13 Calcul matriciel

Dans tout le chapitre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Les éléments de $\mathbf{K}$ seront appelés des scalaires.

13.1 Définitions, opérations sur les matrices

Définition 13.1 – Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. On appelle matrice à n lignes et à p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$ toute application $A : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array} \right.$.
Une telle matrice A est représentée[1] sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, le scalaire $a_{i,j}$ est appelé coefficient d'indice (i,j) de A, et on le note généralement $a_{i,j}$ où $A_{i,j}$.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.
Lorsque $n = p$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$.

[1] Et nous n'aurons **jamais** besoin de la voir comme une application.

Exemple 13.2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{R}) \text{ et } \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}).$$

Remarques. ▶ Notons que se donner une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ revient à se donner une famille de $n \times p$ scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ indicée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
Il ne sera pas rare qu'on écrive «Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$», ce qui signifie qu'on considère la matrice A dont les coefficients sont les $a_{i,j}$.
▶ Par définition, deux matrices de même tailles sont égales si et seulement si tous leurs coefficients le sont.

Les éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ sont appelés matrices lignes, et ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ sont appelés matrices colonnes.
On identifie généralement $\mathbf{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, en identifiant le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ à la matrice (à n lignes et une seul colonne) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Définition 13.3 – ▸ Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. On appelle matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et on note $0_{n,p}$ (ou tout simplement 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) la matrice de taille (n,p) dont tous les coefficients sont nuls.
▸ Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on appelle matrice identité d'ordre n, et on note I_n, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont les $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Autrement dit, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Terminologie
La quantité $\delta_{i,j}$ est appelée **symbole de Kronecker.**

Définition 13.4 (Matrices carrées remarquables) – Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est

1. triangulaire supérieure si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
   Autrement dit si tous les coefficients situés sous la diagonale sont nuls.
2. triangulaire inférieure si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
   Autrement dit si tous les coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls.
3. diagonale si elle est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure, c'est-à-dire si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
   C'est donc une matrice dont les seuls coefficients non nuls sont sur la diagonale.
   Pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, on note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont (dans cet ordre) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
   Autrement dit, $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
4. scalaire si elle est diagonale, et que tous ses coefficients sont égaux. Autrement dit, s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel

13.1.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Définition 13.5 (Multiplication d'une matrice par un scalaire) – Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors on note λA la matrice $(\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Notons qu'en particulier, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $0 \cdot A = 0_{n,p}$, et que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot 0_{n,p} = 0$.

Proposition 13.6 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et soient $(\lambda,\mu) \in K^2$. Alors : $(\lambda\mu)A = \lambda \cdot (\mu A)$*

Définition 13.7 – Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Alors on note $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Remarque
Notons que la somme de deux matrices n'est définie que pour des matrices de même taille.

Proposition 13.8 : *Soient $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^3$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors :*

1. *$A + B = B + A$ (commutativité de la somme)*
2. *$A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité de la somme)*
3. *$0_{n,p} + A = A + 0_{n,p} = A$ ($0_{n,p}$ est un élément neutre pour la somme)*
4. *il existe une unique matrice $D \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ telle que $A + D = D + A = 0_{n,p}$, et cette matrice est $-A = -1 \cdot A$.*
5. *$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$*
6. *$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.*

Définition 13.9 – Soient $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, qui vaut 1.
Les $E_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$ sont appelée **matrices élémentaires.**

Exemple 13.10

Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$, il y a six matrices élémentaires, qui sont

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 13.11 : *Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Alors*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}.$$

On dit que A est combinaison linéaire des matrices $E_{i,j}$.

Remarque. Il est facile de constater que si $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} E_{i,j}$, avec $\lambda_{i,j} \in \mathbf{K}$, alors nécessairement, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $\lambda_{i,j} = a_{i,j}$.
Autrement dit, l'écriture de A comme combinaison linéaire des $E_{i,j}$ est unique.

13.1.2 Produit matriciel

Définition 13.12 (Produit de matrices) – Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$.
Alors on définit le produit AB comme étant la matrice $(c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ où

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque

Le produit de deux matrices n'est défini que si la première possède autant de colonnes que la seconde possède de lignes.

Remarques. ► Notons que le produit de deux matrices carrées de même taille est toujours défini.
► Il se peut que le produit AB soit défini, sans que BA le soit. Par exemple si $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{K})$.

Exemples 13.13

► Le produit de matrices, contrairement au produit de scalaires, n'est pas commutatif : on n'a pas toujours $AB = BA$, même lorsque ces deux produits sont bien définis. Ainsi, on a par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $AB = BA$, on dit que A **et** B **commutent.**

► Plus surprenant, il se peut qu'un produit de matrices soit nul sans qu'aucun des facteurs ne soit nul.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

Proposition 13.14 :

1. *pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, pour tout $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et tout $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$, $(AB)C = A(BC)$ (associativité du produit matriciel)*
2. *pour $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}^2$, on a*

   $$(\lambda A+\mu A')B = \lambda AB+\mu A'B \text{ et } A(\lambda B+\mu B') = \lambda AB+\mu AB' \quad \textit{(bilinéarité du produit)}.$$

