19 Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ désigne soit $\mathbf{R}$ soit $\mathbf{C}$, mais tous les résultats annoncés restent valables pour un corps quelconque.
Les éléments de $\mathbf{K}$ seront appelés les **scalaires**

19.1 Structure d'espace vectoriel

19.1.1 Définition

Définition 19.1 – Soit E un ensemble. On dit que E est un **$\mathbf{K}$-espace vectoriel** (ou un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$) s'il est muni de deux opérations notées $+ : \left| \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$ (loi de composition interne) et $\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array} \right.$ (appelée loi de composition externe) telles que :

1. $(E,+)$ soit un groupe abélien dont l'élément neutre est noté 0_E et est appelé **le vecteur nul** de E.
2. $\forall x\in E,\ 1\cdot x = x$
3. $\forall \lambda\in\mathbf{K},\ \forall (x,y)\in E^2,\ \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x+\lambda\cdot y$
4. $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x+\mu\cdot x$
5. $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x)$.

Les éléments de E sont alors appelés des **vecteurs.**

Remarque

Ce simple point requiert en fait la vérification de 4 axiomes (associativité, commutativité, élément neutre, existence d'un inverse).

Exemples 19.2

- $\mathbf{K}$ lui-même est un espace vectoriel muni de sa somme et de son produit[1].
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.
- $\mathbf{K}[X]$ est un espace vectoriel, de même que $\mathbf{K}_n[X]$.

[1] Qui peut donc être vu soit comme une loi de composition interne, soit comme une loi de composition externe.

Proposition 19.3 : *Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et A est un ensemble quelconque, alors sur $\mathcal{F}(A,E)$, on définit une loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe $\cdot$ en posant*

$$\forall (f,g)\in\mathcal{F}(A,E)^2,\ f+g : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$$

et

$$\forall f\in\mathcal{F}(A,E),\ \forall\lambda\in\mathbf{K},\ \lambda\cdot f : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda\cdot f(x) \end{array} \right. .$$

Alors, muni de ces lois, $\mathcal{F}(A,E)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est la fonction nulle.

Démonstration. On sait déjà qu'il s'agit d'un groupe abélien[2], d'élément neutre la fonction nulle.
Il suffit donc de prouver que la multiplication externe vérifie bien les points 2 à 5 ci-dessus.

[2] Cf ce qui a été fait dans le cas des fonctions sur un anneau.

C'est assez évident vu qu'ils sont vérifiés dans E.
Prouvons par exemple les deux premiers : soit $f \in \mathscr{F}(A, E)$.
Alors pour tout $x \in A$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, donc $1 \cdot f = f$. Donc 2) est vérifié.
Soient $f, g \in \mathscr{F}(A, E)$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors pour tout $x \in A$, on a

$$(\lambda \cdot (f+g))(x) = \lambda \cdot (f+g)(x) = \lambda \cdot (f(x) + f(x)) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$.
Donc 3) est vérifié. Etc. □

Proposition 19.4 : *Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, alors $E \times F$, muni des opérations $(e_1, y_1) + (e_2, y_2) = (e_1 + e_2, y_1 + y_2)$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$ est encore un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Nous avons déjà prouvé[3] que $(E \times F, +)$ est un groupe abélien, dont le vecteur nul est $(0_E, 0_F)$.
Soit $(x, y) \in E \times F$. Alors $1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$.
Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et soient $(e_1, y_1), (e_2, y_2) \in E \times F$. Alors

$$\begin{aligned}\lambda \cdot ((e_1, y_1) + (e_2, y_2)) &= \lambda \cdot (e_1 + e_2, y_1 + y_2) = (\lambda \cdot (e_1 + e_2), \lambda \cdot (y_1 + y_2)) = (\lambda \cdot e_1 + \lambda \cdot e_2, \lambda \cdot y_1 + \lambda \cdot y_2) \\ &= (\lambda \cdot e_1, \lambda \cdot y_1) + (\lambda \cdot e_2, \lambda \cdot y_2) = \lambda \cdot (e_1, y_1) + \lambda \cdot (e_2, y_2).\end{aligned}$$

Les deux autres points se prouvent de la même manière, en exploitant le fait qu'ils soient vrais dans E et dans F. □

[3] Cf le produit direct de deux groupes.

Ceci se généralise bien entendu au produit de n espaces vectoriels.
En particulier, $\mathbf{K}^n = \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \cdot \times \mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, de vecteur nul $(0, 0, \dots, 0)$.

