulaire qui permet d'unifier ces deux définitions : celui de voisinage.

Définition 12.21 – Soit $x \in \overline{\mathbf{R}}$. On appelle **voisinage de** x tout ensemble de réels de la forme :

1. $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$, si x est un réel.
2. $[A, +\infty[$, avec $A \in \mathbf{R}$ si $x = +\infty$
3. $]-\infty, B]$, avec $B \in \mathbf{R}$ si $x = -\infty$.

On note alors $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x.

Proposition 12.22 : *Soit (u_n) une suite réelle, et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, alors, à partir d'un certain rang, (u_n) est à valeurs dans V. Soit encore*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \in V.$$

Démonstration. C'est une simple combinaison des définitions de voisinage et de limite (finie ou infinie). □

On dit parfois que (u_n) admet une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$ pour dire que (u_n) est convergente, ou tend vers $\pm\infty$.
Ainsi, toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$. En revanche, ce n'est pas le cas de $((-1)^n)_n$.

12.3 Opérations sur les limites ou l'art de découper les ε

12.3.1 Somme de limites

Lemme 12.23. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de limite nulle. Alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
De même, il existe $n_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_2$, $|v_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Posons alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$, de sorte que pour $n \geqslant n_0$, on a à la fois $n \geqslant n_1$ et $n \geqslant n_2$, et donc

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Et donc ceci prouve bien que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Proposition 12.24 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda u_n + \mu v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell_1 + \mu\ell_2$.*

Démonstration. Nous allons prouver que $\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda\ell_1 + \mu\ell_2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est équivalent au résultat annoncé.
Commençons par noter que $\lambda(u_n - \ell_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En effet, la suite[12] de terme général λ est bornée et $u_n - \ell_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la proposition 12.30 s'applique.
De même, $\mu(v_n - \ell_2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et donc par le lemme 12.23, $\lambda(u_n - \ell_1) + \mu(v_n - \ell_2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

[12] Constante !

Remarque. Notons en particulier que ceci prouve que la somme de deux suites convergentes est convergente.
Nous n'énoncerons aucun résulta concernant les sommes de suites divergentes, et pour cause : la somme de deux suites divergentes peut converger comme elle peut diverger.
Par exemple, $n + (1 - n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors que c'est la somme de deux suites divergentes, et $n + ((-1)^n - n)$ diverge, bien qu'également somme de deux suites divergentes.
En revanche, il est toujours vrai que la somme d'une suite convergente et d'une suite convergente soit divergente.
Par exemple, supposons que (u_n) tende vers une limite finie ℓ et que (v_n) diverge. Supposons par l'absurde que (u_n+v_n) converge vers une limite ℓ'. _Alors $v_n = (u_n+v_n)-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'-\ell$, contredisant la divergence de (v_n).

Proposition 12.25 : *Si (u_n) est minorée et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Démonstration. Soit $m \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n$.
Soit alors $A \in \mathbf{R}$. Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant A - m$.
Et alors, pour $n \geqslant n_0$, $u_n + v_n \geqslant m + A - m \geqslant A$.
Et donc $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Corollaire 12.26 – *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R}$, et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration. Il s'agit de remarquer qu'une suite convergente ou qui tend vers $+\infty$ est minorée. □

Sur le même principe, on prouve que :

Proposition 12.27 : *Soit (u_n) une suite majorée. Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*

Corollaire 12.28 – *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R}$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Notons qu'on ne dit rien de la somme d'une suite qui tend vers $+\infty$ et d'une suite qui tend vers $-\infty$, tout bonnement car il s'agit[13] d'une forme indéterminée.
Ce qui veut dire qu'il n'existe pas de règle générale, mais que vous devrez vous débrouiller au cas par cas !

[13] Toujours.

Exemples 12.29

- Si $u_n = n$ et $v_n = -2n$, alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to -\infty$.
- Si $u_n = n$ et $v_n = 1 - n$. Alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to 1$.
- Si $u_n = n$ et $v_n = -n + (-1)^n$, alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $(u_n + v_n)$ diverge.

Une manière pratique de synthétiser tout cela : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \in \overline{\mathbf{R}}$, si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \in \overline{\mathbf{R}}$, et si $\ell_1 + \ell_2$ est défini dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$.

12.3.2 Produit et quotient de limites

Commençons par une proposition qui sert très souvent :

Proposition 12.30 : *Le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle tend vers 0.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 et soit (v_n) une suite bornée. Notons M un réel tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|v_n| \leqslant M$.
Soit $\varepsilon > 0$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, il vient $|u_n v_n| \leqslant |u_n| \cdot |v_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M} M \leqslant \varepsilon$.
Et donc ceci prouve bien que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_n v_n| \leqslant \varepsilon$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$. □

Détails
C'est la **définition** de $u_n \to 0$, où on a pris $\frac{\varepsilon}{M}$ au lieu d'ε (ce qui est toujours possible puisque la propriété est vraie **pour tout** nombre positif).

