# Limites, continuité

15

## Un peu de vocabulaire

Dans toute la suite, $I$ désigne une partie quelconque de $\mathbf{R}$.
En première lecture, il est possible de supposer que $I$ est un intervalle, ce qui facilite la compréhension, mais n'est pas indispensable pour définir la notion de limite.

En premier lieu, nous savons que lorsqu'on s'intéresse à la limite d'une fonction $f$ en $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $a$ n'a pas besoin d'être dans l'ensemble de définition de $f$, c'est notamment le cas lorsqu'on s'intéresse à des limites en $\pm\infty$, ou encore à la limite en 0 d'une fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

La définition suivante vise à définir les points $a$ de $\overline{\mathbf{R}}$ en lesquels il est pertinent de s'intéresser à la limite d'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$. Par exemple, il n'est pas pertinent de s'intéresser à la limite en $-1$ ou en $-\infty$ d'une fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

**Définition 15.1 –** Soit $D$ une partie de $\mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que $a$ est adhérent à $D$ si tout voisinage $V$ de $a$ rencontre $D$ : $D \cap V \neq \emptyset$.

**Exemples 15.2**

Si $I$ est un intervalle, alors les points adhérents à $I$ sont les points de $I$, plus ses éventuelles bornes, qu'elles soient ou non dans $I$.
Par exemple, $+\infty$ est adhérent à $[2, +\infty[$ et $-1$ et $3$ sont adhérents à $]-1, 3[$ et à $[-1, 3[$.
$-1$ n'est pas adhérent à $[0, 1]$, puisque $]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ est un voisinage de $-1$ disjoint de $[0, 1]$.
Tout réel est adhérent à $\mathbf{Q}$. Ce qui nous autorisera, de manière surprenante, à parler de la limite en $\sqrt{2}$ d'une fonction définie sur $\mathbf{Q}$.

Profitons-en également pour faire un petit rappel sur la notion de voisinage. On appelle voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$ tout ensemble $V$ de la forme :

- Si $a \in \mathbf{R}$, $V = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$.
- Si $a = +\infty$, $V = ]A, +\infty[$, $A \in \mathbf{R}$.
- Si $a = -\infty$, $V = ]-\infty, B[$, avec $B \in \mathbf{R}$.

Il est assez facile de constater que :

1. l'intersection de deux voisinages de $a$ est encore un voisinage de $a$ ;
2. l'intersection de tous les voisinages de $a$ est $\{a\}$ si $a \in \mathbf{R}$, vide si $a = \pm\infty$ ;
3. si $a, b$ sont deux éléments distincts de $\overline{\mathbf{R}}$, alors il existe $V_a$ voisinage de $a$ et $V_b$ voisinage de $b$ tels que $V_a \cap V_b = \emptyset$.

> **Autrement dit**
> Il existe des voisinages respectifs de $a$ et $b$ qui sont disjoints.

Seul le dernier point mérite peut-être quelques explications. Il faut distinguer en tout 4 cas.

- Si $a$ et $b$ sont réels. Alors pour $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{3}$, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \cap ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[ = \emptyset$.
- Si $a \in \mathbf{R}$ et $b = +\infty$, alors $]a - 1, a + 1[ \cap ]a + 2, +\infty[ = \emptyset$.
- Si $a \in \mathbf{R}$ et $b = -\infty$, alors $]a - 1, a + 1[ \cap ]-\infty, a - 2[ = \emptyset$.
- Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$, alors $]-\infty, -1[ \cap ]1, +\infty[ = \emptyset$.

**Définition 15.3 –** Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble $I$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que $f$ vérifie une propriété $\mathscr{P}$ au voisinage de $a$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f_{|I\cap V}$ vérifie $\mathscr{P}$.

**Exemple 15.4**

▶ La fonction ln est strictement positive au voisinage de $+\infty$. En effet, $[2, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ sur lequel ln est positive.
▶ La fonction exponentielle est bornée au voisinage de $-\infty$, par exemple car $\forall x \in ]-\infty, 0]$, $|e^x| \leqslant 1$.
▶ La fonction $x \mapsto \cos \dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbf{R}^*$ est monotone au voisinage de tout $x \notin \left\{\dfrac{1}{k\pi}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

## 15.1 LIMITE D'UNE FONCTION

### 15.1.1 Les 9 limites

Contrairement aux suites, dont la limite est toujours considérée lorsque $n \to +\infty$, on peut parler de limite d'une fonction en un réel fini, en $+\infty$ et en $-\infty$. Et cette limite, lorsqu'elle existe, peut être finie, ou égale à $+\pm\infty$.
Ce qui nous conduit à distinguer 9 cas dans la définition de limite :

**Définition 15.5 –** Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$.

1. Si $a \in \mathbf{R}$ :
   (a) on dit que $f$ tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ lorsque $x$ tend vers $a$ et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
   (b) on dit que $f$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si
   $$\forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$
   (c) on dit que $f$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si
   $$\forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$
2. Si $a = +\infty$ :
   (a) on dit que $f$ tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbf{R}, \forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
   (b) on dit que $f$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si
   $$\forall A \in \mathbf{R}, \exists B \in \mathbf{R}, \forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$
   (c) on dit que $f$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si
   $$\forall A \in \mathbf{R}, \exists B \in \mathbf{R}, \forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$
3. Si $a = -\infty$ :

(a) on dit que $f$ tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

(b) on dit que $f$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$

(c) on dit que $f$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$

*Remarques.* ▶ Comme pour le cas des limites de suites, les inégalités larges peuvent être remplacées par des inégalités strictes. De même, dans le cas des limites finies, on peut remplacer $\forall \varepsilon > 0$ par «pour tout $\varepsilon$ suffisamment proche de 0» (donc par exemple $\forall \varepsilon \in ]0,1[$ ou encore $\forall \varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$), dans le cas des limites égales à $+\infty$, on peut remplacer $\forall A \in \mathbf{R}$ par $\forall A > 0$ (ou même par «pour tout $A$ suffisamment grand»), et dans le cas des limites égales à $-\infty$, remplacer $\forall A \in \mathbf{R}$ par $\forall A < 0$.
▶ Comme pour les suites, on ne manipulera pas de limite, et on n'écrira pas $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ avant d'avoir prouvé l'existence d'une telle limite.
▶ Dans le cas très particulier où $I = \mathbf{N}$ et $a = +\infty$, alors on retrouve la définition de limite d'une suite.

Si vous avez bien compris ces limites, il devrait être aisé de retrouver ces définitions sans avoir besoin de les connaître par cœur.
Surtout, il existe une définition bien plus simple qui unifie[1] ces 9 limites :

[1] Et qui est bien entendu équivalente aux définitions données plus tôt.

**Définition 15.6 –** Soit $f : I \to \mathbf{R}$, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$ et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que $f$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $a$ si pour tout voisinage $V_\ell$ de $\ell$, il existe un voisinage $W_a$ de $a$ tel que

$$\forall x \in I,\ x \in W_a \Rightarrow f(x) \in V_\ell.$$

**Danger !** Parce qu'il s'agit là d'un moyen pratique de traiter d'un seul coup les limites finies et les limites infinies, je vais donner la plupart des preuves qui suivent en utilisant la notion de voisinage. Cela ne vous dispense pas de connaître par cœur/de retrouver très vite les 9 définitions, qui seront bien plus faciles à manipuler lors de la résolution d'exercices.