3. *pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $I_n A = AI_p = A$.*

Démonstration. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, r]\!]$. Alors

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} [AB]_{i,k}\, C_{k,j} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{p} A_{i,\ell}B_{\ell,k}C_{k,j}.$$

Et de même,

$$[A(BC)]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{p} A_{i,\ell}\, [BC]_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{p} A_{i,\ell} \sum_{k=1}^{q} B_{\ell,k}C_{k,j}.$$

□

Proposition 13.15 (Multiplication par une ligne/une colonne) : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.*

1. *Si E_j est la matrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du $j^{\text{ème}}$ qui vaut 1, alors AE_j est égal à C_j : la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.*

   Plus généralement, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, on a $AX = x_1C_1+x_2C_2+\cdots+x_pC_p$.
2. *De même, si E_i est la matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ dont seul le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne est le seul non nul, alors $E_iA = L_i$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.*

Autrement dit

E_i est une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.

Démonstration. Il n'y a que la première à faire, la suite découle de la bilinéarité du produit. Soit donc $j \in [\![1, n]\!]$. Alors AE_j est une matrice colonne, dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne est

$$[AE_j]_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, [E_j]_k = a_{i,j}.$$

Nous reconnaissons là le $i^{\text{ème}}$ coefficient de C_j, donc $AE_j = C_j$. □

Définition 13.16 (Puissances d'une matrice carrée) – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors, on note $A^0 = I_n$, et pour $k \in \mathbf{N}^*$,

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

On a alors, pour tous $(k, \ell) \in \mathbf{N}^2$, $A^{k+\ell} = A^k A^\ell = A^\ell A^k$.
Notons en revanche qu'on n'a pas nécessairement $(AB)^k = A^k B^k$.
Toutefois, ceci reste vrai si A et B commutent, car alors

$$(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2 \text{ puis } (AB)^3 = (AB)^2AB = A^2B^2AB = A^2AB^2B = A^3B^3, \cdots$$

Plus généralement, si A et B commutent, alors toute puissance de A commute avec toute puissance de B.

Définition 13.17 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. S'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $A^p = 0$, on dit que A est **nilpotente**.
On appelle alors indice de nilpotence de A le plus petit[2] entier k tel que $A^{k-1} \neq 0$ et $A^k = 0$.

[2] Et en fait l'unique.

Exemple 13.18

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$.
Donc A est une matrice nilpotente, et son indice de nilpotence vaut 3.

Proposition 13.19 (Binôme de Newton matriciel) : *Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ deux matrices **qui commutent**, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.*
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Démonstration. Par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, il n'y a pas grand chose à dire : $(A+B)^0 = I_n = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{0-k}$.

Supposons que $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)(A+B)^n = (A+B) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= A \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} + B \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k+1} B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} BA^k B^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k+1} B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} A^i B^{n-(i-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Commutation
C'est ici qu'on utilise le fait que A et B commutent : si $AB = BA$, alors pour tout k,

$$BA^k = A^k B.$$

Chgt d'indice
Dans la première somme, on a posé $i = k+1$, de sorte que $k = i - 1$.

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} A^{n+1}B^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}A^kB^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} A^0B^{n+1}\\
&= A^0B^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)A^kB^{n+1-k} + A^{n+1}B^0\\
&= \binom{n+1}{0}A^0B^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}A^kB^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}A^{n+1}B^{n+1-(n+1)} && \text{Formule de Pascal.}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^kB^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

□

Exemple 13.20

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Alors $A = 3i_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=T}$.

Puisque I_2 commute à toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, elle commute à T, et donc $3I_2$ commute également avec T.

Or, on a $T^2 = I_2$, puis $T^3 = T^2T = I_2T = T$, $T^4 = I_2$, $T^5 = T$, etc.

Et donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, $T^k = \begin{cases} I_2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ T & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Par la formule du binôme, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$
\begin{aligned}
A^n = (T+3I_2)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^k(3I_2)^{n-k}\\
&= \left(\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\right)I_2 + \left(\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\right)T\\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k} & -\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k} \\ -\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k} & \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Notons alors $S_1 = \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}$.

Alors $S_1 + S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k} = (1+3)^n = 4^n$ et

$$S_1 - S_2 = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k} - \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k3^{n-k} = (-1+3)^n = 2^n.$$

On en déduit que $S_1 = \dfrac{4^n+2^n}{2}$ et $S_2 = \dfrac{4^n-2^n}{2}$.

Et donc

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n+2^n & 2^n-4^n \\ 4^n-2^n & 4^n+2^n \end{pmatrix}.$$

Proposition 13.21 : *Le produit de deux matrices A et B triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieurs, resp. diagonales) est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale).*
De plus, dans les trois cas, le coefficient diagonal (i,i) de AB vaut $a_{i,i}b_{i,i}$ (le produit des coefficients diagonaux (i,i) de A et de B).