Remarque
On note bien 0 : le scalaire nul, à ne pas confondre avec 0_E, le vecteur nul.
0 est dans $\mathbf{K}$, 0_E est dans E.

Proposition 19.5 (Règles de calcul dans un espace vectoriel) :
- *Pour $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$, on a $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0$ **ou** $x = 0_E)$.*
- *Pour tout $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$. Autrement dit, $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x : $(-1) \cdot x + x = 0_E$.*

Démonstration. ► On a déjà $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, et donc[4] $0 \cdot x = 0_E$.
De même, pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$, et donc $\lambda \cdot 0_E$.
Enfin, si $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors $x = \dfrac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \left(\dfrac{1}{\lambda}\lambda\right) \cdot x = 1 \cdot x = x$.

► $(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1+1) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$.
Et donc $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x. □

[4] On peut simplifier par $0 \cdot x$: tout élément d'un groupe est régulier.

Dans toute la suite du chapitre, sauf mention explicite du contraire, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

19.1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 19.6 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit F une partie de E.
On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** E si :

1. il est stable par $+$: $\forall (x, y) \in F^2$, $x + y \in F$
2. il est stable par multiplication par un scalaire : $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall x \in F$, $\lambda \cdot x \in F$
3. muni des lois induites $+$ et $\cdot$, F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Proposition 19.7 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels) : *Une partie F d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si*

1. *$0_E \in F$*
2. *F est stable par combinaison linéaire : $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot x + y \in F$.*

Démonstration. Supposons que F contienne le vecteur nul et soit stable par combinaison linéaire.
Alors , en prenant $\lambda = 1$, pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$, donc F est stable par $+$.
Et en prenant $y = 0_E$, alors $\forall x \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot x + 0_E = \lambda \cdot x \in F$.
Puisqu'en particulier, pour tout $(x, y) \in F^2$, on a $(-1) \cdot x + y = y - x \in F$, alors F est un sous-groupe abélien de E.
Et alors les quatre derniers points sont évidents, puisqu'ils découlent directement du fait que E soit un espace-vectoriel.
Par exemple, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$. □

Exemples 19.8

- $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces vectoriels de E.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$.
- L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Proposition 19.9 : *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.*
Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Puisque 0_E est dans tout sous-espace vectoriel, il est dans $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors, pour tout $i \in I$, puisque F_i est stable par combinaison linéaire, $\lambda \cdot \underbrace{x}_{\in F_i} + \underbrace{y}_{\in F_i} \in F_i$.

Et donc $\lambda \cdot x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

Donc $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarques. ▶ Notons que ceci vaut en particulier pour l'intersection de deux sous-espaces vectoriels, ou de $n \in \mathbf{N}^*$ sous-espaces vectoriels.
▶ En revanche, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est que rarement un sous-espace vectoriel. Ce n'est pas une grande surprise, puisque nous avons déjà prouvé en TD qu'une union de deux sous-groupes n'est un sous-groupe que si l'un est inclus dans l'autre[5].

[5] Et le même résultat reste valable pour des sous-espaces vectoriels.

19.2 Familles de vecteurs

19.2.1 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré par une partie

Définition 19.10 – Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. Un vecteur $x \in E$ est dit **combinaison linéaire de** $(e_1, \dots, e_n)$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.
On note alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $e_1, \dots, e_n$:

$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \right\}.$$

Remarque. Le vecteur nul est combinaison linéaire de toute famille, puisque quels que soient $e_1, \dots, e_n \in E^n$, $0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i$.

Exemple 19.11

► Dans $\mathbf{R}^4$, considérons la famille de deux vecteurs $u = (1, 2, -1, 3)$ et $v = (4, 1, 0, 1)$. Alors $(-10, 1, -2, 3)$ est combinaison linéaire de (x, y) puisque

$$(-10, 1, -2, 3) = 2 \cdot (1, 2, -1, 3) - 3 \cdot (4, 1, 0, 1).$$

En revanche, $(1, 0, 1, 2)$ n'est pas combinaison linéaire de u et v.
En effet, $(1, 0, 1, 2)$ est combinaison linéaire de u et v si et seulement si

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ (1, 0, 1, 2) = \lambda u + v \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ \begin{cases} \lambda + 4\mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ -\lambda = 1 \\ 3\lambda + \mu = 2 \end{cases}$$

donc si et seulement si le système $\begin{cases} \lambda + 4\mu = 1 \\ \lambda = -1 \\ \mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = 2 \end{cases}$ possède des solutions. Ce qui n'est pas le cas.