**Proposition 15.7 (Unicité de la limite) :** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.*

*Démonstration.* Redonnons une preuve avec des $\varepsilon$ dans le cas où $\ell_1, \ell_2$ sont réels.
Supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$, et soit $\varepsilon = \dfrac{|\ell_2 - \ell_1|}{3}$.
Alors il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I, x \in ]a - \eta_1, a + \eta_1[ \Rightarrow |f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon$.
De même, $\exists \eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I, x \in ]a - \eta_2, a + \eta_2[ \Rightarrow |f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Posons alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$. Alors pour $x \in I \cap ]a - \eta, a + \eta[$, on a

$$|\ell_1 - \ell_2| = |f(x) - \ell_1 + \ell_2 - f(x)| \leqslant |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon \leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$$

ce qui est absurde.

On pourrait de même adapter les preuves en distinguant les cas suivant que $\ell_1, \ell_2$ soient réels, ou égaux à $+\pm\infty$, ce qui nous conduirait à neuf cas différents.
Plus simplement : si $\ell_1 \neq \ell_2$, alors il existe $V_1$ voisinage de $\ell_1$ et $V_2$ voisinage de $\ell_2$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Soit alors $W_1$ un voisinage de $a$ tel que $\forall x \in I \cap W_1$, $f(x) \in V_1$ et soit $W_2$ un voisinage de $a$ tel que $\forall x \in I \cap W_2$, $f(x) \in V_2$.
Alors pour $x \in W_1 \cap W_2$ , $f(x) \in V_1 \cap V_2$, ce qui est absurde.
Donc $\ell_1 = \ell_2$. □

**Détails** Deux voisinages d'un même point ne sont jamais disjoints.

La connaissance de la limite[2] de $f$ en $a$ donne des informations sur $f$ **au voisinage de** $a$. C'est là une différence de taille avec les suites, car $\mathbf{N}$ privé d'un voisinage de $+\infty$ est un ensemble fini, ce qui nous permettait par exemple de prouver qu'une suite convergente est bornée. Alors que pour une fonction, nous ne disposons que du résultat suivant :

[2] Si elle existe.

**Proposition 15.8 :** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors $f$ est bornée **au voisinage de** $a$.*

*Démonstration.* Il suffit de prendre $V = ]\ell - 1, \ell + 1[$, de sorte qu'il existe $U$ voisinage de $a$ tel que

$$\forall x \in I,\ x \in U \Rightarrow \ell - 1 < f(x) < \ell + 1.$$

Et donc $\forall x \in I \cap U$, $|f(x)| \leqslant |\ell| + 1$. Donc $f$ est bien bornée au voisinage de $a$. □

En revanche, rien n'indique que $f$ soit bornée sur $\mathbf{R}$ tout entier, l'exemple le plus simple étant $\mathrm{id}_{\mathbf{R}} : x \mapsto x$, qui admet une limite finie en 0, et n'est pourtant pas bornée (car ni majorée ni minorée) sur $\mathbf{R}$.

De même, si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $f$ est minorée au voisinage de $a$, et si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f$ est majorée au voisinage de $a$.

Le résultat qui suit est plutôt intuitif : si une fonction admet une limite en un point $a$ où elle est définie, alors cette limite ne peut que valoir $f(a)$.

**Danger !**
On suppose ici que $f$ est définie en $a$, et pas seulement qu'il s'agit d'un point adhérent à $I$.
Par exemple, ce résultat ne s'appliquera pas si $I = ]a, b]$.

**Proposition 15.9 :** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$.*
*Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, alors $\ell = f(a)$ (et en particulier, $a \in \mathbf{R}$).*

*Démonstration.* Il s'agit essentiellement de noter que l'intersection de tous les voisinages de $\ell$ est $\{\ell\}$ si $\ell \in \mathbf{R}$ et est vide sinon.
Or, si $V$ est un voisinage de $\ell$, alors il existe $W$ voisinage de $a$ tel que $f(W \cap I) \subset V$.
Mais $a \in W \cap I$, donc $f(a)$ appartient à tous les voisinages de $\ell$. En particulier, l'intersection de tous les voisinages de $\ell$ est non vide, donc $\ell \neq \pm\infty$, et $f(a)$ est dans tout voisinage de $\ell$, donc $a = \ell$. □

Nous avons bien fait l'hypothèse que la limite existe, cette proposition ne garantit pas l'existence de $\lim_{x \to a} f(x)$ dès que $f$ est définie en $a$.
Par exemple, $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ n'a de limite en aucun réel, bien qu'elle soit définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

**Définition 15.10 –** Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$. On dit que $f$ **est continue en** $a$ si $f$ admet une limite en $a$.
Par ce qui précède, cette limite est nécessairement égale à $f(a)$, donc $f$ est continue en $a$ si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Enfin, mentionnons un point important : la notion de limite est une notion locale, ce qui signifie que lorsqu'on parle de la limite de $f$ en $a$, il suffit de connaître $f$ au voisinage de $a$ (c'est-à-dire pour $x$ «proche de $a$»). Ainsi, pour étudier la limite d'une fonction en 1, il n'est pas utile de savoir quoi que ce soit au sujet de $f$ restreinte à $\mathbf{R}_-$, ni même de $f$ restreinte à $[0, 0.999]$.
De même, pour étudier la limite de $f$ en $+\infty$, le comportement de $f$ sur $]-\infty, 1]$, sur $[0, 1]$ ou sur $[0, 100\,000]$ n'ont aucune importance.

**Proposition 15.11 :** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$.
Soit également $V_a$ un voisinage de $a$. Alors $f$ admet une limite en $a$ si et seulement si $f_{|I\cap V_a}$ admet une limite en $a$, et dans ce cas, on a*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f_{|I\cap V_a}.$$

*Démonstration.* Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. Alors pour tout voisinage $V_\ell$ de $\ell$, il existe $W_a$ voisinage de $a$ tel que $x \in I \cap W_a \Rightarrow f(x) \in V_\ell$.
Et donc en particulier, pour $x \in I \cap W_a \cap V_a$, $f_{|I\cap V_a} \in V_\ell$. Donc $f_{|I\cap V_a}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Inversement, si $f_{|I\cap V_a}(x) = \ell$, soit $V_\ell$ un voisinage de $\ell$. Alors il existe $W_a$ voisinage de $a$ tel que pour $x \in I \cap (V_a \cap W_a)$, $f_{|I\cap V_a \cap W_a}(x) = f(x) \in V_\ell$.
Mais $V_a \cap W_a$ est un voisinage de $a$, donc on retrouve bien la définition de $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. □

La conséquence importante de cette proposition est que toutes les hypothèses des théorèmes qui vont suivre n'ont pas besoin d'être vérifiées sur $I$ tout entier, mais seulement au voisinage de $a$.