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices triangulaires supérieures.
Alors pour $i \geqslant j$, on a

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} B_{k,j} + A_{i,i}B_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{i,k} \underbrace{B_{k,j}}_{=0} = A_{i,i}B_{i,i}.$$

Donc en particulier, pour $i = j$, $(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}$, et pour $i > j$, $(AB)_{i,j} = 0$, ce qui est bien la définition de matrice triangulaire supérieure.
On raisonne de même pour les triangulaires inférieures, et enfin, une matrice diagonale n'est rien d'autre qu'une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure. □

Proposition 13.22 (Produit par blocs) : *Soient $A, A', B, B', C, C', D, D'$ des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$ dont les tailles sont comme ci-dessous. Alors*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & q' \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ p' \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} r & r' \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} & \begin{array}{c} q \\ q' \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}.$$

13.1.3 Transposée d'une matrice

Définition 13.23 – Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On appelle **transposée de** A et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ dont le coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $a_{j,i}$.
Dit autrement, la transposition échange les lignes et les colonnes de A, en ce sens que la première ligne de A est la première colonne de ${}^tA$, etc.

Exemple 13.24

Dans le cas d'une matrice carrée, transposer A revient à effectuer une symétrie par rapport à la diagonale de A. Par exemple :

$${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que les coefficients diagonaux restent alors inchangés.

Proposition 13.25 (Linéarité de la transposition) : *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors*

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\,{}^tA + \mu\,{}^tB.$$

Démonstration. Pour $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, on a

$$({}^t(\lambda A + \mu B))_{i,j} = (\lambda A + \mu B)_{j,i} = \lambda A_{j,i} + \mu B_{j,i} = \lambda({}^tA)_{i,j} + \mu({}^tB)_{i,j}.$$

□

Proposition 13.26 : *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, ${}^t({}^tA) = A$.*

Démonstration. □

Proposition 13.27 (Transposée d'un produit) : *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. Alors ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.*

Démonstration. On a, pour $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$,

$$\left[{}^t(AB)\right]_{i,j} = [AB]_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k} b_{k,i}.$$

Mais d'autre part, le coefficient (i,j) du produit ${}^tB\,{}^tA$, où ${}^tB \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{K})$ et ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ vaut

$$\sum_{k=1}^{p} ({}^tB)_{i,k}({}^tA)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k} b_{k,i}.$$

□

Définition 13.28 – Une matrice carrée A est dite :

1. **symétrique** si ${}^tA = A$
2. **antisymétrique** si ${}^tA = -A$. Notons que dans ce cas, les coefficients diagonaux de A sont automatiquement nuls.

Exemples 13.29

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

13.1.4 Trace d'une matrice carrée

Définition 13.30 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors on appelle **trace de** A, et on note $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \in \mathbf{K}$. C'est la somme des coefficients diagonaux de A.

Exemples 13.31

On a

- $\operatorname{tr}(0) = 0$ et $\operatorname{tr}(I_n) = n$.
- Plus généralement, $\operatorname{tr}(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
- Si A est antisymétrique, alors[3] $\operatorname{tr}(A) = 0$.

[3] En effet, tous les coefficients diagonaux de A sont alors nuls.

Proposition 13.32 (Linéarité de la trace) : *Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soient $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors*

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B).$$

Démonstration. Soient donc $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda A + \mu B]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B).$$

□

Proposition 13.33 : *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors $\operatorname{tr}({}^tA) = \operatorname{tr}(A)$.*

Démonstration. C'est évident car les coefficients diagonaux de ${}^tA$ sont les mêmes que ceux de A. □

Danger ! Pour autant, on n'a pas $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A) \times \operatorname{tr}(B)$. Par exemple,

$$\operatorname{tr}(I_n^2) = n \neq \operatorname{tr}(I_n)^2 = n^2.$$

Proposition 13.34 : *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.*

Démonstration. Par définition,

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{p} (BA)_{k,k}$$

□

Remarque. La condition sur les tailles des matrices signifie en fait que les deux produits AB et BA sont bien définis.

13.2 Inverse d'une matrice carrée

13.2.1 Matrices et systèmes linéaires

Considérons un système linéaire $(\mathcal{S}) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$ de n équations à p inconnues.

Posons alors $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Alors, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, on a $AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & \cdots & a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & \cdots & a_{2,p}x_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & a_{n,2}x_2 & \cdots & a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$, de sorte que résoudre le système $(\mathcal{S})$ revient à résoudre l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.

Lorsque a et b sont deux scalaires, avec $a \neq 0$, il est facile de résoudre l'équation $ax = b$: il suffit de diviser les deux membres par a, et alors l'unique solution est $x = \dfrac{b}{a}$.

Question : existe-t-il une notion aussi simple pour les systèmes ?

La réponse est non, puisque nous savons que des systèmes n'ont pas toujours une unique solution, mais creusons un peu dans cette direction.

