18 Comparaison des suites et des fonctions

18.1 Négligeabilité

18.1.1 Définition

Définition 18.1 – Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites à valeurs réelles. On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ si il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$, de limite nulle, telle que

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = \varepsilon_n v_n.$$

À l'oral

On lira $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ en disant «(u_n) est un petit o de (v_n).»

Exemple 18.2

On a $n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\right)$ puisque pour $n \geqslant 1$, $n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{=\varepsilon_n} n^2$.

Sur le même principe, on a $\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puisque $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n}\frac{1}{n^2}$.

Remarques. ▸ Les exemples précédents donnent une bonne intuition de la signification des o :

— dans le cas où (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, celle qui est négligeable devant l'autre est celle qui tend «le moins vite» vers $+\infty$

— dans le cas de suites qui tendent vers 0, c'est celle qui tend «le plus vite» vers 0 qui est négligeable devant l'autre.

▸ Si (v_n) est la suite nulle alors les seules suites négligeables devant (v_n) sont les suites stationnaires de limite nulle, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang.

▸ La présence du n_0 n'est en fait indispensable que pour englober le cas où (v_n) peut s'annuler. En effet, dans le cas où (v_n) ne s'annule pas, on peut toujours supposer que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, en posant simplement $\varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$.

▸ De manière équivalente, en utilisant la définition de limite, on peut prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|.$$

En pratique, on pourra prendre la proposition suivante comme définition de la négligeabilité, à condition de se souvenir qu'elle n'est valable que dans certains[1] cas.

[1] Qui englobent 99, 9% des cas que vous serez amenés à traiter.

Proposition 18.3 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que (v_n) ne soit pas nulle à partir d'un certain rang. Alors*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, soit alors ε_n tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \varepsilon_n v_n$ et $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Inversement, si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors il suffit de poser, pour n suffisamment grand, $\varepsilon_n = \dfrac{u_n}{v_n}$, de sorte que $u_n = \varepsilon_n v_n$. □

Et si n petit ?
Nous ne disons rien des valeurs de ε_n lorsque n «n'est pas suffisamment grand» (autrement dit pour un nombre fini de valeurs de n) car elles n'ont aucune incidence sur la limite. Vous pouvez donc les choisir comme bon vous semble, la suite (ε_n) conviendra toujours !

Exemples 18.4

$\sin(\sqrt{n})n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n\sqrt{n} - 3n\right)$.
En effet, on a $\dfrac{\sin(\sqrt{n})n}{n\sqrt{n} - 3n} = \dfrac{\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n})}{1 - \frac{3}{\sqrt{n}}}$.
Mais $\dfrac{1}{n}\sin(\sqrt{n})$ tend vers 0 car produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle.
Et le dénominateur tend clairement vers 1.

Proposition 18.5 : *Soit (u_n) une suite réelle. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
Autrement dit, la notation $o(1)$ désigne n'importe quelle suite de limite nulle.

Démonstration. On a[2] $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{1} = 0$. □

[2] La suite constante égale à 1 ne s'annule pas.

Exemple 18.6

Puisque $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, ce qu'on notera $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1)$.

18.1.2 Opérations sur les o

⚠ La notation o est pleine de subtilités, et pour commencer, il faut bien comprendre qu'elle ne désigne pas un objet de manière unique, mais qu'il peut y avoir une infinité de suites négligeables devant une même suite.
Par exemple, les suites de termes généraux $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n^2+1}$, $\dfrac{1}{n^2 + 2\sin n}$, $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ sont toutes négligeables devant la suite de terme général $\dfrac{1}{n}$.
Donc on va noter $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, mais on n'en déduira surtout pas que $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$!
Une fois qu'on a accepté ce principe, les règles de calcul suivantes ne sont pas trop difficiles à assimiler.
Il n'est probablement pas intelligent de tout apprendre par cœur bêtement, et en cas de doute dans un exercice, un retour rapide à la définition[3] devrait suffire à dissiper vos doutes.

[3] Via le quotient de limite.