### 15.1.2 Limite à gauche, limite à droite

**Définition 15.12 –** Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \mathbf{R}$ adhérent à $I$.
On dit que $f$ est **définie à gauche au voisinage de** $a$ si $a$ est adhérent à $I \cap ]-\infty, a[$.
C'est-à-dire si pour tout voisinage $V$ de $a$, $V \cap I \cap ]-\infty, a[ \neq \emptyset$.
De même, $f$ est **définie à droite au voisinage de** $a$ si $a$ est adhérent à $I \cap ]a, +\infty[$.

Dans le cas où $I$ est un intervalle, une fonction $f$ définie sur $I$ est définie à droite au voisinage de tout point de $I$, et à droite de la borne de gauche de l'intervalle, mais pas à droite de sa borne de droite.
Par exemple, une fonction définie sur $]0, 1]$ est définie à droite au voisinage de 0, mais pas à gauche.

**Définition 15.13 –** Soit $f : I \to \mathbf{R}$, soit $a \in \mathbf{R}$ adhérent à $I$ au voisinage duquel $f$ est définie à gauche et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
On dit que tend à gauche vers $a$ et on note $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$ si $f_{|I\cap]-\infty,a[} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
Autrement dit :

- si $\ell \in \mathbf{R}$ : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a - \eta \leqslant x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
- si $\ell = +\infty$ : $\forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a - \eta \leqslant x < a \Rightarrow f(x) \geqslant A$.
- si $\ell = -\infty$ : $\forall B \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a - \eta \leqslant x < a \Rightarrow f(x) \leqslant B$.

De même, on dit que $f(x)$ tend à droite vers $\ell$ en $a$ et on note $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ si $\lim_{x\to a} f_{|I\cap]a+\infty[} = \ell$.

La notion de limite à droite/gauche n'a aucun intérêt pour $a = \pm\infty$, puisqu'on ne peut tendre vers $+\infty$ que par la gauche, et vers $-\infty$ que par la droite.

**Proposition 15.14 :** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \mathbf{R}$ adhérent à $I$ au voisinage duquel $f$ est définie à gauche et à droite. Alors :*

1. *si $a \in I$, $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$ si et seulement si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$ et $f(a) = \ell$.*
2. *si $a \notin I$, $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$ si et seulement si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$.*

*Démonstration.* 1. Si $a \in I$. Alors si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, nous avons déjà prouvé que $f(a) = \ell$, et les deux limites à gauche et à droite sont évidentes.

Supposons à présent que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
Soit alors $V$ un voisinage de $f(a)$. Il existe alors un voisinage $W_a^-$ de $a$ tel que $\forall x \in I\cap]-\infty, a[\cap W_a^-, f(x) \in V$.
De même, il existe alors un voisinage $W_a^+$ de $a$ tel que $\forall x \in I\cap]a,+\infty[\cap W_a^-, f(x) \in V$.
Soit alors $W_a = W_a^+ \cap W_a^-$. Alors pour $x \in I \cap W_a$, on a :

- soit $x = a$, et alors $f(x) = f(a) \in V$.
- soit $x > a$, et alors $x \in I\cap]a,+\infty[\cap W_a^+$, et donc $f(x) \in V$.
- soit $x < a$, et alors $x \in I\cap]-\infty, a[\cap W_a^-$, et donc $f(x) \in V$.

Donc on a bien prouvé l'existence d'un voisinage $W_a$ de $a$ tel que $\forall x \in I \cap W_a$, $f(x) \in V$, et donc $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

2. Le principe est le même si $a \notin I$, mais alors on n'a pas à se soucier de la valeur de $f(a)$.

□

**Exemples 15.15**

► Soit $f$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.
Alors $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) = 1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2} = 1$ et $f(1) = 1$.
Donc $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ (et donc $f$ est continue en 1).

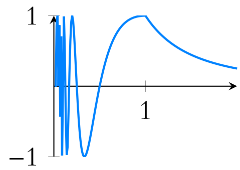


FIGURE 15.1– La fonction $f$.

► Soit $g$ définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 1 & \text{si } x > 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
En effet, $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$.
Et $h$ n'étant pas définie en 0, on ne se préoccupe pas de sa valeur en 0.

### 15.1.3 Caractérisation séquentielle des limites

**Proposition 15.16 :** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$. Alors il y a équivalence entre*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$
2. *pour toute suite $(x_n)$ à valeurs dans $I$, qui tend vers $a$, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $\ell$.*

*Démonstration.* 1) ⇒ 2). Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, et soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $I$ qui tend vers $a$.
Soit $V_\ell$ un voisinage de $\ell$. Alors il existe $W_a$ voisinage de $a$ tel que pour tout $x \in I\cap W_a$, $f(x) \in V_\ell$.
En particulier, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $w_n \in W_a$ et donc $f(x_n) \in V_\ell$.
Et donc $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2) ⇒ 1). Supposons que pour toute suite $(x_n)$ de limite $a$, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Supposons par l'absurde que $f$ ne tend pas vers $\ell$ en $a$.
Alors il existe un voisinage $V_\ell$ de $\ell$ tel que pour tout voisinage $W_a$ de $a$, il existe $x \in W_a$ tel que $f(x) \notin V_\ell$.
Soit alors $(W_n)$ une suite décroissante de voisinages de $a$ définie de la manière suivante :
► Dans le cas où $a \in \mathbf{R}$, on peut prendre $W_n = \left]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}\right[$.
► Dans le cas où $a = +\infty$, on peut prendre $W_n = ]n, +\infty[$.
► Dans le cas où $a = -\infty$, on peut prendre $W_n = ]-\infty, -n[$.

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_n \in W_n$ tel que $f(x_n) \notin V_\ell$.
Dans les trois cas, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Donc par hypothèse, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $f(x_n) \in V_\ell$.
Or, $f(x_{n_0}) \in W_{n_0}$, et donc $f(x_{n_0}) \notin V_\ell$ par construction, ce qui est absurde.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. □

Ceci fournit notamment un moyen facile de prouver qu'une fonction n'admet pas de limite en $a$.

**Exemple 15.17**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
Soit alors $x_n = \frac{1}{n\pi}$, de sorte que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais considérons également la suite $(y_n)$ définie par $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Alors $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(y_n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Puisque les deux suites $(f(x_n))$ et $f(y_n))$ ont des limites différentes, $f$ n'admet pas de limite en 0.

# 15.2 Calculs avec des limites

## 15.2.1 Opérations sur les limites

Tous les résultats énoncés sur les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient pour les limites de suites. Et les preuves en sont inchangées ou presque, c'est d'ailleurs un bon exercice que d'essayer d'en écrire quelques unes pour les fonctions en s'inspirant de ce qui a été dit pour les suites.

Un autre moyen de prouver tous ces résultats est d'utiliser la caractérisation séquentielle des limites : supposons que $f$ et $g$ soient deux fonctions définies sur $I$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$.
Soit alors $(x_n)$ une suite à valeurs dans $I$, qui tend vers $a$. Alors $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \in \mathbf{R}$ et $g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \in \mathbf{R}$.
Et donc, par somme de limites **de suites**, $f(x_n) + g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$. Ceci étant vrai pour toute suite $(x_n)$ de limite $a$, $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$.
Et le même raisonnement se tient pour les produits et les quotients.