Proposition 12.31 : *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \ell_2$.*

Démonstration. On a $u_n v_n = u_n(v_n - \ell_2) + u_n \ell_2 = u_n(v_n - \ell_2) + (u_n - \ell_1)\ell_2 + \ell_1 \ell_2$.
Puisque (u_n) est convergente, elle est bornée, et donc la proposition 12.30 s'applique : $u_n(v_n - \ell_2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De même, $u_n - \ell_1 \to 0$ et la suite constante égale à ℓ_2 est bornée, et donc $(u_n - \ell_1)\ell_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc par somme de limites,

$$u_n v_n = \underbrace{u_n(v_n - \ell_2)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{(u_n - \ell_1)\ell_2}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \ell_1 \ell_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \ell_2.$$

□

Lemme 12.32. Soient (u_n) et (v_n) deux suites, avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et (v_n) minorée à partir d'un certain rang par un réel $m > 0$. Alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant m$.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n v_n \geqslant m v_n$.
Soit donc $A > 0$. Alors $\exists n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $v_n \geqslant \dfrac{A}{m}$.
Et donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $u_n v_n \geqslant m v_n \geqslant m\frac{A}{m} \geqslant A$.
Et donc $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Corollaire 12.33 – *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell > 0$, et si $v_n \to +\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors à partir d'un certain rang, elle est plus grande que 1.
Et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\ell}{2}$, et donc $u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2} > 0$.
Donc dans les deux cas, le lemme précédent s'applique. □

De même, on prouve que

Proposition 12.34 :

- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell < 0$, et si $v_n \to +\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*
- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell > 0$, et si $v_n \to -\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*
- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell < 0$, et si $v_n \to -\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Comme pour le cas des sommes de limites, si $u_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbf{R}}$ et si $v_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbf{R}}$, alors si $\ell_1\ell_2$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2$.

Proposition 12.35 : *Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel $\ell \neq 0$. Alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$, de sorte que $\dfrac{1}{u_n}$ est bien défini.*

On a alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon = \dfrac{|\ell|}{2} > 0$ car $\ell \neq 0$. Par définition d'une limite, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Alors, pour $n \geqslant n_0$, d'après l'inégalité triangulaire renversée,

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \geqslant |\ell| - |u_n - \ell| \geqslant |\ell| - \varepsilon \geqslant \frac{|\ell|}{2} > 0.$$

En particulier[14], $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$.

On a alors, pour $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| = \dfrac{|u_n - \ell|}{|u_n|\,|\ell|}$.
En utilisant la minoration de $|u_n|$ que nous venons de prouver, il vient donc :

$$0 \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{|u_n|\,|\ell|} \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{\frac{|\ell|}{2}|\ell|} \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{2}.$$

Or, $\dfrac{|u_n - \ell|}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par conséquent, $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$. □

[14] Un nombre est nul si et seulement si sa valeur absolue est nulle.

Corollaire 12.36 – *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, avec $\ell_2 \neq 0$. Alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\frac{u_n}{v_n} = u_n \frac{1}{v_n}$, et d'utiliser les résultats vus précédemment pour l'inverse et le produit de limites. □

L'inverse d'une suite de limite nulle n'a pas toujours de limite, comme le prouve le cas de la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, qui tend bien vers 0 car $|u_n| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais $\frac{1}{u_n} = (-1)^n n$ n'admet pas de limite[15].
En revanche, on dispose de résultats pour les suites de signe constant.

[15] Considérer les suites des termes d'ordre pair et d'ordre impair pour s'en convaincre.

Proposition 12.37 : *Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont strictement positifs (resp. négatifs), et telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$).

Démonstration. Supposons (u_n) strictement positive, et soit $A > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{A}$.
Et donc pour $n \geqslant n_0$, $\frac{1}{u_n} \geqslant A$. Et par conséquent, $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Le cas d'une suite strictement négative se traite de la même manière en considérant $A < 0$. □

Proposition 12.38 : *Soit (u_n) une suite telle que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Remarque
Notons qu'en particulier, cette proposition s'applique si $u_n \to +\infty$ ou si $u_n \to -\infty$. Mais aussi à des suites sans limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, comme $(-2)^n$.

Démonstration. Commençons par noter que $\frac{1}{u_n}$ est bien définie, au moins pour n suffisamment grand. En effet, par définition d'une limite infinie, et en prenant $A = 1$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \geqslant 1$.
Et donc en particulier, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$.

Considérons à présent $\varepsilon > 0$ fixé. Alors il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.
Et donc en passant à l'inverse, pour $n \geqslant n_1$, $\left|\frac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon$.
Ceci prouve que $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

12.3.3 Tableau récapitulatif

Les tableaux suivants récapitulent les principaux résultats sur les limites :

$\lim u_n$	$\ell \in \mathbf{R}$	$\ell \in \mathbf{R}$ ou $+\infty$	$\ell \in \mathbf{R}$ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	**F. I.**

$\lim u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim u_n v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Remarquons que ceci nous donne également la limite de λu_n en fonction de celle de u_n (il suffit de prendre (v_n) constante égale à λ).
Seul le cas $\lambda = 0$ ne figure pas dans ce tableau, mais je suis à peu près sûr que vous savez trouver la limite de $0 \times u_n$...