Proposition 18.7 : *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.*

1. $\forall \lambda \in \mathbf{R}^*$, *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda v_n)$ *et* $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$
2. *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, *alors* $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$
3. *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ *(transitivité des o)*
4. *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, $u'_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v'_n)$, *alors* $u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n v'_n)$
   En particulier, si $k \in \mathbf{N}$, *et si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, *alors* $u_n^k \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n^k)$.
5. *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, *alors* $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n w_n)$.
6. *si* (u_n) *et* (v_n) *ne s'annulent pas, alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \dfrac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.
7. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{=} o(|v_n|)$.

Constantes
Ce premier point signifie que les constantes multiplicatives ne servent à rien dans des o et on ne fera pas de différence entre $o(n)$, $o(-2n)$ et $o(n/100)$.

Démonstration. 1. soit (ε_n) de limite nulle telle que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = \varepsilon_n v_n$.
Alors en posant $\varepsilon'_n = \dfrac{\varepsilon_n}{\lambda}$, qui tend toujours vers 0, alors pour $n \geqslant n_0$, $\lambda u_n = \varepsilon'_n(\lambda v_n)$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda v_n)$.
De même, en posant $\varepsilon''_n = \lambda\varepsilon_n$, alors $\lambda u_n = \varepsilon''_n v_n$.

2. si pour n suffisamment grand, $u_n = \varepsilon_n w_n$ et $v_n = \theta_n w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0$, alors pour n suffisamment grand $u_n + v_n = (\varepsilon_n + \theta_n)w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n + \theta_n) = 0$.

Suffisamment gd.
Essayez d'écrire les détails si vous en ressentez le besoin. Ici il y a une arnaque : les «n suffisamment grand» ne veulent pas forcément dire la même chose pour (u_n) et pour (v_n) !

Dans la suite, pour simplifier les preuves, on suppose que les suites en jeu ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, de sorte qu'on peut utiliser la limite du quotient pour caractériser la négligeabilité.

3. On a
$$\frac{u_n}{w_n} = \underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\frac{v_n}{w_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
4. $\dfrac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{u'_n}{v'_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. $\dfrac{u_n w_n}{v_n w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
6. $\dfrac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}} = \dfrac{u_n}{v_n}$, et donc l'un tend vers 0 si et seulement si l'autre tend vers 0.
7. Il suffit de se rappeler qu'une suite tend vers 0 si et seulement si sa valeur absolue tend vers 0.
   Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| = 0$.

□

On n'a de résultat que pour la somme de deux suites négligeables **devant une même suite**, et **on ne somme rien à l'intérieur du** o.
Par exemple, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$, $\dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{=} o(-n)$, mais
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\neq} o(n + (-n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(0).$$

Exemples 18.8

Supposons qu'on dispose de deux suites (u_n) et (v_n) telles que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}
u_n v_n &\underset{n\to+\infty}{=} \left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2-\frac{2}{n}+\underbrace{o\left(\frac{2}{n}\right)}_{=o\left(\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\underbrace{-\frac{1}{n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{=o\left(\frac{1}{n}\right)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2+\frac{1}{\sqrt{n}}+\underbrace{o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}_{o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2+\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

On a utilisé ici à la fois les règles 4 et 5 de la proposition précédente pour faire le produit.

▸ Souvenons nous que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\sin'(0)=1$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n}=1$.

Alors $n\sin\frac{1}{n}-1\underset{n\to+\infty}{=}o(1)$ et donc

$$\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow \sin\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Proposition 18.9 : *Si $u_n\underset{n\to+\infty}{=}o(v_n)$, alors pour toute extractrice φ, $u_{\varphi(n)}\underset{n\to+\infty}{=}v_{\varphi(n)}$.*

Démonstration. Si $\frac{u_n}{v_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, alors la suite extraite $\left(\frac{u_{\varphi(n)}}{v_{\varphi(n)}}\right)_n$ tend aussi vers 0. □

Exemple 18.10

Puisque $\sin\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sin\frac{1}{n^2+1}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n^2+1}+o\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$.

18.1.3 Les croissances comparées usuelles

Lemme 18.11. Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs, et supposons qu'il existe un réel $\ell\in[0,1[$ tel que $\lim\limits_{n\to+_infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon=\frac{1-\ell}{2}$.

Alors par définition de limite, il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\ell\right|\leqslant\varepsilon$.

Et alors pour $n\geqslant n_0$, $0\leqslant\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\ell+\varepsilon\leqslant\frac{1+\varepsilon}{2}$.