Au-delà des résultats bien connus sur la somme, le produit et le quotient de limites, ajoutons :

**Proposition 15.18 :** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$. Alors pour $\ell \in \mathbf{R}$, on a*

1. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow f(x) - \ell \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$
2. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$
3. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow |f(x) - \ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$

Enfin, rappelons également que le produit d'une fonction bornée[3] par une fonction qui tend vers 0 en $a$ tend vers 0.

[3] Ou plus simplement bornée au voisinage de $a$.

Seul le résultat suivant est nouveau :

**Proposition 15.19 (Composition de limites) :** *Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f$ existe.*
*Soient $a$ adhérent à $I$, $b$ adhérent à $J$ et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.*
*Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = \ell$.*

*Démonstration.* Sans la notion de voisinage, il nous faudrait distinguer 27 cas suivant que $a, b$ et $\ell$ soient finis ou égaux à $\pm\infty$.
Soit $V_\ell$ un voisinage de $\ell$. Puisque $g(x) \xrightarrow[x\to b]{} \ell$, alors il existe $V_1$ voisinage de $b$ tel que $\forall x \in V_1 \cap J$, $g(x) \in V$.
Et puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{}$, alors il existe $V_2$ voisinage de $b$ tel que pour tout $x \in I \cap V_2$, $f(x) \in V_1$.
Et alors, pour $x \in I \cap V_2$, on a $f(x) \in J \cap V_1$ et donc $g(f(x)) \in V$.
Ceci étant vrai pour tout voisinage $V$ de $\ell$, $g \circ f$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $a$. □

Notons que ce résultat légitime la notion de changement de variable dans une limite que vous utilisez depuis la terminale.

**Exemple 15.20**

Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, on peut procéder au changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, et s'intéresser à $\lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{X}$.
Cela revient à considérer $g : X \mapsto \dfrac{\ln(1+X)}{X}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Alors notre fonction de départ est $g \circ f$, et puisque nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (g\circ f)(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.
Et cette limite est $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = g'(1) = 1$.

## 15.2.2 Limites et inégalités

**Proposition 15.21 :** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a$ adhérent à $I$. Soient $m < \ell < M$ trois réels.*
*Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors au voisinage de $a$, $m < f(x) < M$.*

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $m < \ell - \varepsilon < \ell < \ell + \varepsilon < M$.
Alors il existe $W_a$ voisinage de $a$ tel que $\forall x \in I \cap W_a$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.
D'où le résultat annoncé. □

**En pratique**
On peut prendre
$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min(\ell - m, M - \ell).$$

**Corollaire 15.22 (Passage à la limite dans les inégalités) –** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$, tel que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.*

1. *si pour tout $x \in I$ $f(x) \leqslant M$, alors $\ell \leqslant M$.*
2. *si pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x)$, alors $m \leqslant \ell$.*

**Mieux**
Le caractère local de la notion de limite permet en fait de faire l'hypothèse plus faible que $f \leqslant M$ uniquement au voisinage de $a$.

*Démonstration.* Prouvons le premier cas. Supposons que $\ell > M$. Alors il existe un voisinage $V_a$ de $a$ tel que pour tout $x \in I \cap V_a$, $f(x) > M$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\ell$. □

⚠ Notons qu'il n'y a pas de résultat analogue avec des inégalités strictes : le passage à la limite dans une inégalité stricte donne une inégalité **large.**

**Corollaire 15.23 –** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I$, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$. Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent et sont réelles, et qu'au voisinage de $a$, $f(x) \leqslant g(x)$.*
*Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $g - f \geqslant 0$. □

### 15.2.3 Asymptotes

Dans toute cette partie, on considère une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$, et on note $\Gamma_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**Définition 15.24 –** Si en un réel $c$, on a $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$, ou $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite[4] d'équation $x = c$ est asymptote à $\Gamma_f$.
S'il existe un réel $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite[5] d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\Gamma_f$.
Plus généralement, si $\lim\limits_{x\to a+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote (oblique) à $\Gamma_f$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

[4] Verticale.

[5] Horizontale.

La proposition qui suit nous donne des formules pour déterminer une asymptote oblique.

**Proposition 15.25 :** *Si $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\Gamma_f$ en $+\infty$, alors $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$.*

*Démonstration.* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - a - \dfrac{b}{x}\right) = 0$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.
Et alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$. □

**Exemple 15.26**

- Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+3}{x+1}$. Alors $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
Et alors $f(x) - 2x = \dfrac{2x^2+3-2x^2-2x}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
Donc la droite d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote oblique à $\Gamma_f$ en $+\infty$.
Si on veut étudier la position relative de $\Gamma_f$ et de son asymptote, il faut étudier le signe de $f(x) - (2x-2)$.
- Soit $f : x \mapsto 3x + \ln(x)$. Alors $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 3$, mais pour tout $b \in \mathbf{R}$,
$$f(x) - (3x+b) = -b + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
donc $f$ n'admet pas d'asymptote oblique.

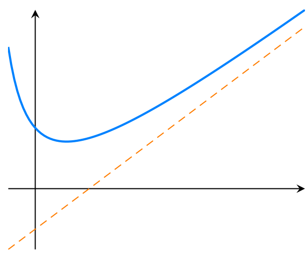


FIGURE 15.2– $\Gamma_f$ et son asymptote

## 15.3 Théorèmes d'existence de limites

### 15.3.1 Utilisation d'inégalités

**Proposition 15.27 (Théorème des gendarmes) :** *Soient $f, g$ et $h$ trois fonctions définies sur un même ensemble $I$, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$, et supposons qu'au voisinage de $a$ $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.*
*Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe et vaut $\ell$.*

*Démonstration.* En raison du caractère local de la limite, il suffit de prouver le résultat lorsque l'encadrement $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ est valable sur $I$ tout entier.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe deux voisinages $V_f$ et $V_h$ de $a$ tels que

$$\forall x \in I \cap V_f,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\forall x \in I \cap V_h,\ |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

Et en particulier, pour $x \in I \cap (V_f \cap V_h)$,

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon.$$

Puisque $V_f \cap V_h$ est un voisinage de $a$, on a donc bien la définition de $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. □

**Exemple 15.28**

Une étude de la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - 2\sqrt{x}$ prouve que celle-ci est dérivable, de dérivée négative sur $[1, +\infty[$.
Elle est décroissante sur $[1, +\infty[$, et puisque $f(1) = -2 < 0$, on en déduit que $f$ est négative sur $[1, +\infty[$.
Donc pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$ et donc $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.
Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

**Au voisinage**
Notez que l'encadrement n'était pas valable pour tout $x$ dans le domaine de définition de nos fonctions. Mais il l'était sur un voisinage de $+\infty$ (qui est $[1, +\infty[$), ce qui suffit à passer à la limite.

**Proposition 15.29 :** *Soient $f, g$ définies sur $I$, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$, et supposons que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.*
*Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.*
*De même, si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.*

*Démonstration.* Nous ne prouvons que le premier cas. Soit $A \in \mathbf{R}$. Alors il existe un voisinage $V_a$ de $a$ tel que pour $x \in I \cap V_a$, $f(x) \geqslant A$. Et alors, toujours pour $x \in I \cap V_a$, $g(x) \geqslant A$.
On a donc bien la définition de $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$. □

### 15.3.2 Le théorème de la limite monotone

Le théorème de la limite monotone, bien qu'analogue au théorème de même nom pour les suites, est un peu plus délicat pour les fonctions.
Nous énonçons ici des résultats pour une fonction définie sur un intervalle, mais on pourrait imaginer des énoncés plus généraux.