► Tout polynôme de $\mathbf{C}_n[X]$ est combinaison linéaire des $(X+1)^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$. En effet, par la formule de Taylor,

$$\forall P \in \mathbf{C}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{P^{(k)}(-1)}{k!}}_{\in \mathbf{C}} (X+1)^k.$$

Proposition 19.12 :

1. $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ *est un sous-espace vectoriel de* E*, qui contient* $e_1, \dots, e_n$.
2. $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ *est le plus petit, au sens de l'inclusion, sous-espace vectoriel de* E *qui contient les* e_i *: si* F *est un sous-espace vectoriel de* E *tel que* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i \in F$, *alors* $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F$.

On dit alors que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ *est le* ***sous-espace vectoriel engendré par*** $e_1, \dots, e_n$.

Démonstration. 1. Le vecteur nul 0_E est bien dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ car

$$0_E = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_n.$$

Soient $x, y \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i$.
Et alors pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$,

$$\alpha \cdot x + y = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i + \mu_i) \cdot e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Il contient tous les e_i puisque $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_{i-1} + 1 \cdot e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \dots + 0 \cdot e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

2. Soit F est un sous-espace vectoriel de E qui contient les e_i, et soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

   Alors, par stabilité de F par combinaison linéaire,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underbrace{e_i}_{\in F} \in F.$$

   Donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F$.

□

Proposition 19.13 :

1. *Si* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une famille de vecteur de* E*, alors pour tout* $m \leqslant n$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$.
2. *Si* $e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$*, alors* $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

Autrement dit
Si on prend moins de vecteurs, l'espace engendré est plus petit, et enlever un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne change pas l'espace engendré.

Démonstration.
1. $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient tous les e_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.
   Donc il contient $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$.
2. Par le point précédent, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
   Mais $e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, donc tous les e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.
   Et donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est un sous-espace vectoriel qui contient $e_1, \dots, e_n$: il contient $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
   Et donc par double inclusion, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

□

Exemple 19.14

Revenons sur le dernier point, et considérons la famille de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (3, 1, 4)$, $u_3 = (1, -3, 6)$.
Alors $u_3 = -2 \cdot u_1 + u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
Donc $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
Cela se comprend bien car un vecteur $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ s'écrit encore

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3(-2u_1 + u_2) = (\lambda_1 - 2\lambda_3)u_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

19.2.2 Familles génératrices

Définition 19.15 – Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est dite **génératrice de** E si $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.
Autrement dit, si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de $(e_1, \dots, e_n)$.

Familles
On décrira souvent les familles de vecteurs de E comme des n-uplets d'éléments de E, mais en réalité, l'ordre est rarement important.

Exemples 19.16

► La famille $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$.
En effet, si on note e_i le vecteur de $\mathbf{K}^n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n,\ (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} xe_i \cdot e_i.$$

Et donc tout vecteur de $\mathbf{K}^n$ est combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$.

▸ Toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (a,b,c) \in \mathbf{K}.$$

Comb. lin. Remarquons que nous avons là une combinaison linéaire.

Et donc l'ensemble $\mathcal{S}_2(\mathbf{K})$ des matrices symétriques est inclus dans $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
L'inclusion réciproque est évidente puisque $\mathcal{S}_2(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel contenant ces trois matrices.
Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbf{K})$.
▸ La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbf{K}_n[X]$.

Notons que trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel F de E, c'est écrire F sous forme de Vect. Ce qui permet de prouver à la fois qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel[6] et d'en déterminer une famille génératrice.

[6] Si cela n'a pas déjà été fait avant.

Exemples 19.17

▸ Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.
Soit alors $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F &\Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2y - 3z \\ &\Leftrightarrow (x,y,z) = (2y-3z, y, z) \\ &\Leftrightarrow (x,y,z) = y\cdot(2,1,0) + z\cdot(-3,0,1) \\ &\Leftrightarrow (x,y,z) \in \mathrm{Vect}\left((2,1,0),(-3,0,1)\right).\end{aligned}$$

Donc $F = \mathrm{Vect}\left((2,1,0),(-3,0,1)\right)$. Ceci prouve à la fois que F est un sous-espace vectoriel[7] de $\mathbf{R}^3$, et qu'il est engendré par la famille de deux vecteurs $(2,1,0),(-3,0,1)$.