12.3.4 Limites et inégalités

Le lemme qui suit sera largement généralisé dans le chapitre sur la continuité.

Lemme 12.39. Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire renversée, $\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Et donc, pour $n \geqslant n_0$, $\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$. □

La réciproque est complètement fausse, par exemple, si $u_n = (-1)^n$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, mais (u_n) est divergente.
La réciproque est toutefois vraie dans un cas particulier : $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 12.40 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

Remarque
Ce résultat reste valable si l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang.

Ce résultat suppose déjà que l'on sait les suites convergentes. Il ne peut en aucun cas suffire à prouver l'existence d'une limite !
Par exemple, bien que pour tout entier n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, il n'est pas question d'écrire qu'alors $-1 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \leqslant 1$. En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ ne veut rien dire !

Détails
Ici, -1 et 1 sont vus comme deux suites constantes, donc convergentes.

Démonstration. Par différence de limites, $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2 - \ell_1$.
Et donc $|v_n - u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell_2 - \ell_1|$.
Or puisque $u_n \leqslant v_n$, $v_n - u_n \geqslant 0$, de sorte que $|v_n - u_n| = v_n - u_n$.
Et donc par unicité de la limite de $v_n - u_n$, il vient $|\ell_2 - \ell_1| = \ell_2 - \ell_1$, de sorte que $\ell_2 - \ell_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ell_1 \leqslant \ell_2$. □

Il n'existe pas de résultat analogue avec des inégalités strictes : si $u_n < v_n$, la seule chose que l'on puisse affirmer[16], qui découle directement de la proposition précédente, c'est que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Il se peut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, mais ce n'est pas toujours le cas.
Par exemple, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, mais pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$.

[16] Sous réserve que ces suites convergent.

Lemme 12.41. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque
Notons que ceci prouve directement que (u_n) converge, ce qui n'était pas dans les hypothèses.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|v_n - 0| \leqslant \varepsilon$.
Mais $v_n \geqslant 0$, de sorte que $|v_n| = v_n$.
Et donc pour $n \geqslant n_0$, $\underbrace{|u_n|}_{=u_n} \leqslant \varepsilon$.
On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

Théorème 12.42 (Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites telles que :

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Remarque
Notons que ce résultat englobe le lemme précédent : il suffit de prendre $u_n = 0$ et $\ell = 0$.

Démonstration. On a $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$.
Mais $w_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$.
Et donc par le lemme précédent, $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit donc que $v_n = u_n + (v_n - u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + 0 = \ell$. □

Exemple 12.43

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3n^2+k}{2k+n^3}$.
Alors, pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{3n^2+1}{2n+n^3} \leqslant \dfrac{3n^2+k}{n^3+2k} \leqslant \dfrac{3n^2+n}{n^3+2}$.
En sommant pour k allant de 1 à n, il vient

$$n\frac{3n^2+1}{n^3+2n} \leqslant u_n \leqslant n\frac{3n^2+n}{n^3+2}.$$

Or, $\dfrac{3n^3+n}{n^3+2} = \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.
Et de même, $\dfrac{3n^3+n^2}{n^3+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.
Par le théorème des gendarmes, on en déduit donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.

Méthode
Rappelons que pour majorer une fraction (positive), il suffit de majorer son numérateur et de minorer son dénominateur.

Proposition 12.44 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors*
1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Démonstration. Nous ne prouvons que le point 1), la preuve de 2) étant similaire.
Soit $A \in \mathbf{R}$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$.
Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant A$.
Et ainsi, nous venons de prouver que $\forall A \in \mathbf{R}$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow v_n \geqslant A$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. □

12.3.5 Limites usuelles

Proposition 12.45 (Limite d'une suite géométrique) : *Soit $q \in \mathbf{R}$. Alors :*
1. *si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$*
2. *si $q \in]-1, 1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$*
3. *si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.*
4. *si $q < -1$, alors la suite $(q^n)_n$ n'a pas de limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.*

Démonstration. 1. Si $q > 1$, alors nous avons prouvé[17] que pour tout $A \in \mathbf{R}$, $\exists n_0 \in \mathbf{R}$ tel que $q^n \geq A$.
Puisque de plus (q^n) est croissante, on a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $q^n \geqslant q^{n_0} \geqslant A$.
Et donc ceci prouve que

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, q^n \geqslant A.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

[17] Juste après le fait que $\mathbf{R}$ soit archimédien.