Et en particulier, $u_{n+1}\leqslant\frac{1+\ell}{2}u_n$.

On prouve alors par récurrence que pour $n\geqslant n_0$, $0\leqslant u_n\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}u_0$, et puisque $\frac{1+\ell}{2}\in]0,1[$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$. □

Théorème 18.12 (Croissances comparées usuelles) :

1. $\forall (\alpha,\beta)\in \mathbf{R}^2,\ \alpha<\beta \Rightarrow n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$
2. $\forall \alpha\in\mathbf{R},\ \forall q\in]0,1[,\ q^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\alpha\right)$
   $\forall \alpha\in\mathbf{R},\ \forall q\geqslant 1,\ n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(q^n\right)$
3. $\forall (q,q')\in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2,\ q<q' \Rightarrow q^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left((q')^n\right)$
4. $\forall q\geqslant 0,\ q^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n!\right)$
5. $n! \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^n\right)$

Démonstration.

1. Soient $\alpha<\alpha'$ deux réels. Alors $\dfrac{n^\alpha}{n^{\alpha'}} = n^{\alpha-\alpha'} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha-\alpha'<0$.
2. Soit $\alpha\in\mathbf{R}$ et $q\in]0,1[$. Appliquons le lemme, à la suite de terme général $\dfrac{q^n}{n^\alpha}$.
   On a alors $\dfrac{q^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\dfrac{n^\alpha}{q^n} = \dfrac{q}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q\in]0,1[$. Dans le cas $q>1$ il suffit de faire de même avec $\dfrac{n^\alpha}{q^n}$.
3. Nul besoin du lemme ici, il suffit de connaître les suites géométriques :
   $$\frac{q^n}{q'^n} = \left(\frac{q}{q'}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
4. Encore une fois le lemme : $\dfrac{q^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{q^n} = \dfrac{q}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
   Donc $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.
5. Toujours pareil : $\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\dfrac{n^n}{n!} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.
   Or, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.
   Mais il est classique[4] que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.
   On en déduit, par continuité de l'exponentielle, que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1}<1$.
   Et donc $n! \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^n\right)$.

□

[4] Il s'agit de reconnaître un taux d'accroissement.

Ces résultats, couplés à la transitivité des o permettent déjà de comparer beaucoup de suites. Par exemple, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^n\right)$. En effet, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ et $n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^n\right)$.

18.2 Équivalents

18.2.1 Définition

Définition 18.13 – Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **équivalentes**, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ s'il existe une suite (θ_n) qui tend vers 1 telle que

$$\exists n_0\in\mathbf{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ u_n = \theta_n v_n.$$

Remarques. ▶ L'intuition qui se cache là-derrière est que deux suites équivalentes doivent «se comporter de la même manière au voisinage de $+\infty$». Ou au moins «avoir le même ordre de grandeur», et donc au moins avec les mêmes vitesses de convergence/divergence.
▶ Si (v_n) est la suite nulle, alors les seules suites équivalentes à (v_n) sont les suites nulles à partir d'un certain rang.
Ce qui signifie qu'à moins que vous soyez en train de manipuler la suite nulle, **je ne veux**

pas voir écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$.
Si vous en arrivez à écrire ceci, cherchez l'erreur dans vos calculs, ça ne devrait pas arriver ! Généralement ce n'est pas une erreur de calcul, mais plutôt que vous avez réalisé une opération qui n'était pas autorisée.

⚠ Attention !
«On n'est jamais équivalent à 0 sauf si on est complètement nul !»

La proposition suivante se prouve exactement comme la proposition analogue pour les o.

Proposition 18.14 : *Si (v_n) est non nulle (à partir d'un certain rang), alors on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.*

Exemples 18.15

$n+\sqrt{n}\sin(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ puisque

$$\frac{n+\sqrt{n}\sin(n)}{n} = 1 + \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Proposition 18.16 (Lien entre o et $\sim$) : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Alors*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

Intuition
Au fond, cette proposition est assez intuitive, si une suite est négligeable devant l'autre, alors la somme se comporte comme celle qui domine l'autre.