13.2.2 Matrices inversibles

Définition 13.35 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, on dit que A est **inversible**.
Un tel B est alors unique, et on l'appelle **l'inverse de** A et on le note A^{-1}.
On note $GL_n(\mathbf{K})$, et on appelle **groupe linéaire d'ordre** n l'ensemble de toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Démonstration. Il faut tout de même prouver l'unicité d'une telle matrice B, lorsqu'elle existe. Supposons qu'il existe deux matrices B_1, B_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB_1 = AB_2 = I_n = B_1A = B_2A$. Alors, en multipliant à gauche par B_2 la relation $AB_1 = I_n$, il vient

$$B_2AB_1 = B_2I_n \Leftrightarrow (B_2A)B_1 = B_2 \Leftrightarrow I_nB_1 = B_2 \Leftrightarrow B_1 = B_2.$$

□

Exemples 13.36

► La matrice identité est inversible, et est égale à son propre inverse, puisque $I_n^2 = I_n$.
► Plus généralement, toute matrice diagonale D dont les coefficients valent ± 1 est inversible, et égale à son propre inverse puisqu'alors

$$D^2 = \mathrm{Diag}(\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)^2 = \mathrm{Diag}((\pm 1)^2, (\pm 1)^2, \dots, (\pm 1)^2) = \mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1) = I_n.$$

► Une matrice A qui possède une ligne nulle ne peut pas être inversible, puisque pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB (où la $i^{\text{ème}}$ ligne de A est nulle) est encore nulle. Et donc AB ne peut en aucun cas valoir l'identité.
De même, une matrice dont une colonne est nulle ne peut pas être égale à l'identité.

Proposition 13.37 : *Soient $A, B \in GL_n(\mathbf{K})$ deux matrices inversibles. Alors*

1. *A^{-1} est inversible, et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$*
2. *AB est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
3. *pour tout $k \in \mathbf{N}$, A^k est inversible, et $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$*
4. *${}^tA$ est inversible, et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.*

⚠ Attention !
L'inverse d'un produit est bien le produit des inverses, mais on n'oubliera pas de changer l'ordre !

Démonstration. 1. On a $A^{-1}A = AA^{-1}$, donc il existe bien une matrice B (égale à A) telle que $A^{-1}B = BA^{-1} = I_n$.
Et donc A^{-1} est inversible, d'inverse A.

2. On a $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$ et de même $ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$.
Donc AB est inversible, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.
3. Par récurrence sur k. Si $k = 0$ c'est évident puisque I_n est inversible et $I_n = \left(A^{-1}\right)^0$.
Supposons donc A^k inversible, d'inverse $\left(A^{-1}\right)^k$. Alors
$$A^{k+1}\left(A^{-1}\right)^{k+1} = A^kAA^{-1}\left(A^{-1}\right)^k = A^kI_n\left(A^{-1}\right)^k = A^k\left(A^{-1}\right)^k = I_n.$$
Et on prouve de même que $\left(A^{-1}\right)^{k+1}A^{k+1} = I_n$, donc que A^{k+1} est inversible, d'inverse $\left(A^{-1}\right)^{k+1}$.
4. On a ${}^tA\,{}^t\left(A^{-1}\right) = {}^t\left(A^{-1}A\right) = I_n$ et de même ${}^t\left(A^{-1}\right){}^tA = I_n$.

□

Remarques. On note alors, si $k \in \mathbf{N}$, $A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k$ et alors les propriétés usuelles des puissances restent valables pour des puissances négatives.
De même, on note ${}^tA^{-1}$ pour l'inverse de la transposée de A, sans se préoccuper de savoir si on transpose ou si on inverse en premier, puisque la proposition ci-dessus nous dit que c'est la même chose.

13.2.3 Inversibilité des matrices 2×2

Définition 13.38 – Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. On appelle **déterminant de** A, et on note $\det(A)$ le scalaire défini par $\det(A) = ad - bc$.

Proposition 13.39 : *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$*. Alors* A *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$*, et dans ce cas, on a* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$*.*

Démonstration. Commençons par remarquer que

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\det(A) \neq 0$, alors on a

$$-\frac{1}{\det A}\left(A^2 - \operatorname{tr}(A)A\right) = I_2 \Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{\det A}(A-(a+d)I_2)\right) = \left(-\frac{1}{\det A}(A-(a+d)I_2)\right)A = I_2.$$

Et donc A est inversible, d'inverse $\left(-\dfrac{1}{\det A}(A-(a+d)I_2)\right) = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Si $\det(A) = 0$, supposons par l'absurde que A soit inversible.
Puisque $A^2 - \operatorname{tr}(A)A = 0$, en multipliant[4] par A^{-1}, il vient $A = \operatorname{tr}(A)I_2$, qui est inversible si et seulement si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.
Mais alors $\det A = \det\begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) & 0 \\ 0 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix} = \operatorname{tr}(A)^2 \neq 0$, ce qui est absurde. □

[4] À droite ou à gauche.

Proposition 13.40 : *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$*. Alors* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$*.*

Démonstration. C'est un simple[5] calcul. □

[5] Mais néanmoins désagréable (bien que sans difficulté).

Corollaire 13.41 – *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$*. Alors* AB *est inversible si et seulement si* A *et* B *sont toutes deux inversibles.*

Démonstration. Le produit AB est inversible si et seulement si $\det(AB) \neq 0$.
Soit encore si et seulement si $\det(A)\det(B) \neq 0$. Mais un produit de scalaires[6] est nul si et seulement si chacun de ses facteurs est nul, donc $\det A \det B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \det A \neq 0 \\ \det B \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} A \text{ inversible} \\ B \text{ inversible} \end{cases}$ □

[6] Car le déterminant est bien un scalaire et plus une matrice.