**Théorème 15.30 (Théorème de la limite monotone) :** *Soient $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, avec $a < b$, et soit $f : ]a, b[ \to \mathbf{R}$ une fonction **croissante**. Alors :*

1. *$\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe, et vaut $\sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$ si $f$ est majorée et $+\infty$ sinon.*
2. *$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, et vaut $\inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$ si $f$ est minorée, et $-\infty$ sinon.*

*Démonstration.* Supposons $f$ majorée, et soit alors $M = \sup\{f(x), x \in ]a,b[\}$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists A \in ]a,b[$ tel que $M - \varepsilon < f(A) \leqslant M$.
En particulier, pour $x \geqslant A$, on a $M - \varepsilon < f(A) \leqslant f(x) \leqslant M$.
▶ Si $b \in \mathbf{R}$, alors posons $\eta = b - A > 0$. Alors pour tout $x \in ]a,b[\cap]b-\eta,\eta[=]A,b[$, on a $M - \varepsilon < f(x) \leqslant M$, et donc $|f(x) - M| < \varepsilon$.
On a donc bien $\lim\limits_{x\to b} f(x) = M$.
▶ Et si $b = +\infty$, alors pour tout $x \in ]A,+\infty[$, $|f(x) - M| < \varepsilon$, donc $\lim\limits_{x\to b} f(x) = M$.

En revanche, si $f$ n'est pas majorée, alors pour tout $A \in \mathbf{R}$, $\exists B \in ]a,b[$ tel que $f(B) > A$.
Et par croissance de $f$, pour $x \geqslant B$, $f(x) > A$.
▶ Si $b \in \mathbf{R}$, soit alors $\eta = b - B > 0$.
Alors pour $x \in ]a,b[\cap]b-\eta,b+\eta[$, $f(x) \geqslant f(B) > A$.
Et donc $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.
▶ Si $b = +\infty$ : alors pour $x \geqslant B$, $f(x) \geqslant f(B) > A$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Le principe est le même pour les limites en $a$. □

**Théorème 15.31 :** *Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, avec $a < b$, et soit $f : ]a,b[ \to \mathbf{R}$ une fonction **décroissante**. Alors :*

1. *$\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe, et vaut $\inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$ si $f$ est minorée et $-\infty$ sinon.*
2. *$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, et vaut $\sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$ si $f$ est majorée, et $+\infty$ sinon.*

**Corollaire 15.32 –** *Soit $f : ]a,b[ \to \mathbf{R}$ croissante, et soit $c \in ]a,b[$.*
*Alors $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ existent et*

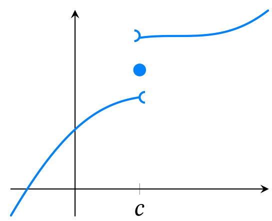
$$\lim_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x\to c^+} f(x).$$

*On a un résultat analogue pour les fonctions décroissantes en renversant le sens des inégalités.*

**Notation**
Ces deux limites à gauche et à droite sont parfois notées $f(c^-)$ et $f(c^+)$.

*Démonstration.* $f_{]a,c[}$ est croissante, et est majorée par $f(c)$. Donc elle possède une limite finie en $c$, de sorte que $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ existe.
Et par passage à la limite dans les inégalités, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c)$.
On procède de même pour les limites à droite. □

⚠ Il se peut que les deux inégalités ci-dessus soient strictes. Par exemple avec la fonction ci-contre.




## 15.4 Continuité : l'aspect local

### 15.4.1 Définitions, premières propriétés

**Définition 15.33 –** Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$. On a déjà dit que $f$ est continue en $a$ si elle admet une limite en $a$.
On dit que $f$ est continue sur $I$ si elle est continue en $a$ pour tout $a \in I$.
On note $\mathscr{C}(I,\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues en $a$.

**Rappel**
Nous avons déjà prouvé que cette limite ne peut qu'être finie, égale à $f(a)$.

Les opérations sur les limites prouvent alors que la somme/le produit/le quotient de deux fonctions continues en $a$ est encore continu en $a$.
Et que si $f : I \to J$ est continue en $a$, et que $g : J \to \mathbf{R}$ est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en $a$.

Et par conséquent, la somme/le produit/le quotient de deux fonctions continues sur un même ensemble $I$ est encore continu sur $I$.
Et si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Remarque
Couplé au fait que $\mathrm{id}_I$ est toujours continue, cela prouve déjà que les fonctions polynômiales, et les quotients de telles fonctions (les fonctions rationnelles) sont continues sur leur ensemble de définition.

**Proposition 15.34 :** *Soit $I$ une partie de $\mathbf{R}$. Alors $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}^I$.*

*Démonstration.* La fonction constante égale à 1 est continue sur $I$, comme toute fonction constante.
Si $f, g$ sont continues sur $I$, alors $f - g$ est continue sur $I$.
Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$, alors $fg$ est continue sur $I$. □

## 15.4.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

**Proposition 15.35 :** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ , et soit $a \in I$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *$f$ est continue en $a$*
2. *pour toute suite $(x_n)$ à valeurs dans $I$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la définition de continuité et de la caractérisation séquentielle des limites. □

Ce résultat est en fait fréquemment utilisé dans le sens 1) ⇒ 2), par exemple pour dire que $u_n \to a \Rightarrow e^{u_n} \to e^a$.
En réalité, il se cache là-derrière un argument de continuité de l'exponentielle, qu'il faudrait préciser.

**Exemple 15.36**

► Soit $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Alors $u_n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
Nous avons déjà prouvé que $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.
Donc en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.
Et donc, par continuité de la fonction exponentielle en 1 (continuité toujours admise à ce stade de l'année...), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^1 = e$.
► Pour bien comprendre que la continuité est indispensable, on peut considérer la fonction partie entière, qui n'est pas continue en 1.
Il n'est donc pas question d'affirmer que $u_n \to 1 \Rightarrow \lfloor u_n \rfloor \to \lfloor 1 \rfloor$.
Par exemple, la suite de terme général $1 - \frac{1}{n}$ est un contre-exemple.

Remarque
Notons qu'à ce stade, il n'y a aucun besoin d'une caractérisation séquentielle de la notion de limite : si $x$ est assez grand, $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est assez grand, et donc ceci vaut aussi pour $n$ entier suffisamment grand.

## 15.4.3 Continuité à droite/à gauche

**Définition 15.37 –** Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$ un point au voisinage duquel $f$ est définie à droite et à gauche.