Démonstration. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors soit $(\theta_n)_n$ une suite qui tend vers 1 telle que pour n suffisamment grand, $u_n = \theta_n v_n$.
Alors $u_n - v_n = \underbrace{(\theta_n - 1)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} v_n$.
Donc $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
Et inversement, si pour $n \geqslant n_0$, $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\varepsilon_n = 1$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. □

Notons que ceci s'écrit encore $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$.

Exemple 18.17

Cherchons un équivalent de $u_n = \dfrac{1}{n} + n\ln(n) + \sqrt{n} + \dfrac{2^n}{n}$.
Intuitivement, il s'agit d'isoler le terme «le plus fort» de u_n, qui doit être $\dfrac{e^n}{n}$.
En effet, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$, donc déjà $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^n}{n}\right)$.
De même, $n\sqrt{n} = n^{3/2} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$, donc $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} \left(\dfrac{e^n}{n}\right)$.
Le même raisonnement prouve que $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \left(\dfrac{e^n}{n}\right)$. Mais $n\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$ et donc $n\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^n}{n}\right)$.
Et donc au final, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{e^n}{n} + o\left(\dfrac{e^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{n}$.

Intuition
Il faut un peu d'intuition pour être efficace dans ce type de question, et être capable de reconnaître rapidement le terme qui domine les autres, mais si on ne le voit pas tout de suite, quelques calculs permettent de le trouver.

18.2.2 Propriétés des équivalents

Proposition 18.18 : *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites, on a donc, pour (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n,\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

et si on a à la fois $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

Démonstration. Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
En prenant $\theta_n = 1$, on a bien $\theta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \theta_n u_n$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors soit (θ_n) qui tend vers 1 et $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \theta_n v_n$.
Alors il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\theta_n \geqslant \frac{1}{2}$, et en particulier $\theta_n \neq 0$.
Alors pour $n \geqslant n_1$, $v_n = \frac{1}{\theta_n} u_n$, et puisque $\frac{1}{\theta_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a bien $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
Enfin, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, soient alors $(\theta_n), (\theta'_n)$ telles que pour n suffisamment grand, $u_n = \theta_n v_n$ et $v_n = \theta'_n w_n$.
Alors pour n suffisamment grand, $u_n = \theta_n \theta'_n w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n \theta'_n = 1$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. □

Proposition 18.19 : *Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, avec $\ell \neq 0$. Alors pour toute suite (v_n), on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.*

Démonstration. Notons que (u_n) possédant une limite non nulle, elle est non nulle à partir d'un certain rang. Et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \Leftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

□

Les deux propositions suivantes nous permettent d'en dire un peu plus sur l'intérêt des équivalents.
Jusqu'à présent, nous disposions d'un premier moyen de faire le tri parmi toutes les suites : la limite.
Il y avait donc d'un côté les suites qui tendent vers 0, puis les suites qui tendent vers 1, celles qui tendent vers π, celles qui tendent vers $+\infty$, et celles qui n'ont pas de limite.
La notion d'équivalence permet donc de partitionner l'ensemble de toutes les suites en classes d'équivalence.
Ce que dit la proposition ci-dessus, c'est que pour les suites de limite finie non nulle, il n'y a pas grand chose de nouveau : toutes les suites qui tendent vers $\ell \neq 0$ sont dans la même classe d'équivalence.
C'est en revanche pour les suites de limite nulle ou infinie que cela devient plus intéressant : il y a d'une part la classe d'équivalence de $\frac{1}{n}$, qui contient $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}$ et $\frac{1}{n} + \frac{\cos n}{n^2}$, puis d'autre part la classe d'équivalence de $\frac{1}{2^n}$, qui contient $\frac{1}{2^n+2}$ et $\frac{n^2+4n+1}{2^n(n^2-7n)}$etc.
On a donc une classification plus fine que celle établie uniquement à l'aide de la limite.

Remarque
La notion d'équivalence permet tout de même de caractériser plus finement les suites qui tendent par exemple vers 1 : il suffit alors de chercher un équivalent de $u_n - 1$.
Ainsi, si $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ et si $v_n = 1 + e^{-n}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Mais $u_n - 1 \nsim v_n - 1$, car ces deux suites tendent vers 1 à des vitesses très différentes

Proposition 18.20 : *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes, alors, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

Démonstration. Soit $(\theta_n)_n$ qui tend vers 1 telle que pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \theta_n v_n$.
Alors[5] il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \theta_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.
Et en particulier, puisque $\theta_n > 0$, v_n et $u_n = \theta_n v_n$ sont de même signe[6]. □

[5] Par définition d'une limite, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

[6] Et quand je dis ça, je parle des trois signes : positif, négatif ou nul !