Interprétation du déterminant : soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.
Si l'une des colonnes de A est nulle (par exemple si $a = c = 0$), alors $\det(A) = 0$.
Si les deux colonnes de A sont non nulles et proportionnelles, alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, et alors

$$\det(A) = ad - bc = \lambda bd - b\lambda d = 0.$$

En revanche, si les deux colonnes de A ne sont pas proportionnelles, avec par exemple $a \neq 0$. Puisque $b = a\dfrac{b}{a}$, on n'a pas $c\dfrac{b}{a} = d$, faute de quoi la deuxième colonne de A serait égale à $\dfrac{b}{a}$ fois la première.
Et donc $db \neq ad \Leftrightarrow \det A \neq 0$.
Ainsi, une matrice 2×2 est inversible si et seulement si ses colonnes ne sont pas proportionnelles.
Puisque A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible, A est inversible si et seulement si les colonnes de ${}^tA$ ne sont pas proportionnelles. Mais ces colonnes sont les lignes de A.

13.2.4 Matrices inversibles et systèmes de Cramer

Rappelons qu'un système de Cramer est un système qui possède une unique solution.

Proposition 13.42 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors A est inversible si et seulement si pour tout $B \in \mathbf{K}^n$, le système $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathbf{K}^n$ (où on a identifié $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K}^n$) possède une unique solution (et donc est un système de Cramer).*

Plus généralement

Si A est inversible, alors la multiplication (à gauche ou à droite) par A d'une égalité entre matrices est réversible : l'opération inverse étant la multiplication par A^{-1}.
En particulier, multiplier une équation matricielle par A donne une équation équivalente à la première.
Ici, $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Démonstration. Supposons A inversible. Alors pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ posons $X = A^{-1}B$.
Alors $AX = AA^{-1}B = I_nB = B$.
Donc le système $AX = B$ possède bien une solution et inversement, si X est une solution de $AX = B$, en multipliant à gauche par A^{-1}, il vient $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.
Donc $AX = B$ possède une unique solution.

Inversement, supposons que pour tout B, le système $AX = B$ possède une unique solution.
Notons alors $E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ les matrices élémentaires[7] de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $AX = E_i$ possède une unique solution X_i.
Soit alors B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est X_i.
Alors, pour tout i, la $i^{\text{ème}}$ colonne de AB est obtenue[8] en multipliant A par X_i, et donc vaut E_i.
Autrement dit $AB = I_n$.
Reste à vérifier qu'on a également $BA = I_n$. Mais $A(BA - I_n) = ABA - A = I_nA - A = A - A = 0$.
Donc le raisonnement inverse à celui que nous venons de tenir, en décomposant ce produit de matrice colonne par colonne, prouve que la $i^{\text{ème}}$ colonne de $BA - I_n$ est solution de l'équation $AX = 0$.
Mais cette équation possède $0_{n,1}$ comme unique[9] solution.
Donc la $i^{\text{ème}}$ colonne de $BA - I_n$ est nulle, et donc $BA - I_n = 0 \Leftrightarrow BA = I_n$.
Ceci achève donc de prouver que A est inversible. □

[7] Qui se trouvent aussi être les colonnes de I_n.

[8] C'est un cas particulier de produit par blocs.

[9] L'unicité venant de l'hypothèse faite sur les systèmes $AX = B$.

Ceci nous fournit déjà un moyen de tester si une matrice est inversible, et de calculer son inverse : il s'agit de vérifier si le système $AX = Y$ possède une unique solution, et ce pour tout $Y \in \mathbf{K}^n$.
Lorsque c'est le cas, il faut de plus déterminer l'expression de l'unique solution de $AX = Y$ en fonction de Y. En effet, cette solution est $A^{-1}Y$.

Exemples 13.43

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\-2 & -1 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, et résolvons le système $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - y + 2z &=& a\\ -2x - y &=& b\\ x - y + z &=& c\end{array}\right. \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x - y + z &=& c\\ -2x - y &=& b\\ 3x - y + 2z &=& a\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x - y + z &=& c\\ -3y + 2z &=& b + 2c\\ 2y - z &=& a - 3c\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow -3L_3+2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x - y + z &=& c\\ -3y + 2z &=& b + 2c\\ z &=& 3a + 2b - 5c\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & & & = & -3a & - & 2b & + & 6c \\ & - & 3y & & & = & -6a & - & 3b & + & 12c \\ & & & & z & = & 3a & + & 2b & - & 5c \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -L_2/3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & & & = & -3a & - & 2b & + & 6c \\ & & y & & & = & 2a & + & b & - & 4c \\ & & & & z & = & 3a & + & 2b & - & 5c \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & & & & & = & -a & - & b & + & 2c \\ & & y & & & = & 2a & + & b & - & 4c \\ & & & & z & = & 3a & + & 2b & - & 5c \end{array} \right.$$

Puisque ce système possède bien toujours une unique solution, A est inversible.
Et donc $A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b+2c \\ 2a+b-4c \\ 3a+2b-5c \end{pmatrix}$, de sorte que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

► Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Soient alors (a,b,c) et $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. On a alors

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & - & y & + & 2z & = a \\ -2x & + & y & + & 3z & = b \\ 3x & - & y & - & 8z & = c \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcc} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & - & y & + & 7z & = & b+2a \\ & & 2y & - & 14z & = & c-3a \end{array} \right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcc} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & - & y & + & 7z & = & b+2a \\ & & & & 0 & = & a+2b+c \end{array} \right.$$

Ce système ne possède pas de solution si $a+2b+c \neq 0$, et donc B n'est pas inversible.