2. Si $q \in]-1,1[$, alors pour tout n, $0 \leqslant |q^n| \leqslant |q|^n$.
   Mais $\frac{1}{|q|} > 1$, et donc par le point précédent, $\frac{1}{|q|^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Et donc $|q|^n = \frac{1}{\frac{1}{|q|^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Si $q = 1$, il n'y a rien à dire.
4. Enfin, si $q < -1$, alors $q^{2n} = (q^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $q^2 > 1$.
   Donc (q^n) n'est pas majorée, et donc ne peut converger, ni tendre vers $-\infty$.
   Et de même, $q^{2n+1} = q\left(q^2\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, de sorte que (q^n) n'est pas minorée, et donc ne tend pas vers $+\infty$.
   Et donc (q^n) n'a pas de limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.

□

Il est très simple de constater que $n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc que pour $x \in \mathbf{R}\setminus[-1,1]$, le calcul de l'éventuelle limite de $\frac{x^n}{n!}$ fait apparaître une forme indéterminée.

Proposition 12.46 : *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Posons alors $u_n = \frac{x^n}{n!}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc en particulier, à partir d'un certain rang n_0, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, et donc $|u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n|$.
Une récurrence rapide prouve alors que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$.
Et donc par le théorème des gendarmes $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Ce résultat signifie que $n!$ tend vers $+\infty$ «plus rapidement» que toute suite géométrique. Nous donnerons bientôt d'autres résultats allant dans ce sens, avec l'idée de comparer les vitesse de convergence des suites.

12.4 Théorèmes d'existence de limite

12.4.1 Le théorème de la limite monotone

Théorème 12.47 (Théorème de la limite monotone) :
1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante. Alors :*
   - *si (u_n) est majorée, elle converge, et sa limite est* $\sup\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$
   - *si (u_n) n'est pas majorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante. Alors :*
   - *si (u_n) est minorée, elle converge, et sa limite est* $\inf\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$
   - *si (u_n) n'est pas minorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration. Traitons le cas d'une suite croissante, celui d'une suite décroissante s'en déduit en changeant le sens des inégalités.
► **Supposons (u_n) majorée.**
Notons alors $\ell = \sup\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$, et considérons $\varepsilon > 0$ fixé.
Alors, d'après la caractérisation epsilonesque d'une borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant \ell$.
Et donc par croissance de (u_n), pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant \ell - \varepsilon$.
D'autre part, (u_n) étant majorée[18] par ℓ, il vient donc, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell \Rightarrow -\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant 0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque
Notons que ce sup existe bien puisque nous considérons une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$.

[18] Par définition, ℓ est le plus petit majorant de la suite.

Et donc nous avons prouvé que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, et donc (u_n) converge vers ℓ.

▸ **Supposons (u_n) non majorée.**
Soit $A \in \mathbf{R}$. Alors A n'est pas un majorant de (u_n), et donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant A$.
Et par croissance de (u_n), pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A$.
Nous avons donc prouvé que $\forall A \in \mathbf{R}$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

Notons que pour les suites monotones, cela traite tous les cas de figure : une suite croissante est soit convergente, soit diverge vers $+\infty$. Il n'y a pas d'autres cas possibles ! Notons également qu'il s'agit là d'une théorème d'existence, qui permet souvent de prouver qu'une limite existe, mais rarement de la calculer (sauf dans les cas où on connaît la valeur de $\sup\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$).

Exemple 12.48

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Alors pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$.

Donc (u_n) est croissante.

Prouvons par récurrence sur n que $\forall n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

Pour $n = 1$, c'est trivial. Supposons donc que $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{n^2+n}{n(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$, et en particulier, $u_n \leqslant 2$, de sorte que (u_n) est majorée.
Étant croissante, par le théorème de la limite monotone, elle converge.
Notons que tout ce que nous savons au sujet de sa limite est qu'elle est inférieure ou égale à 2. Mais les calculs que nous venons de faire ne nous permettent pas de la calculer.

Remarque
Mais nous avons déjà rencontré cette limite : elle vaut $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Enfin, remarquons que ceci nous dit que si une suite croissante converge vers ℓ, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell$ puisque $\ell = \sup\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ est un majorant de la suite (u_n).
Et de même, une suite décroissante convergente est toujours supérieure ou égale à sa limite.

12.4.2 Suites adjacentes

Définition 12.49 – Deux suites (a_n) et (b_n) sont **adjacentes** si

1. l'une est croissante
2. l'autre est décroissante
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0$.

Proposition 12.50 : *Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.*
Plus précisément : si (a_n) et (b_n) sont adjacentes, que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante, alors leur limite commune ℓ vérifie : $\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2$, $a_m \leqslant \ell \leqslant b_n$.

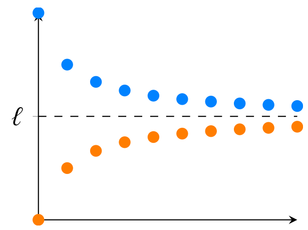


FIGURE 12.2– Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

Démonstration. Puisque $(a_n - b_n)$ est convergente, elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $-M \leqslant a_n - b_n \leqslant M$.
D'autre part, (b_n) étant décroissante, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n \leqslant b_0$.

Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = b_n + (a_n - b_n) \leqslant b_0 + M$.
Ceci prouve donc que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, et puisqu'elle est croissante, elle est donc convergente. Notons $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

On prouve sur le même principe que (b_n) est décroissante et minorée, donc qu'elle converge vers un réel ℓ_2.
On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = \ell_1 - \ell_2$.
Et donc, par unicité de la limite de $(a_n - b_n)$, $\ell_1 - \ell_2 = 0 \Leftrightarrow \ell_1 = \ell_2$.
Notons donc ℓ cette limite commune aux deux suites. En vertu de la remarque suivant le théorème 12.47, on a, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $a_m \leqslant \ell$ car (a_n) est croissante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\ell \leqslant b_n$ car (b_n) est décroissante. □

Exemple 12.51

Considérons les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

Alors $v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$, donc $(u_n)_n$ est croissante.

Enfin, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \dfrac{1-n}{(n+1)!}$, qui est négatif pour $n \geqslant 1$.
Et donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
Par conséquent, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et convergent vers une même limite.
Nous prouverons plus tard que cette limite commune aux deux suites vaut e.

12.5 Suites extraites

Définition 12.52 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On appelle **suite extraite de** (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ où $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une application **strictement croissante.**

Pour bien comprendre cette définition, un peu mystérieuse au premier abord, essayons de bien comprendre ce que représente la fonction[19] φ.
Une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ n'est rien d'autre qu'une suite strictement croissante d'entiers. Elle va donc prendre comme valeurs certains entiers, et pas d'autres.
Par exemple $\varphi(0) = 2, \varphi(1) = 3, \varphi(2) = 5, \varphi(3) = 7, \varphi(4) = 11, \varphi(5) = 13, \dots$.
Étant strictement croissante, elle ne peut pas «revenir en arrière», et donc ne prendra jamais les valeurs $0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \dots$.
Et alors la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite dont les premiers termes sont

$$u_{\varphi(0)} = u_2, u_{\varphi(1)} = u_3, u_{\varphi(2)} = u_5, u_{\varphi(3)} = u_7, u_{\varphi(4)} = u_{11}, \dots$$

C'est donc la suite $(u_n)_n$, à laquelle on a «enlevé» certains termes.

[19] φ est généralement appelée une **extractrice.**

Question subsidiaire
Avez-vous reconnu cette suite ? C'est la suite des nombres premiers !

Exemples 12.53

- La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de (u_n) : on a ici pris $\varphi(n) = n+1$.
- Les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Détails
La suite $(u_{2n})_n$ est la suite des termes d'ordre pair de (u_n), ses premiers termes sont u_0, u_2, u_4, u_6, ... De même, $(u_{2n+1})_n$ est formée des termes d'ordre impair de (u_n).

Lemme 12.54. Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n.
Puisque $\varphi(0) \in \mathbf{N}$, $\varphi(0) \geqslant 0$, donc la récurrence est initialisée.
Supposons que $\varphi(n) \geqslant n$. Alors, par stricte croissance de φ, $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$.
Or $\varphi(n+1)$ est un entier : s'il est supérieur strictement à n, il est donc supérieur ou égal à

$n+1$.
Et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$. □

Astuce
Quand on écrit $u_n \to \ell$, avec $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$, il s'agit là d'un moyen pratique d'écrire que (u_n) est soit convergente vers un réel ℓ, soit tend vers $+\infty$, soit tend vers $-\infty$.

Proposition 12.55 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
Alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ tend également vers ℓ.*

Démonstration. Soit V un voisinage de ℓ. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n \in V$.
En particulier, si $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une extractrice, alors pour $n \geqslant n_0$, on a $\varphi(n) \geqslant \varphi(n_0) \geqslant n_0$, et donc $u_{\varphi(n)} \in V$.
Ceci étant vrai quel que soit le voisinage V de ℓ, on a bien prouvé que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. □

Ce résultat permet notamment de prouver qu'une suite n'a pas de limite[20] : il suffit d'en trouver une suite extraite qui n'a pas de limite, ou encore deux suites extraites qui ont des limites différentes.

[20] Finie ou infinie.

Exemple 12.56

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = (-1)^n$.
Alors $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est constante égale à 1, donc si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite, celle-ci vaut nécessairement 1.
De même, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est constante égale à -1, donc $u_n \not\to 1$.
Et donc on en déduit que (u_n) n'admet pas de limite.

Proposition 12.57 : *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite[21] dans $\overline{\mathbf{R}}$ si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ ont une **même** limite.*

[21] Finie ou infinie.

⚠ L'exemple de la suite de terme général $(-1)^n$ prouve qu'il faut bien que les deux suites des termes d'ordre pairs et d'ordre impair aient la même limite, et qu'il ne suffit pas qu'elles possèdent chacune une limite.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé l'une des deux implications : si $u_n \to \ell$, alors $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$, puisqu'il s'agit de deux suites extraites de (u_n).