Proposition 18.21 : *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et si (u_n) a une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors (v_n) aussi, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

Démonstration. Cela découle directement des théorèmes opératoires sur les limites puisque $u_n = \theta_n v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 1$. □

Proposition 18.22 : *Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (z_n) quatre suites.*

1. *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n$, alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n z_n$.*
   En particulier, pour $k \in \mathbf{N}$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^k$.
2. *Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.*
3. *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang[7], alors pour tout $a \in \mathbf{R}$, $u_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^a$.*
4. *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors pour tout extractrice φ, $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*

[7] Ce qui garantit que (u_n) le soit également à partir d'un certain rang, cf la proposition 18.20.

Démonstration. Prouvons le point 3, qui est le seul à ne pas ressembler à des proposition analogues sur les o.
On a $\dfrac{u_n^a}{v_n^a} = \left(\dfrac{u_n}{vn}\right)^a$, avec $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $u_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^a$. □

Remarques. ► Le point 3 est notamment valable pour $a = \frac{1}{2}$: on peut élever des équivalents à une puissance positif **fixée**, c'est-à-dire qui ne dépend pas de n.
Par exemple, $1 + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, mais on n'en déduit pas que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

On ne somme pas des équivalents !
Par exemple, $n^3 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$, $-n^3 + n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^3$, mais $n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\not\sim} 0$

Proposition 18.23 : *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.*

Démonstration. Plaçons nous une fois encore dans le cas de suites qui ne s'annulent pas.
On a par hypothèse $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc par produit, $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$. □

18.2.3 Un équivalent classique : la formule de Stirling

Reste alors une dernière formule, complètement à part puisqu'elle ne ressemble à aucune autre, et que nous avons déjà rencontrée dans le DS5 : la formule de Stirling, qui donne un équivalent de la factorielle :

Proposition 18.24 (Formule de Stirling) :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

La preuve est intégralement contenue dans le premier problème du DS5, mais retraçons-en les grandes lignes, puisqu'elle est plus facile à formuler quand on dispose de la notion d'équivalent.

On note $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$ les intégrales de Wallis.

Il est alors aisé de constater que $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$ et une intégration par parties conduit à la relation $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Cette relation permet alors de prouver que pour tout n, $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2} \quad (\star)$.

De la décroissance de (W_n) et de la relation liant W_{n+2} à W_n, on tire $\dfrac{n+1}{n+2}W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, et donc $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

Dès lors, la relation $(\star)$ nous dit que $(n+1)W_{n+1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.

Et donc $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

D'autre part, en utilisant la relation $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, il vient

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}W_{2n-4} = \cdots = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}W_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Indépendamment, on prouve que $\dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ possède une limite finie $\ell > 0$.

La preuve donnée dans le DS5 n'est pas exactement la plus facile, mais celle-ci ne pourra être donnée qu'en fin d'année (elle nécessite la notion de série).

Une fois l'existence de cette limite acquise, on a donc $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{n}\dfrac{1}{\ell}$. Mais alors

$$(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n} \text{ et } (n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell^2}n^{2n}e^{-2n}n$$

de sorte que $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\dfrac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}n}\dfrac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$.

Comme d'autre part $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$, alors

$$\ell\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \Leftrightarrow \ell \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}}.$$

Et donc $\ell = \sqrt{1}\sqrt{2\pi}$, d'où la formule de Stirling.

Aussi belle soit cette formule, elle ne sert pas si souvent que ça. A priori, ça ne doit pas forcément être votre premier réflexe dans des exercices contenant des factorielles, essayer d'abord de les simplifier !

Remarque

Notons que $\binom{2n}{n}$ n'est rien d'autre que le coefficient médian d'une ligne du binôme de Newton. Nous savons que ce coefficient est plus grand que tous les autres de la même ligne.
Et 2^{2n} n'est rien d'autre que la somme de tous les coefficients de cette même ligne.
Il s'agit donc de quantifier l'impact de ce coefficient médian sur la somme de toute une ligne.
Ceci n'est pas étranger aux motivations qui ont conduit à l'élaboration de la formule de Stirling.