1. On dit que $f$ **est continue à gauche** en $a$ si $f_{|I\cap]-\infty,a]}$ est continue en $a$, c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
2. On dit que $f$ **est continue à droite en** $a$ si $f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est continue en $a$, c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

**Proposition 15.38 :** *Sous les hypothèses ci-dessus, $f$ est continue en $a$ si et seulement si $f$ est continue à droite et à gauche de $a$.*

**Exemples 15.39**

▸ $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbf{R}$.
Par composition, si $f$ est continue, $|f|$ est continue.
▸ La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $]n, n+1[$, $n \in \mathbf{Z}$ puisqu'elle y est constante égale à $n$.
En revanche, elle n'est que continue à droite en $n \in \mathbf{Z}$.
Si $x \in [n, n+1[$, alors $\lfloor x \rfloor = n \underset{x \to n^+}{\longrightarrow} n = \lfloor n \rfloor$.
Mais si $x \in ]n-1, n[$, alors $\lfloor x \rfloor = n - 1 \underset{x \to n^-}{\longrightarrow} n - 1 \neq \lfloor n \rfloor$, donc $\lfloor \cdot \rfloor$ n'est pas continue à gauche en $n$.
▸ La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en tout point $a \neq 0$, puisqu'elle est alors égale à une fonction affine[6] sur un voisinage de $a$.
Et en 0, il est aisé de constater qu'elle est continue à droite et continue à gauche, donc continue.
Une conséquence importante en est la suivante : si $f$ est continue, alors $|f|$ l'est aussi.
⚠ Réciproque fausse, par exemple $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

[6] Donc polynomiale.

## 15.4.4 Prolongement par continuité

⚠ Attention !
Il faut que $a$ soit un point où $f$ n'est pas déjà définie.

**Définition 15.40 –** Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \mathbf{R} \setminus I$, adhérent à $I$.
Si $f$ admet une limite **finie** lorsque $x \to a$, on appelle prolongement par continuité de $f$ en $a$ la fonction :

$$\tilde{f} : \left| \begin{array}{ccl} I \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right.$$

Alors la fonction $\tilde{f}$ est continue en $a$.

*Démonstration.* Il faut tout de même prouver que $\tilde{f}$ est continue en $a$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$.
Notons $\ell = \tilde{f}(a)$, qui est donc définie comme étant $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Par définition d'une limite, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in I$, $|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
Mais pour $x \neq a$, $\tilde{f}(x)$ et $f(x)$ sont égaux, donc pour $x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \ell| < \varepsilon$.
Et si $x = a$, alors $\tilde{f}(a) - \ell = \ell - \ell = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in I \cup \{a\}$, $|x - a| < \eta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \ell| < \varepsilon$.
Et donc $\lim\limits_{x \to a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$, donc $\tilde{f}$ est continue en $a$. □

⚠ On ne prolongera une fonction qu'en un réel, il n'est pas question de donner une valeur à $f(+\infty)$.
Et de même, la valeur donnée ne peut qu'être réelle, on ne posera pas $\tilde{f}(a) = \pm\infty$.

**Exemples 15.41**

▸ Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Alors $f$ n'est pas définie en 0, mais $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin(0)}{x} = \sin'(0) = 1$.
Donc on peut prolonger $f$ par continuité en 0 en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

▶ Pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ peut être prolongée par continuité en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0} \alpha \ln(x) = -\infty$ et donc, par composition avec la limite de exp en $-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$.
On prolonge donc notre fonction par continuité en posant $0^\alpha = 0$.

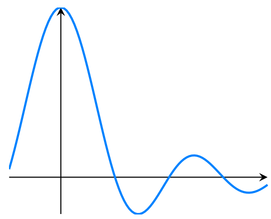


FIGURE 15.3– La fonction $\tilde{f}$ (appellée aussi *sinus cardinal*).

⚠ Attention !
Ceci ne vaut pas pour $\alpha = 0$, on veut toujours avoir $0^0 = 1$.

## 15.5 CONTINUITÉ : THÉORÈMES GLOBAUX

### 15.5.1 Le théorème des valeurs intermédiaires et ses corollaires

**Théorème 15.42 (Théorème des valeurs intermédiaires) :** *Soit $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbf{R})$, et soit $y$ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.*

Remarque
On serait tenté de dire $y \in [f(a), f(b)]$, mais dans le cas où $f(b) < f(a)$, il faut en fait lire $y \in [f(b), f(a)]$.

*Démonstration.* Il faut distinguer deux cas suivant que $f(a) \leqslant f(b)$ ou $f(b) < f(a)$. Les preuves étant similaires, nous ne traitons que le premier. Le cas où $y = f(a)$ ou $y = f(b)$ est trivial[7], donc nous supposons que $y \in ]f(a), f(b)[$.
Soit alors $M = \sup\{x \in [a,b],\ f(x) \leqslant y\}$. Notons que ce sup existe puisque nous sommes en présence d'une partie bornée de $\mathbf{R}$, car incluse dans $[a,b]$.
Alors, la caractérisation séquentielle des bornes supérieures nous dit qu'il existe une suite $(x_n)$ à valeurs dans $[a,b]$, qui tend vers $M$ et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) \leqslant y$.
Mais $f$ est continue en $M$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(M)$, et donc $f(M) \leqslant y$.
On ne peut avoir $M = b$, car on aurait alors $f(b) \leqslant y$, ce qui contredit notre hypothèse.
Donc pour $n$ suffisamment grand, $M + \dfrac{1}{n} \in [a,b]$. Or, $M + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(M + \dfrac{1}{n}\right) = f(M)$.
Or, $f\left(M + \dfrac{1}{n}\right) > y$, donc $f(M) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(M + \dfrac{1}{n}\right) \geqslant y$.
Et donc nécessairement, par double inégalité, $f(M) = y$. □

[7] Il suffit de prendre $c = a$ ou $c = b$.

⚠ Les deux hypothèses fondamentales que $f$ est continue et que son ensemble de définition est un intervalle ne sont pas négociables.

**Corollaire 15.43 –** *Une fonction continue sur un intervalle $I$ qui n'est pas de signe constant s'annule en un point de $I$.*

**Corollaire 15.44 :** *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

*Démonstration.* Soit $I$ un intervalle, soit $f$ une fonction continue sur $I$.
Soient alors $u < v \in f(I)$. Il existe alors deux réels $a$ et $b$ dans $I$ tels que $u = f(a)$ et $v = f(b)$.
Soit alors $z \in [u,v]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ (ou $[b,a]$ si jamais $b < a$) tel que $z = f(c) \in f(I)$.
Et donc $[u,v] \subset f(I)$ : $f(I)$ est un intervalle. □

Le théorème des valeurs intermédiaires se généralise bien avec des limites, finies ou infinies, tant qu'on travaille avec des fonctions continues sur des intervalles. Il y aurait bien trop de

cas à distinguer pour donner un énoncé et une preuve complète, mais vous avez l'intuition de ces résultats.
Traitons deux cas à titre d'exemple :

**Exemple 15.45**

- Soit $f : ]a, b] \to \mathbf{R}$ continue, avec $a \in \overline{\mathbf{R}}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $y \in \mathbf{R}$ **strictement** compris entre $\ell$ et $f(b)$, il existe $c \in ]a, b]$ tel que $f(c) = y$.
Supposons par exemple que $\ell > f(b)$, de sorte que $f(b) \leqslant y < \ell$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $f(b) \leqslant y < \ell - \varepsilon < \ell$.
Alors, par définition de limite, il existe $t \in ]a, b]$ tel que $\ell - \varepsilon < f(t) \leqslant \ell$.
Et alors, le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué entre $t$ et $b$ prouve qu'il existe $c \in [t, b]$ tel que $f(c) = y$.
- Soit $f : [a, b[ \to \mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$. Alors pour tout $y \leqslant f(a)$, il existe $c \in [a, b[$ tel que $f(c) = y$.
En effet, par définition de limite, il existe un voisinage $V_b$ de $b$ tel que pour tout $x \in I \cap V_b$, $f(x) < y - 1$. Et donc en particulier, pour $x_0 \in I \cap V_b$ , $f(x) < y - 1$.
Donc le théorème des valeurs intermédiaires s'applique entre $a$ et $x_0$ : il existe $c \in [a, x_0]$ tel que $f(c) = y$, et $[a, b[$ étant un intervalle, on a bien $x_0 \in [a, b[$.