Passons à la réciproque et supposons qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ tel que $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$.
Soit alors V un voisinage de ℓ. Puisque $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_{2n} \in V$.
De même, il existe n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, $u_{2n+1} \in V$.
Et donc en posant $N = \max(2n_0, 2n_1+1)$, alors pour $n \geqslant N$, $u_n \in V$. En effet, soit $n \geqslant N$. Alors

- Si n est pair, alors il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p$. Puisque $n \geqslant N \geqslant 2n_0$, on a donc $p \geqslant n_0$ et donc $u_n = u_{2p} \in V$.
- Si n est impair, alors il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p+1$. Puisque $n \geqslant N \geqslant 2n_1+1$, on a donc $p \geqslant n_1$ et donc $u_n = u_{2p+1} \in V$.

Ceci étant vrai pour tout voisinage V de ℓ, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. □

Nous savons déjà qu'une suite convergente est bornée, et que la réciproque est fausse, comme le prouve le cas de la suite de terme général $(-1)^n$.
En revanche, les suites bornées possèdent la propriété suivante :

Théorème 12.58 (de Bolzano-Weierstrass) : *De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.
Autrement dit, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée, alors il existe $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée, et soient $a < b$ tels que (u_n) prenne ses valeurs dans $[a, b]$.
Le preuve qui suit est appelée «preuve par dichotomie» : nous allons couper en deux l'intervalle $[a, b]$ une infinité de fois.
Nous allons construire deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que le segment $[a_n, b_n]$ contienne toujours une infinité de termes de la suite (u_n).
Commençons par poser $a_0 = a$ et $b_0 = b$, et posons $\varphi(0) = 0$.
Nous allons construire par récurrence les deux suites (a_n) et (b_n) ainsi qu'une extractrice φ.
Supposons donc que a_n, b_n et $\varphi(n)$ ont été définis, et coupons en deux le segment $[a_n, b_n]$ en son milieu, de sorte qu'on obtient les segments $\left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$.
Alors l'un (au moins) de ces deux segments contient une infinité de termes de la suite (u_n).

> **Détails**
> Quand on parle d'une infinité de termes de la suite, on ne veut pas dire une infinité de valeurs (après tout, (u_n) pourrait être constante), mais on veut dire par là qu'il existe une infinité de n pour lesquels u_n est dans l'intervalle considéré.

Définissons alors a_{n+1} et b_{n+1} comme étant les bornes (avec $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$) d'un tel segment, et posons $\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbf{N} : k > \varphi(n) \text{ et } u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$. Remarquons que ce minimum existe bien, puisque l'ensemble considérer est non vide : si $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de valeurs, il en contient bien une supérieure à $\varphi(n)$, faut de quoi il serait fini, de cardinal inférieur ou égal à $\varphi(n)$.
Alors :

1. La suite (a_n) est croissante, puisqu'on a soit $a_{n+1} = a_n$, soit $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \geqslant a_n$
2. De même, (b_n) est décroissante.
3. L'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ a une longueur égale à la moitié de celle de l'intervalle $[a_n, b_n]$, de sorte que $(b_n - a_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et donc tend vers 0.
4. Par définition de φ, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$.

Les trois premiers points prouvent donc que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes, et donc qu'elles convergent vers une même limite ℓ.
Et alors, par le théorème des gendarmes, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Notons enfin que $(u_{\varphi(n)})_n$ est bien une suite extraite de (u_n) car φ est strictement croissante.
Nous avons donc bien construit une suite extraite de (u_n), convergente. □

Remarques. Notons qu'il peut exister plusieurs suites extraites de (u_n) qui convergent, et que celles-ci n'ont pas forcément la même limite.
Par exemple, si $u_n = (-1)^n$, alors les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, puisque constantes, mais l'une tend vers 1 et l'autre vers -1.
Enfin, remarquons qu'extraire une suite d'une suite (u_n), c'est composer **à droite** l'application $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, par une extractrice $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.
En particulier, si $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite d'une suite (u_n), pour extraire une suite de cette suite extraite, il faudra recomposer à droite par une autre extractrice $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, et on obtiendra alors la suite $(u_{(\varphi\circ\psi)(n)})$, et sûrement pas $(u_{\psi(\varphi(n))})$.
Une bonne raison en est que l'image de $\psi \circ \varphi$ n'a pas de raison d'être incluse dans celle de φ, et que donc les $u_{\psi(\varphi(n))}$ ne font pas forcément partie des $u_{\varphi(n)}$.
Par exemple, si $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est la fonction $n \mapsto 2n$, alors $(u_{\varphi(n)})$ est la suite des termes d'indices pairs de (u_n) à savoir $u_0, u_2, u_4, u_6, \dots$.
Si $\psi : n \mapsto 2n+1$, alors $u_{(\varphi\circ\psi)(n)} = u_{4n+2}$, de sorte que $(u_{(\varphi\circ\psi)(n)})$ est la suite formée des termes u_2, u_6, u_{10}, etc, qui est bien extraite de (u_{2n}).
En revanche, $u_{(\psi\circ\varphi)(n)} = u_{4n+1}$, et donc $(u_{(\psi\circ\varphi)(n)})$ est la suite formée des termes u_1, u_5, u_9, etc, qui n'a aucun terme commun avec (u_{2n}), et donc n'en est sûrement pas extraite.