13.2.5 Inversibilité et opérations élémentaires

Nous avons prouvé en TD que pour $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

Revenons à présent sur les opération élémentaires que nous avions effectuées sur les lignes d'un système lors de la méthode du pivot.

Ces mêmes opérations peuvent se réaliser sur les lignes d'une matrice, et possèdent alors une interprétation matricielle.
► **Multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne par λ** : revient à multiplier A **à gauche** par $\mathrm{Diag}(1,\dots,1,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\lambda},1,\dots,1)$.

Cette matrice est inversible, d'inverse $\mathrm{Diag}\left(1,\dots,1,\frac{1}{\lambda},1,\dots,1\right)$.
► **Ajouter λL_j à L_i** : revient à multiplier A **à gauche** par $I_n + \lambda E_{i,j}$.
Puisque $E_{i,j}^2 = 0$ lorsque $i \neq j$, la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$ est inversible, d'inverse $I_n - \lambda E_{i,j}$.
► **Échanger les lignes L_i et L_j** : revient à effectuer successivement les opérations $L_i \leftarrow L_i + L_j, L_j \leftarrow -L_j, L_j \leftarrow L_j + L_i$ et $L_i \leftarrow L_i - L_j$.
Autrement dit, cela revient à multiplier A à gauche par le produit de quatre matrices inversibles, donc par une matrice inversible.
Plus précisément, cette matrice est $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.
Elle est égale à son propre inverse.

Proposition 13.44 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible. Alors A est inversible si et seulement si PA est inversible.*

Démonstration. Si A est inversible, alors PA est le produit de deux matrices inversibles, donc est inversible.
Et si PA est inversible, alors $A = P^{-1}PA$ est le produit de deux matrices inversibles. □

Corollaire 13.45 – *Réaliser des opérations sur les lignes d'une matrice ne change pas son inversibilité.*

13.2.6 Introduction au vocabulaire de l'algèbre linéaire

Définition 13.46 – Soient $A_1, A_2, \dots, A_m$ des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On appelle **combinaison linéaire de** $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ toute matrice de la forme $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{K}^m$.

Notons que la matrice nulle est combinaison linéaire de toute famille $(A_1, \dots, A_m)$ puisque $0_{n,p} = 0 \cdot A_1 + \cdots + 0 \cdot A_m$.

Exemple 13.47

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Nous avons déjà mentionné que pour tout $X \in \mathbf{K}^n$, AX est combinaison linéaire des colonnes de A.
Et donc A est inversible si et seulement si pour tout $Y \in \mathbf{K}^n$, $AX = Y$ possède une unique solution, soit si et seulement si tout $Y \in \mathbf{K}^n$ s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire des colonnes de A.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée, et soient $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ ses lignes.
Si l'une des lignes (disons la $i^{\text{ème}}$) de A est nulle, alors A n'est pas inversible. En effet, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB est nulle, et donc AB ne peut valoir I_n.
Si l'une des lignes est combinaison linéaire des autres : il existe $i \in [\![1, n]\!]$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$ tels que

$$L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j L_j.$$

Alors les colonnes de ${}^t A$ (qui sont ${}^t L_1, \dots, {}^t L_n$) sont liées par la même relation :

$${}^t L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j {}^t L_j.$$

Soit alors $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{i-1} \\ -1 \\ \lambda_{i+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$. On a ${}^t A X = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j {}^t L_j - {}^t L_i = 0$.

Puisque $X \neq 0$, l'équation ${}^t A X = 0$ possède au moins deux solutions : $0_{n,1}$ et X. Donc ${}^t A$ n'est pas inversible, et donc A n'est pas non plus inversible.

Définition 13.48 – Soient $A_1, \dots, A_m$ des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On dit que la famille $(A_1, \dots, A_m)$ est **libre** si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{K}^m, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i = 0_{n,p} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Une famille est liée si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires **non tous nuls** tels que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i = 0$.

Danger !
Ne pas confondre non tous nuls et tous non nuls. Le premier signifie que l'un au moins des λ_i est non nul (les autres pouvant être nuls ou non), le second signifiant qu'aucun des λ_i n'est nul.

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors $A_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \lambda_i A_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \right) A_i$.

Et donc l'une des matrices de la famille est combinaison linéaire des autres.

Inversement, si l'une des matrices, disons A_j est combinaison linéaire des autres , alors il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_m$ tels que $A_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \lambda_j A_j$.

En particulier

Ceci vaut notamment si A_j est la matrice nulle.