**⚠ Attention !**
Une précaution à prendre dans ces cas là est qu'une limite n'est pas forcément une valeur atteinte. C'est possible, mais dans ce cas, le théorème des valeurs intermédiaires ne suffira pas.

**Détails**
Il existe bien de tels $x_0$.

**Corollaire 15.46 :** *Soit $I$ un **intervalle** de $\mathbf{R}$, et soit $f : I \to \mathbf{R}$. Notons alors $J = f(I)$. Si $f$ est continue et strictement monotone alors $J$ est un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f$ réalise une bijection de $I$ sur $J$.*

*Démonstration.* Le fait que $J$ soit un intervalle découle du théorème des valeurs intermédiaires.
L'injectivité découle de la stricte monotonie. Et la surjectivité de la définition même de $J$ : c'est l'ensemble des éléments qui admettent au moins un antécédent par $f$. □

La question qui reste ouverte est : comment déterminer $J$ ?
Il y aurait trop de cas à distinguer pour qu'il soit intéressant de donner un énoncé complet, mais vous connaissez déjà intuitivement ces résultats, et la pratique du théorème de la bijection ne change pas : on lit l'intervalle image sur le tableau de variations de $f$.
Notons que par le théorème de la limite monotone, $f$ admet nécessairement des limites[8] aux bornes de $I$.
Donnons tout de même quelques exemples de cas particuliers :

- si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est strictement décroissante et continue, alors $f$ réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$
- si $f : ]a, b] \to \mathbf{R}$ est strictement croissante et continue, alors $f$ réalise une bijection de $]a, b]$ sur $]\lim\limits_{a} f, f(b)]$
- si $f : ]a, b[ \to \mathbf{R}$ est strictement décroissante et continue, alors $f$ réalise une bijection de $]a, b[$ sur $\left]\lim\limits_{b} f, \lim\limits_{a} f\right[$
- etc, etc

Prouvons par exemple le second point, en gardant à l'esprit que la seule chose qui n'a pas encore été prouvée est que $J = f(]a, b]) = \left]\lim\limits_{a} f, f(b)\right]$.
Il est évident que $f(b)$ est le plus grand élément de $J$ par croissance de $f$, et par le théorème de la limite monotone, $\inf J = \inf\limits_{x \in ]a,b]} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$
Donc $J = ]\lim\limits_{a} f, f(b)]$ ou $J = [\lim\limits_{a} f, f(b)]$.
Si on était dans le second cas, cela signifierait[9] qu'il existe $t \in ]a, b]$ tel que $f(t) = \lim\limits_{a} f$, et donc, par stricte croissance de $f$, pour $x \in ]a, t[$, $f(x) < \lim\limits_{a} f$.
Ceci contredit le fait que $\lim\limits_{a} f = \inf J$.

[8] Finies ou infinies.

**Remarque**
Avec cet inf éventuellement égal à $-\infty$, ce qui n'est pas tout à fait autorisé dans $\mathbf{R}$, mais a un sens dans $\overline{\mathbf{R}}$ (qui rappelons-le, est aussi muni d'une relation d'ordre).

[9] Cf. la classification des intervalles de $\mathbf{R}$.

### 15.5.2 Le théorème des bornes atteintes

**Théorème 15.47 :** *Soit $I = [a, b]$ un **segment** de $\mathbf{R}$, et soit $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes.*
*Autrement dit, $f$ possède un maximum et un minimum sur $[a, b]$.*

**Max/min**
Dire que $f$ atteint ses bornes est pus fort que juste dire qu'elle est bornée. Le second garantit l'existence de $\sup f$ / $\inf f$, alors que le premier garantit leur existence et le fait qu'ils soient dans l'image de $f$, et donc que ce sont bien des valeurs atteintes.

*Démonstration.* Par le théorème des valeurs intermédiaires, $f([a, b])$ est un intervalle $J$.
▸ Si $J$ possède une borne supérieure $M$, alors la caractérisation séquentielle de borne supérieure nous dit qu'il existe une suite $(y_n)$ d'éléments de $J$ qui converge vers $M$. Notons alors $x_n$ un antécédent de $y_n$, de sorte que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
▸ Si $J$ n'est pas majoré, alors il existe une suite $(y_n)$ d'éléments de $J$ qui tend vers $+\infty$. Notons alors $x_n$ un antécédent de $y_n$, de sorte que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Puisque $(x_n)$ est bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers un réel $c$.
Et puisque $\forall n \in \mathbf{N}$, $a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b$, par passage à la limite, $a \leqslant c \leqslant b$, soit encore $c \in [a, b]$.
Mais alors, par continuité de $f$, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$.
Or $f\left(x_{\varphi(n)}\right) = y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
Ceci élimine donc déjà le cas où $J$ n'est pas majoré, et donc $M = f(c)$ est un maximum de $J$, puisqu'il s'agit d'une valeur atteinte par $f$.

En appliquant le même raisonnement à $-f$, on prouve que $f$ possède un minimum. □

⚠ Ceci ne vaut plus si on n'est pas sur un segment, comme le prouvent par exemple les cas de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$, $\ln_{|]0,1]}$ ou Arctan.

**Exemple 15.48**

Une fonction continue et périodique sur $\mathbf{R}$ possède un maximum et un minimum.
En effet, soit $T$ une période de $f$. Alors sur le segment $[0, T]$, $f$ est continue et possède donc un minimum $m$ atteint en $x_0$ et un maximum $M$ atteint en $x_1$. Donc pour tout $x \in [0, T]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Soit alors $x \in \mathbf{R}$, et soit $k = \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor$, de sorte que $k \leqslant \dfrac{x}{T} < k + 1 \Leftrightarrow kT \leqslant x < (k + 1)T$.
Alors $f(x) = f(x - kT)$, avec $x - kT \in [0, T[ \subset [0, T]$.
Donc $m \leqslant f(x - kT) \leqslant M$ et donc $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

## 15.6 CONTINUITÉ D'UNE BIJECTION RÉCIPROQUE

**Proposition 15.49 :** *Soit $I$ un **intervalle** et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue.*
*Alors il y a équivalence entre :*
1. *$f$ est strictement monotone*
2. *$f$ est injective (et donc bijective de $I$ sur $f(I)$)*

*Démonstration.* Le sens 1) ⇒ 2) a déjà été vu, et ne nécessite aucunement la continuité de $f$.
Supposons à présent que $f$ soit injective, et supposons par l'absurde qu'elle n'est pas monotone[10].
Alors $f$ n'est pas croissante, donc il existe $x_1, y_1 \in I$ tels que $x_1 < y_1$ et $f(x_1) > f(y_1)$.
Et même, $f$ n'est pas décroissante, donc il existe $x_2, y_2 \in I$ tels que $x_2 < y_2$ et $f(x_2) < f(y_2)$.
Pour $t \in [0, 1]$, considérons alors $\alpha(t) = (1 - t)x_1 + tx_2$.
Il est facile[11] de prouver que $\alpha(t)$ est compris entre $x_1$ et $x_2$, et donc dans $I$ car $I$ est un intervalle.
De même, $\beta(t) = (1 - t)y_1 + ty_2$ est dans $I$.