12.6 Caractérisations séquentielles de la borne supérieure et de la densité

12.6.1 Borne supérieure/inférieure

Proposition 12.59 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure) : *Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$, et soit $M \in A$. Alors*

1. *M est la borne supérieure de A si et seulement si M est un majorant de A et qu'il existe une suite à valeur dans A qui tend vers M.*
2. *A n'est pas majorée si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui tend vers $+\infty$.*

Démonstration. 1. Supposons que $M = \sup A$. Alors M est un majorant de A, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\exists u_n \in A$ tel que $M - \frac{1}{n} < u_n \leqslant M$.
Et alors en passant à la limite on prouve que (u_n) converge et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $M \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant M$.
Donc il existe bien une suite à valeurs dans A de limite M.

Inversement, supposons que M soit un majorant de A et qu'il existe une suite (u_n) à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Alors $\exists N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $|u_n - M| < \varepsilon \Leftrightarrow M - \varepsilon < u_n < M + \varepsilon$.
Et en particulier, ceci est vrai pour $n = N$, et puisque M est un majorant de A, $M - \varepsilon < u_N \leqslant M$.
On reconnaît là la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure, puisque u_N est un élément de A.

2. Supposons que A ne soit pas majorée.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\exists u_n \in A$ tel que $u_n \geqslant n$.
Et donc nécessairement, la suite $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Inversement, s'il existe une suite (u_n) à valeurs dans A et de limite $+\infty$, montrons que A ne peut pas être majorée.
En effet, pour $B \in \mathbf{R}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\underbrace{u_N}_{\in A} \geqslant B + 1 > B$, et donc B n'est pas un majorant de A.

□

> **Remarque**
> C'est la définition de borne supérieure, avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Ces résultats s'étendent sans difficultés aux bornes inférieures :

Proposition 12.60 (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure) : *Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$, et soit $m \in A$. Alors*

1. *M est la borne inférieure de A si et seulement si m est un minorant de A et qu'il existe une suite à valeur dans A qui tend vers m.*
2. *A n'est pas minorée si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui tend vers $-\infty$.*

Exemple 12.61

Considérons $A = \left\{\frac{2}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbf{N}^*\right\}$.
Notons $u_n = \frac{2}{n} + (-1)^n$.
Alors il est facile de constater que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Donc -1 est un minorant de A. Puisque de plus, la suite $(u_{2n+1})_{n\geqslant 1}$, clairement à valeurs dans A, tend vers -1, $-1 = \inf A$.
Et d'autre part, $2 = u_2 \in A$ est un majorant de A, dans A : c'est le plus grand élément de A, et donc sa borne supérieure.

12.6.2 Caractérisation séquentielle de la densité

Proposition 12.62 : *Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors A est dense dans $\mathbf{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe une suite (u_n) à valeurs dans A telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.*

Démonstration. Commençons par supposer A dense dans $\mathbf{R}$, et soit $x \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $x_n \in A \cap \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$.
Et alors, par le théorème des gendarmes, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Donc il existe bien une suite à valeurs dans A qui converge vers x.

Inversement, supposons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x.
Soit alors I un intervalle ouvert non vide, et soient $a < b$ deux éléments de I.
Alors il existe une suite (x_n) à valeurs dans A, qui converge vers $\dfrac{a+b}{2}$.
Posons alors $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$.
Alors, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|x_n - \dfrac{a+b}{2}\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2} - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant \dfrac{a+b}{2} + \varepsilon$.
Soit encore, pour $n \geqslant n_0$, $a \leqslant x_n \leqslant b$.
Et donc en particulier, pour $n \geqslant n_0$, $x_n \in [a, b] \subset I$. Donc I contient bien un élément[22] de A. □

[22] Et même une infinité.

12.7 Extension aux suites complexes

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des suites réelles, mais il ne coûte pas plus cher de considérer des suites à valeurs complexes.

Définition 12.63 – Une suite complexe est une application $u : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$.

Se donner une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ revient à se donner les deux suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$.
Notons que $\mathbf{C}$ n'étant pas muni d'une relation d'ordre naturel, la notion de croissance/décroissance d'une suite complexe n'a pas de sens.
De même, on ne parlera pas de suite complexe majorée ou minorée.
En revanche, la notions de suite bornée a bien un sens : il suffit de remplacer les valeurs absolues par des modules.

Définition 12.64 – Une suite complexe (u_n) est dite bornée s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a toujours

$$|\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|,\ |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n| \text{ et } |u_n| \leqslant \sqrt{2}\max(\mathrm{Re}\, u_n, \mathrm{Im}\, u_n)$$

une suite complexe est bornée si et seulement si les deux suites[23] $(\mathrm{Re}\, u_n)_n$ et $(\mathrm{Im}\, u_n)_n$ sont bornées.