Exemple 18.25

Cherchons un équivalent de $u_n = \dbinom{2n}{n}$.

On a $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.

18.3 Le cas des fonctions

18.3.1 Définitions

Dans toute la suite, on considère des fonctions définies sur un même ensemble I et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I.

Définition 18.26 – Soient f et g deux fonctions définies sur I.
▸ On dit que f est **négligeable devant** g **au voisinage de** a et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbf{R}$, qui tend vers 0 en a et telle qu'il existe un voisinage V_a de a tel que $\forall x \in V_a$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.
▸ On dit que f est **équivalente à** g **au voisinage de** a et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ s'il existe une fonction $\theta : I \to \mathbf{R}$, qui tend vers 1 en a et un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) = \theta(x)h(x)$.

Terminologie

Autant pour les suites il était évident que tout se passait au voisinage de $+\infty$ (le seul endroit où il est pertinent de parler de limite), autant pour les fonctions il est important de préciser au voisinage de quel point on se place.

Proposition 18.27 : *Si g est non nulle sur $I \setminus \{a\}$, alors*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ et } f(x) \underset{x\to a}{\sim} o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

18.3.2 Règles de calcul

C'est bien simple, toutes les règles de calcul énoncées pour les suites restent valables pour les fonctions.

Exemple 18.28

On a $1 \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$, et donc $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x\ln(x))$.
On en déduit que $x\ln x + \ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(x)$.
De même, $\cos(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$, donc $x - \cos(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
Donc $\dfrac{x\ln x + \ln x}{x - \cos x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En revanche, il n'y a plus de notion de suite extraites, mais la proposition suivante :

Proposition 18.29 (Composition à droite dans les $\sim$ / o) :
Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et si $\lim_{x\to b} \varphi(x) = a$, alors $(f\circ\varphi)(x) \underset{x\to a}{=} o((g\circ\varphi)(x))$.
Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si $\lim_{x\to b} \varphi(x) = a$, alors $(f\circ\varphi)(x) \underset{x\to a}{\sim} (g\circ\varphi)(x)$.

Démonstration. C'est de la composition de limites : si $\lim_{x\to b} \varphi(x) = a$ et $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors $\lim_{x\to b} \dfrac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = 0$, et de même pour les limites 1. □

Exemple 18.30

Nous allons voir tout de suite que $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Comme de plus[8] $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, alors

$$\sin\left(\frac{\ln x}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}.$$

[8] Voir ci-dessous si vous ne connaissez pas déjà ce résultat.

De même, on peut utiliser les relations connues sur les fonctions pour en déduire des relations sur les suites :

Proposition 18.31 :
▸ *Si $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x)$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(g(u_n))$.*
▸ *Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} o(g(u_n))$.*

Démonstration. C'est la caractérisation séquentielle des limites. □

Exemple 18.32

Nous allons voir tout de suite que $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$.

Ainsi, si $u_n = \sqrt{n^3-3n}-\sqrt{n^3} = \sqrt{n^3}\left(\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}-1\right)$, on a, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt{n^3}\frac{3}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{2\sqrt{n}}.$$

⚠ On ne compose pas les équivalents à gauche : si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, il n'y a pas de raison pour que $\varphi(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(g(x))$.

Par exemple, $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$, mais $e^{x+1} \underset{x\to a}{\not\sim} e^x$ puisque $\frac{e^{x+1}}{e^x}=e$.
Mentionnons tout de même deux cas où la composition à gauche est autorisée, avec certaines précautions :

Proposition 18.33 : *Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)-g(x)=0$, alors $e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$.*
Si f et g sont strictement positives, que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et que ces deux fonctions possèdent en a une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$ différente de 1, alors $\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$.

Démonstration. Par composition de limites, $e^{f(x)-g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} e^0=1$, donc $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.
D'autre part, on a

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)+\ln(g(x))}{\ln(g(x))} = 1+\frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell\neq 1$, $\lim\limits_{x\to a}\ln(f(x))\neq 0$, et donc $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}=1$. □

Remarque
On pourrait restreindre les hypothèses et demander par exemple que $|g(x)-1|$ soit minorée par un réel strictement positif au voisinage de a, c'est-à-dire que g ne s'approche pas trop près de 1.