Et en particulier,

$$0_{n,p} = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{j-1} A_{j-1} + (-1) \cdot A_j + \lambda_{j+1} A_{j+1} + \cdots + \lambda_m A_m$$

qui est une combinaison linéaire nulle, à coefficients non tous nuls. Donc $(A_1, \ldots, A_m)$ est liée.
Ainsi, une famille de matrices est liée si et seulement si l'une des matrices qui la composent est nulle ou est combinaison linéaire des autres.

Par conséquent, nous avons prouvé ci-dessus qu'une matrice dont la famille des lignes est liée n'est pas inversible.

Proposition 13.49 : *Soit $A_1, \ldots, A_m$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, soient $(i,j) \in [\![1, m]\!]^2$ distincts, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors la famille $(A_1, \ldots, A_m)$ est libre si et seulement si $(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i + \lambda A_j, A_{i+1}, \ldots, A_m)$ est libre.*

Démonstration. Supposons $(A_1, \ldots, A_m)$ libre, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} \lambda_k A_k + \lambda_i (A_i + \lambda A_j) = 0.$$

Soit encore

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}} \lambda_k A_k + (\lambda_j + \lambda \lambda_i) A_j = 0.$$

Par liberté de $(A_1, \ldots, A_m)$, pour tout $k \neq j$, $\lambda_k = 0$ et $\lambda_j + \lambda \underbrace{\lambda_i}_{=0} = 0$, donc $\lambda_j = 0$.

Et donc $(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i + \lambda A_j, A_{i+1}, \ldots, A_m)$ est libre.

Inversement, supposons que la famille $(A'_1, \ldots, A'_m)$ soit libre, où pour tout $k \neq i$, $A'_k = A_k$ et $A'_i = A_i + \lambda A_j$.
Alors, d'après le sens direct, $(A'_1, \ldots, A'_{i-1}, A'_i - \lambda A'_j, A'_{i+1}, \ldots, A'_m) = (A_1, \ldots, A_m)$ est libre. □

L'idée de la proposition précédente est que les «opérations élémentaires» ne changent pas la liberté d'une famille, puisqu'il est évident que l'échange de deux des matrices ne change rien à sa liberté, de même que la multiplication d'une matrice par un scalaire non nul.

Proposition 13.50 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors A est inversible si et seulement si la famille de ses lignes est une famille libre (de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$).*

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que si la famille des lignes est liée, alors A n'est pas inversible.

Inversement, supposons que A ne soit pas inversible. Alors il existe $Y \in \mathbf{K}^n$ tel que $AX = Y$ ne possède pas une unique solution.
Or, lors de la résolution d'un système à n équations et n inconnues par la méthode du pivot, le seul moyen pour qu'il n'y ait pas unicité de la solution est d'avoir fait apparaître une équation de la forme $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$.
Autrement dit, il existe des matrices inversibles $P_1, \ldots, P_k$, correspondant à des opérations élémentaires, telles que $P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$ possède une ligne nulle.
Donc la famille des lignes de $P_{k-1} \cdots P_1 A$ n'est pas libre. Or, à chaque étape, la famille des lignes de $P_i P_{i-1} \cdots P_1 A$ est libre si et seulement si celle des lignes de $P_{i-1} \cdots P_1 A$ l'est.

Détails

Si $b = 0$, alors il y aura une infinité de solutions, sinon il n'y aura pas de solution.

Donc la famille des lignes de A n'est pas libre.

Nous avons donc prouvé que A n'est pas inversible si et seulement si la famille de ses lignes n'est pas libre, et donc A est inversible si et seulement si la famille de ses lignes est libre. □

Corollaire 13.51 – *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si la famille de ses colonnes est libre.*

Démonstration. A est inversible si et seulement si ${}^tA$ l'est, donc si et seulement si les lignes de ${}^tA$ forment une famille libre.
Or les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A. □

Corollaire 13.52 – *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors A est inversible si et seulement si*

$$\forall X \in \mathbf{K}^n,\ AX = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Démonstration. Nous savons déjà que $X = 0$ est une solution de $AX = 0$. Donc si c'est l'unique solution[10], A est inversible.
Inversement, si A est inversible, alors la famille de ses colonnes est libre.
Or, pour $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$, $AX = x_1C_1 + \cdots + x_nC_n$ où $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de A.
Donc si $AX = 0$, alors $x_1 = \cdots = x_n = 0$, donc $X = 0$. □

[10] Et c'st ce que signifie $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.

13.2.7 Calcul de l'inverse par opérations élémentaires

Pour déterminer si une matrice est inversible, et pour calculer son inverse si celle-ci existe, on peut procéder par opérations élémentaires sur les lignes.
En effet, si par opérations sur les lignes, on arrive à transformer A en une matrice non inversible[11], alors A n'est pas inversible.

[11] Notamment une matrice dont une ligne est nulle.

En revanche, supposons qu'on arrive, par des opérations élémentaires à transformer A en la matrice identité I_n.
Alors il existe des matrices inversibles[12] telles que $P_rP_{r-1}\cdots P_1A = I_n$.
Alors A est inversible puisque I_n l'est.
Et alors, en multipliant à droite la relation $P_r \cdots P_1 A = I_n$ par A^{-1}, il vient $P_r \cdots P_1 = A^{-1}$.