[23] réelles.

12.7.1 Convergence des suites complexes

Déjà vu ?
Cette définition semble être exactement la même que pour les suites réelles. Il y a tout de même une subtilité : ici on considère un module et plus une valeur absolue.

Définition 12.65 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\ell \in \mathbf{C}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Comme pour les suites réelles, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si la suite[24] $|u_n - \ell|$ tend vers 0.

[24] réelle.

Notons qu'une suite réelle peut être vue comme une suite complexe[25], et qu'elle converge vers $\ell \in \mathbf{R}$ en tant que suite complexe si et seulement si elle converge vers ℓ en tant que suite réelle.
Pour les suites complexes, on ne parlera pas de limite infinie, puisqu'il s'agit d'une notion dont la définition fait appel à la relation d'ordre, spécifique à $\mathbf{R}$.
En revanche, tous les résultats vus sur les sommes, produits et quotients[26] de limites restent valables pour les suites complexes, sans changer les preuves données dans le cas réel.
Le fait qu'une suite convergente soit bornée, ou que le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle tende vers 0 restent valable.

[25] Un réel est un complexe de partie imaginaire nulle.

[26] Dont le dénominateur a une limite non nulle.

En revanche, tout ce qui utilise la relation d'ordre tombe à l'eau dans le cas complexe, notamment :

- les résultats sur l'inverse d'une suite de limite nulle
- le théorème de la limite monotone
- le théorème des gendarmes
- la notion de suite adjacente
- ...

On dispose en revanche de deux résultats supplémentaires :

Proposition 12.66 : *Soit (u_n) une suite complexe, et soit $\ell \in \mathbf{C}$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si et seulement si* $\begin{cases} \mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$

Démonstration. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Souvenons-nous que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.
Et donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| = |\mathrm{Re}(u_n - \ell)| \leqslant \underbrace{|u_n - \ell|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

de sorte que $\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc $\mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(\ell)$.
On prouve de la même manière que $\mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(\ell)$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(\ell)$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|u_n - \ell| = \sqrt{\underbrace{\mathrm{Re}(u_n - \ell)^2}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\mathrm{Im}(u_n - \ell)^2}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}}.$$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

Corollaire 12.67 – *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\overline{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{\ell}$.*

Démonstration.

$$\overline{u_n} = \mathrm{Re}(u_n) - i\,\mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(\ell) - i\,\mathrm{Im}(\ell) = \overline{\ell}$$

□

12.7.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

La notion de suite extraite a toujours du sens pour une suite complexe, et une suite extraite d'une suite convergente est toujours convergente.
Le théorème de Bolzano-Weierstrass reste valable pour des suites complexes, mais il faut alors adapter la démonstration du cas réel.

Théorème 12.68 : *De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite complexe bornée. Notons $a_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(u_n)$.
Puisque (u_n) est bornée, il en est de même de (a_n) et (b_n), qui sont des suites réelles.
En particulier, on peut[27] extraire une suite convergente de (a_n) : il existe $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et un réel a tels que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
On pourrait de même extraire $(b_{\psi(n)})_n$ une suite convergente de (b_n), mais alors rien

[27] C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles.

n'oblige φ et ψ à prendre des valeurs communes.
Par exemple, si $(a_{\varphi(n)})_n$ est la suite des termes d'indice pair de (a_n) et que $(b_{\psi(n)})_n$ est la suite des termes d'indice impair de (b_n), comment extraire une suite convergente de (u_n) à l'aide de φ et de ψ ?
L'idée est d'aller extraire une suite convergente non pas directement de $(b_n)_n$, mais de $(b_{\varphi(n)})_n$.
En effet, $(b_{\varphi(n)})_n$ est bornée car (b_n) l'est, et donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass réel, on peut en extraire une suite convergente.
Autrement dit, il existe $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(b_{\varphi(\psi(n))})_n$ converge vers un réel b.
Notons que $\varphi \circ \psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante car composée de deux fonctions strictement croissantes.
La suite $(a_{(\varphi\circ\psi)(n)})_n$ converge vers a car il s'agit d'une suite extraite de $(a_{\varphi(n)})_n$.
Et donc $u_{(\varphi\circ\psi)(n)} = a_{(\varphi\circ\psi)(n)} + ib_{(\varphi\circ\psi)(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + ib \in \mathbf{C}$.
Nous avons donc bien extrait une suite convergente de $(u_n)_n$. □

Autrement dit

Lorsqu'on a extrait $(a_{\varphi(n)})$, on n'a gardé que certains indices $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, . . . Extraire de nouveau, c'est ne garder que certains de ces indices déjà «sélectionnés».

⚠ Attention !

Comme mentionné plus haut, extraire, c'est **composer à droite** par une extractrice.