[10] Étant injective, si elle est monotone, elle est strictement monotone.

[11] Éventuellement en distinguant les cas $x_1 < x_2$ et $x_1 \geqslant x_2$.

Soit alors $g : t \mapsto f(\alpha(t)) - f(\beta(t))$. Alors $g$ est continue sur $I$ car somme et composée de fonctions continues.
On a $g(1) = f(\alpha(1)) - f(\beta(1)) = f(x_2) - f(y_2) < 0$.
De même, $g(0) = f(x_1) - f(y_1) > 0$.
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in ]0,1[$ tel que $g(t_0) = 0$, soit encore $f(\alpha(t_0)) = f(\beta(t_0))$.
Mais $f$ est injective, donc $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$. Soit encore

$$(1-t)x_1 + tx_2 = (1-t)y_1 + ty_2 \Leftrightarrow \underbrace{(1-t_0)(x_1-y_1)}_{<0} = \underbrace{t_0(y_2-x_2)}_{>0}$$

ce qui est absurde.
Donc $f$ est monotone, et donc strictement monotone. □

**De manière imagée** — Si vous savez tracer $f$ sans lever le crayon, vous saurez aussi tracer son symétrique par rapport à la première bissectrice sans lever le crayon.

**Proposition 15.50 :** *Soient $I$ un intervalle, et soit $f : I \to f(I)$ continue et bijective. Alors $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue, de même sens de variation que $f$.*

*Démonstration.* Nous avons déjà prouvé que $f$ et $f^{-1}$ ont même sens de variation.
Supposons par exemple que $f$ est croissante (et donc $f^{-1}$ aussi).
Il suffit de prouver que pour tout point $a \in J$ qui n'est pas la borne de droite[12] de $J$, $\lim\limits_{x\to a^+} f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$ et pour tout point $a \in J$ qui n'est pas la borne de gauche de $J$, $\lim\limits_{x\to a^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$. Soit donc $a \in J$ qui n'est pas égal à sa borne de gauche.
Par le théorème de la limite monotone, $\ell = \lim\limits_{x\to a^-} f^{-1}(x)$ existe dans $\mathbf{R}$, et même est inférieure à $f^{-1}(a)$.
On a alors $\ell \in I$, puisque pour $n$ suffisamment grand, on a $\underbrace{f^{-1}\left(a - \frac{1}{n}\right)}_{\in I} \leqslant \ell \leqslant \underbrace{f^{-1}(a)}_{\in I}$, et $I$ est un intervalle.
Alors, par continuité de $f$, $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$.
Mais par composition de limites, on a $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(f^{-1}(x)\right) = f(\ell)$, et trivialement, $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(f^{-1}(x)\right) = a$.
Donc par unicité de la limite, $f(\ell) = a \Leftrightarrow \ell = f^{-1}(a)$.
On traite sur le même principe les limites à droite.
Et donc $f^{-1}$ est continue en $a$, et ceci étant vrai pour tout $a \in J$, $f^{-1}$ est continue sur $J$. □

[12] Sous réserve que cette borne soit dans $J$, c'est-à-dire que $J$ soit un intervalle fermé à droite.

Le même principe nous donne les limites aux bornes de $f^{-1}$, encore une fois, sans qu'on ait vraiment envie de donner des énoncé généraux.

**Exemple 15.51**

On sait que tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
Donc Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
Par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite $\ell$ en $-\infty$, nécessairement finie puisque Arctan est bornée.
Mais d'autre part, par composition de limites, $\ell = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \operatorname{Arctan}(\tan x) = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} x = -\dfrac{\pi}{2}$.
Donc $\ell = -\dfrac{\pi}{2}$.

## 15.7 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Comme pour les suites, la notion de limite **finie** se prolonge au cas des fonctions à valeurs complexes.
Entendons-nous bien : nous parlons toujours de fonctions définies sur une partie $I$ de $\mathbf{R}$, mais qui cette fois prennent des valeurs dans $\mathbf{C}$.

**Définition 15.52 –** Soit $f : I \to \mathbf{C}$, où $I \subset \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à $I$. On dit que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbf{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_a \text{ voisinage de } a,\ \forall x \in I,\ x \in V_a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\mathscr{C}(I, \mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans $\mathbf{C}$.

On retrouve alors une caractérisation par les parties réelles/imaginaires :

**Proposition 15.53 :** *Avec les hypothèses précédentes,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a} \operatorname{Re}(f(x)) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim_{x\to a} \operatorname{Im}(f(x)) = \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}$$

*Démonstration.* Voir la preuve donnée pour le cas des suites. □

De même, on retrouve que si $f$ possède une limite (nécessairement finie) en $a$, alors $f$ est bornée au voisinage de $a$.
Tous les résultats ne faisant pas appel à la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ restent valables sur $\mathbf{C}$, et en particulier la caractérisation séquentielle, et tout ce qui concerne les opérations sur les limites.
Attention à la composition des limites, on ne pourra composer pas composer deux fonctions à valeurs complexes[13], mais seulement $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$, où $J$ est une partie de $\mathbf{R}$. Autrement dit, $f$ (la fonction de droite) doit être définie sur une partie de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

**Bornée**
La définition de bornée n'a pas changée : $f$ est bornée si la fonction réelle $|f|$ l'est.

[13] Ou plutôt, on ne dira rien des limites de telles composées, puisque nous n'avons défini la limite que pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}$.

On dispose notamment de la proposition suivante :

**Proposition 15.54 :** *Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbf{C})$. Alors $|f| \in \mathscr{C}(I, \mathbf{C})$.*

*Démonstration.* $|f| = \sqrt{\operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2}$ est composée de la fonction $\operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2$, continue sur $I$ et à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, avec la fonction racine carrée, continue sur $\mathbf{R}_+$. □

Les mêmes résultats se traduisent évidemment en termes de continuité. Toutefois, puisqu'on perd la relation d'ordre dans $\mathbf{C}$, le théorème des valeurs intermédiaires n'y a plus de sens, de même que le théorème de la bijection.

Le théorème des bornes atteintes doit lui aussi être reformulé, mais il permet tout de même de prouver qu'une fonction à valeurs complexes continues sur un segment est bornée.
En effet, si $f$ est une telle fonction, $|f|$ est une fonction continue sur le même segment, et à valeurs réelles. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.