18.3.3 Croissances comparées et équivalents usuels

Vous connaissez déjà de nombreuses croissances comparées, mais peu ont été redémontrées cette année. Les voici.

Proposition 18.34 (Croissances comparées en $+\infty$) :

1. *Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$. Alors $\alpha<\beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$*
2. *Soient $(a,b)\in(\mathbf{R}_+^*)^2$. Alors $a<b \Leftrightarrow a^x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(b^x\right)$.*
3. *Soient $(\alpha,\beta)\in(\mathbf{R}_+^*)^2$. Alors $(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$.*
4. *Soient $(\alpha,\beta)\in(\mathbf{R}_+^*)^2$. Alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$.*

Démonstration. 1. On a $\frac{x^\alpha}{x^\beta}=x^{\alpha-\beta}$, qui tend vers 0 si et seulement si $\alpha-\beta<0\Leftrightarrow\alpha<\beta$.

2. On a $\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x=e^{x(\ln(a)-\ln(b))}$, qui tend vers 0 si et seulement si $\ln(a)-\ln(b)<0\Leftrightarrow a<b$.

3. On sait déjà[9] que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. Or

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}=\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta=\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$

[9] Cf le chapitre sur la continuité.

qui tend vers 0 par opérations sur les limites.

4. Il suffit de procéder au changement de variable[10] $t = e^x$ dans la limite précédente. □

[10] Qui n'est rien d'autre que de la composition à droite...

Proposition 18.35 (Croissances comparées usuelles en 0) :

1. *Soient* $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. *Alors* $\alpha > \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(x^\beta\right)$
2. *Pour* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in \mathbf{R}$, $x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(|\ln x|^\beta\right)$.

Démonstration. 1. Il suffit de calculer le quotient.

2. Procédons au changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ (qui nous ramène donc en $+\infty$), de sorte que $\ln(X) = -\ln(x)$: il vient alors

$$\frac{x^\alpha}{|\ln x|^\beta} = \frac{1}{X^\alpha |\ln X|^\beta}.$$

Si $\beta > 0$, il n'y a rien à dire. Et si $\beta < 0$, alors c'est égal à

$$\frac{|\ln x|^{-\beta}}{X^\alpha} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Remarque. Notons que le second point n'est rien d'autre que $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln(x)^\beta = 0$, et notamment $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$.

Proposition 18.36 : *Soit f une fonction polynomiale non nulle. Alors elle est équivalente en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré, et est équivalente en 0 à son terme de plus bas degré.*

Plus précisément, si $f : x \mapsto a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n$; avec $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n \text{ et } f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p.$$

⚠ Attention !

On n'entend pas par là le terme constant, mais le terme **non nul** de plus bas degré.

Démonstration. Puisque pour $0 \leqslant k < p$, $x_k \underset{x\to\pm\infty}{=} o(x^p)$, on

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} a_p x^p + o\left(x^p\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_p x^p.$$

Et de même au voisinage de 0, en se rappelant que cette fois, tous les termes de degré $> p+1$ sont négligeables devant x^p. □

La formule qui suit sera largement généralisée dans quelques temps.

Proposition 18.37 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1) : *Soit f une fonction dérivable en a.*
Alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Interprétation

Vous avez peut-être reconnu que $y = f(a) + f'()(x-a)$ est une équation de la tangente à f en a.
Donc la formule de Taylor quantifie l'écart entre f et sa tangente : il est négligeable quand x tend vers a, donc la tangente est une bonne approximation du graphe de f au voisinage de a.

Démonstration. C'est quasiment immédiat : dire que f est dérivable en a, de dérivée $f'(a)$, c'est dire que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0.$$

Soit encore

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \underset{x\to a}{=} o(1) \Leftrightarrow f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) \underset{x\to a}{=} o(x-a) \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a).$$

□

Corollaire 18.38 (Équivalents usuels en 0) :

1. $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$ *et donc* $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2. $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$
3. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ *et donc* $\ln(1+x) \underset{x\to a}{\sim} x$
4. *pour* $\alpha \in \mathbf{R}$, $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$ *et donc* $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
5. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
6. $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
7. $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
8. $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
9. $\mathrm{Arccos}(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\pi}{2} - x + o(x)$, *donc* $\mathrm{Arccos}(x) - \dfrac{\pi}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -x$
10. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + (x)$, *donc* $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
11. $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Remarque. Notons que l'équivalent de $(1+x)^\alpha - 1$ donne en particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$ et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{2}$.
Et que pour $\alpha = -1$, on retrouve celui de $\dfrac{1}{1+x}$.