[12] Correspondant à des opérations élémentaires.

On en déduit une méthode de calcul de l'inverse de A : à l'aide d'opérations élémentaires, on transforme A, si c'est possible en l'identité (en suivant la méthode du pivot).
Dans le même temps, on réalise les mêmes opérations en partant de la matrice identité I_n.
Lorsque $P_r \cdots P_1 A = I_n$, alors $P_r \cdots P_1 I_n = A^{-1}$.

Exemple 13.53

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Pour $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & a \\ 2x & - & y & & & = & b \\ -3x & + & 2y & & & = & c \end{array}\right. \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=I_n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & a \\ & & y & + & 2z & = & -2a + b \\ & - & y & - & 3z & = & 3a + c \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\longleftrightarrow}\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&-&y&-&z&=&a\\&&y&+&2z&=&-2a+b\\&&&-&z&=&a+b+c\end{array}\right.\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow -L_3}{\longleftrightarrow}\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&-&y&-&z&=&a\\&&y&+&2z&=&-2a+b\\&&&&z&=&-a-b-c\end{array}\right.\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_3}{\longleftrightarrow}\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&-&y&-&z&=&a\\&&y&&&=&+3b+2c\\&&&&z&=&-a-b-c\end{array}\right.\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=I_n}\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{\longleftrightarrow}\quad\left\{\begin{array}{rcl}x&=&+2b+c\\y&=&+3b+2c\\z&=&-a-b-c\end{array}\right.\quad\underbrace{\begin{pmatrix}0&2&1\\0&3&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}}_{=A^{-1}}$$

Un moyen agréable de présenter les calculs peut être le suivant : commencer par écrire côte à côte A et I_n, puis effectuer les mêmes opérations sur les lignes des deux côtés jusqu'à aboutir à l'identité à gauche :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\-3&2&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3+3L_1}}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&0&1\\0&1&2&-2&1&0\\0&-1&3&3&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&0&1\\0&1&2&-2&1&0\\0&0&-1&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\vdots$$

$$\longleftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&2&1\\0&1&0&0&3&2\\0&0&1&-1&-1&-1\end{array}\right)$$

13.2.8 Inversibilité des matrices triangulaires

Proposition 13.54 : *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, son inverse est encore une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.*

Démonstration. Prouvons le résultat pour les matrices triangulaires supérieures, il suffira de transposer[13] pour traiter le cas des triangulaires inférieures.
Plus précisément, prouvons la proposition par récurrence sur n la taille de la matrice.
Pour $n=1$, il n'y a rien à dire, et pour $n=2$, il suffit d'utiliser le déterminant et la formule donnant l'inverse d'une matrice 2×2.
Supposons donc le résultat vrai pour les matrices triangulaires supérieures de taille n, et soit $A\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{K})$ triangulaire supérieure.
Écrivons alors $A=\begin{pmatrix}B&C\\0_{1,n}&d\end{pmatrix}$, avec $B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $C\in M_{n,1}(\mathbf{K})$ et $d\in\mathbf{K}$.
Alors B est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont ceux de A (à l'exception de d, le dernier coefficient diagonal de A).
► Supposons A inversible.
Notons alors $A^{-1}=\begin{pmatrix}B'&C'\\L'&d'\end{pmatrix}$, avec $B'\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $C'\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $L'\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ et $d'\in\mathbf{K}$.
Alors, on a $\begin{pmatrix}B&C\\0_{1,n}&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B'&C'\\L'&d'\end{pmatrix}=I_{n+1}=\begin{pmatrix}I_n&0_{n,1}\\0_{1,n}&1\end{pmatrix}$.
En particulier, $dd'=1$, donc $d\neq 0$ et $d'=d^{-1}$.
Puis $dL'=0$, donc $L'=0$.

[13] Une matrice est triangulaire supérieure si et seulement si sa transposée est triangulaire inférieure.

Et enfin, $BB' + CL' = I_n$, donc $BB' = I_n$.
De la même manière, en écrivant $A^{-1}A = I_{n+1}$, on obtient $B'B = I_n$, de sorte que $B' = B^{-1}$.
Par hypothèse de récurrence, les coefficients diagonaux de B sont non nuls, donc tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls, et les coefficients diagonaux de $B' = B^{-1}$ sont les inverses de ceux de B, donc les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les inverses de ceux de A.
► Supposons à présent que tous les coefficients diagonaux de A soient inversibles. Alors par hypothèse de récurrence B est inversible, B^{-1} est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux de B^{-1} sont les inverses de ceux de B.
On a alors

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n,1} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & -d^{-1}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & d^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^{-1} & -d^{-1}BB^{-1}C + Cd^{-1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}$$

et de même $\begin{pmatrix} B^{-1} & -d^{-1}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & d^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n,1} & d \end{pmatrix} = I_{n+1}$.
Donc A est inversible, et son inverse est $\begin{pmatrix} B^{-1} & -d^{-1}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & d^{-1} \end{pmatrix}$, qui est triangulaire supérieure, et dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A. □

Corollaire 13.55 – *Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors alors*

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$