Corollaire 18.39 :

1. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ *donc* $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.
2. $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ *donc* $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

Démonstration. $\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et donc

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o\left(x^2\right).$$

La seconde se prouve de la même manière à l'aide de $\mathrm{ch}(x) = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2(2x)$. □

Exemples 18.40

$$\frac{e^{1/x} - e^{1/x^2}}{x^2 - x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)) - 1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2 - x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 - x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}.$$

► Un calcul de limite :

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

► $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sin\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}$.

Commençons par noter que $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$\sin\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

D'autre part, on a

$$\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Et par conséquent

$$\frac{\ln\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sin\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Astuce
Voici une astuce qui nous servivra tout le temps : on connait le comportement de $\ln(1+x)$ lorsque $x \to 0$. Autrement dit, nous avons des informations sur $\ln(x)$, lorsque x est au voisinage de 1.
Lorsqu'on est confrontés au ln d'une quantité qui tend vers 1, il n'est pa rare de devoir utiliser cette astuce : ajouter 1 et retrancher 1, pour faire apparaître 1 plus une quantité qui tend vers 0.

18.4 Domination

Définition 18.41 – ► Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ si il existe une constante K telle que, pour n suffisamment grand, $|u_n| \leqslant K|v_n|$.
► Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a, on dit que f est **dominée** par g au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si il existe une fonction K et un voisinage V de a tel que $\forall x \in I$, $|f(x)| \leqslant K|g(x)|$.

Nous ne traitons ici que le cas des fonctions, mais tous ces résultats restent valables sur les suites. La proposition suivante ne pose aucune difficulté.

Proposition 18.42 : *Pour une fonction g qui ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, on a $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée **au voisinage de a**.*

Notons que $f(x) \underset{x\to a}{=} O(1)$ est équivalent au fait que f soit bornée au voisinage de a.
Bien entendu, pour une suite, il n'est plus nécessairement de dire «pour n suffisamment grand», puisqu'une suite bornée au voisinage de $+\infty$ est bornée (sur $\mathbf{N}$ tout entier).

Toutes les règles de calcul vues avec les o (proposition 18.7) restent valables en les remplaçant par des O.

Proposition 18.43 : *Soient f et g deux fonctions définies sur I. Alors : si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ ou si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to}{=} O(g(x))$.*

Remarque. Plus généralement, toute suite équivalente à un multiple de (u_n) est dominée par (u_n).
Donc cette proposition nous dit que l'ensemble des suites dominées par une suite donnée est très vaste : il contient déjà toutes les suites dominées par (u_n) ou équivalentes à un multiple de (u_n).
Nous verrons en TD que ce ne sont pas les seules.

18.5 Extension aux suites/fonctions complexes

Toutes les définitions données ci-dessus restent valables sans rien changer[11] pour des suites ou des fonctions à valeurs complexes.
On a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{=} o(|v_n|)$ et de même $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \Leftrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.
Le principal avantage de ces propositions est qu'elles nous ramènent au cas réel.
En revanche, pour les équivalents, on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
En réalité, on a bien l'implication $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$, c'est la réciproque qui est fausse.

[11] Si ce n'est les valeurs absolues en modules.

Pas de surprise
Cette réciproque était déjà fausse pour les suites réelles, puisqu'on n'a pas $1 \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n$.

Plus dangereux est le fait suivant : contrairement à ce qui s eproduit pour les limites, on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $\operatorname{Re} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \operatorname{Re} v_n$ et $\operatorname{Im} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Par exemple, pour $u_n = n^2 - ni$ et $v_n = n^2 + ni$, on a $in \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n^2 + o(n^2)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$.
Et de même, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors que les parties imaginaires de u_n et v_n ne sont pas équivalentes.

Je vous laisse bien entendu le soin de retranscrire tout ça pour des fonctions à valeurs complexes.