[7] Comme tout Vect.

▸ Soit $F = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P - (X+1)P' = 0\}$.
Pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned}P \in F &\Leftrightarrow P - (X+1)P' = 0 \\ &\Leftrightarrow aX^2 + bX + c - (X+1)(2aX+b) = 0 \\ &\Leftrightarrow -aX^2 + -2aX + (c-b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = bX + b = b(X+1) \\ &\Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(X+1).\end{aligned}$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(X+1)$, ce qui prouve à la fois que F est[8] un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[X]$, mais en plus que la famille formée du seul polynôme $X+1$ en est une famille génératrice.

[8] Comme tout Vect.

Définition 19.18 – Un sous-espace vectoriel D de E engendré par un seul vecteur non nul, c'est-à-dire tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $D = \mathrm{Vect}(x)$, est appelé une **droite** (vectorielle).

Exemple 19.19

Dans $\mathbf{R}[X]$, considérons $F = \text{Vect}((1,1),(-1,-1))$.
A priori, il ne s'agit pas d'une droite, puisqu'engendré par deux vecteurs.
Mais $(-1,-1) = -1\cdot(1,1)$, de sorte que $F = \text{Vect}((1,1))$, qui est doc bien une droite.

19.2.3 Familles libres

Définition 19.20 – Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $(e_1,\dots,e_n)$ est **libre**, ou encore que $e_1,\dots,e_n$ sont **linéairement indépendants** si

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbf{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot e_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$$

Remarque. En fait l'implication ci-dessus est une équivalence puisque si les λ_i sont tous nuls, alors on a toujours $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot e_i = 0_E$.

Exemples 19.21

▸ Dans $\mathbf{R}_2[X]$, la famille $(P_1,P_2,P_3) = (X^2+X+1, X^2-1, X-2)$ est libre.
En effet, soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ trois réels tels que

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_iP_i = 0_{\mathbf{R}[X]} \Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2)X^2+(\lambda_1+\lambda_3)X+(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}$$

Alors $\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_1$, et donc la dernière équation est $4\lambda_1 = 0$, donc $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.
▸ Dans $\mathbf{R}^2$, la famille $((2,1),(-1,3),(0,2))$ est liée.
En effet, $(2,1)+2(-1,3)-\frac{7}{2}(0,2) = (0,0)$ est une combinaison linéaire nulle dont tous les coefficients ne sont pas nuls.
▸ Une famille formée d'un seul vecteur non nul x est libre puisque $\lambda\cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Définition 19.22 – Si $(e_1,\dots,e_n)$ n'est pas libre, on dit qu'il s'agit d'une **famille liée**, ou encore que $e_1,\dots,e_n$ sont linéairement dépendants.

Proposition 19.23 : *Une famille $(e_1,\dots,e_n)$ est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres :*

$$\exists i\in I,\ \exists(\lambda_j)_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}},\ e_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda_j\cdot e_j.$$

Démonstration. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est liée, alors il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot e_i = 0_E$.
Soit alors $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_i\neq 0$.
Alors $e_i = -\dfrac{1}{\lambda_i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda_j\cdot e_j = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}-\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\cdot e_j$.
Donc e_i est combinaison linéaire de $e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n$.

Et inversement, si $e_i = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \lambda_j \cdot e_j$, alors $\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \lambda_j \cdot e_j + (-1)\cdot e_i = 0_E$ est une combinaison linéaire nulle des e_k, à coefficients non tous nuls, donc $(e_1, \dots, e_n)$ est liée. □

Définition 19.24 – Deux vecteur x et y sont dits **colinéaires** si la famille (x, y) est liée. Par la proposition précédente, c'est le cas si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbf{K},\ x = \lambda \cdot y \ \textbf{ou}\ y = \lambda \cdot x.$$

Remarque
Si x et y sont non nuls, alors un tel λ est toujours non nul.

Proposition 19.25 : *Une famille contenue dans une famille libre est libre.*
Par contraposée, une famille qui contient une famille liée est liée.

Démonstration. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, et prouver que pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $(e_1, \dots, e_p)$ est encore libre.

Soient alors $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = 0_E$.

Alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p \cdot e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \dots + 0 \cdot e_n = 0_E$.
Par définition d'une famille libre, on a donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.
Et donc $(e_1, \dots, e_p)$ est libre. □

Corollaire 19.26 – *Une famille qui contient le vecteur nul est liée.*

Démonstration. La famille formée du seul vecteur nul est liée, car $1 \cdot 0_E = 0_E$, avec $1 \neq 0$.
Donc toute famille contenant le vecteur nul est liée car contient la famille liée $\{0_E\}$. □

En pratique, il suffit de savoir étudier la liberté des familles finies, pour étudier la liberté des familles infinies, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 19.27 : *Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si tout vecteur de* $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ *s'écrit de manière **unique** comme combinaison linéaire des e_i :*

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ \forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i).$$

Remarque
Le point important ici est l'unicité, l'existence découle de la définition même d'un Vect.

Démonstration. Supposons $(e_1, \dots, e_n)$ libre, et soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n)$ deux familles de scalaires telles que $\sum_{i=1} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i$.

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \cdot e_i = 0_E.$$

Mais par définition d'une famille libre, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i$.

Inversement, si tout vecteur de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i, en particulier, c'est le cas du vecteur nul : si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ est telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i$$

alors par unicité de l'écriture, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$, donc la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. □

Autrement dit, les familles libres sont celles dans lesquelles le principe d'identification des coefficients d'une combinaison linéaire est valable.
L'exemple qui suit est souvent utile :

> **Proposition 19.28 :** *Toute famille finie de $\mathbf{K}[X]$ formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.*

Démonstration. Soit $P_1, \dots, P_n$ une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts. Quitte à les renuméroter, on peut supposer que $\deg P_1 < \deg P_2 < \cdots < \deg P_n$.

Soient alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = 0_{\mathbf{K}[X]}$ $(\star)$.

Alors, le terme de degré $\deg P_n$ est λ_n fois le coefficient dominant a_n de P_n, qui est non nul par définition.
Donc[9] $\lambda_n a_n = 0$, et donc $\lambda_n = 0$.
Mais alors le terme de degré $\deg P_{n-1}$ est λ_{n-1} fois le coefficient dominant de P_{n-1} qui est non nul. Donc $\lambda_{n-1} = 0$.
De proche en proche[10], on prouve que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. □

[9] Par identification des coefficients dans $(\star)$.

[10] Mon astuce préférée pour masquer une récurrence...

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple, considérons $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et soient $L_0, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux λ_i.
Alors les L_i sont tous de degré n. Pourtant il s'agit d'une famille libre de $\mathbf{K}_n[X]$.

En effet, soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i = 0_{\mathbf{K}[X]}$.

Alors en particulier, pour $j \in [\![0, n]\!]$, par évaluation en λ_j,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(\lambda_j) = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0.$$

Donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$: la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est libre.

19.2.4 Généralisation aux familles infinies

> **Définition 19.29 –** Soit X une partie de E non vide. On peut supposer[11] que $X = \{e_i,\ i \in I\}$. Un vecteur $x \in E$ est dit **combinaison linéaire de** X s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n) \in X^n$ tels que x soit combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$.

[11] Cela revient à «numéroter» les éléments de X, ce qui est toujours possible, quitte à les numéroter par eux-mêmes...

Remarque

Une combinaison linéaire est donc toujours une somme d'un nombre **fini** de vecteurs.

Pourquoi veut-on des sommes finies ? Tout simplement parce qu'on ne sait pas ce que serait une somme infinie ! On pourra lui donner du sens par exemple dans $\mathbf{R}$, mais dans un espace quelconque, ce n'est pas toujours possible.
Par exemple dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, que serait une somme infinie de suites ?

Un moyen pratique de manipuler les combinaisons linéaires de X dans le cas où X est infini est la notion de famille presque nulle :

> **Définition 19.30 –** Soit I un ensemble quelconque. Une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires est dite **presque nulle**[12] si tous ses éléments, **sauf un nombre fini** sont nuls.
> On note $\mathbf{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I.
> Ainsi, pour $X = \{e_i,\ i \in I\}$ partie de E, un vecteur $y \in E$ est combinaison linéaire de X si et seulement si il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telles que $y = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

Notation

Le fait d'écrire $X = \{e_i,\ i \in I\}$ est particulièrement pratique lorsque X est fini de cardinal n, où on peut alors prendre $I = [\![1, n]\!]$, et «numéroter» les éléments de X :

$$X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

Exemple 19.31

Dans $\mathbf{K}[X]$, tout polynôme est combinaison linéaire des éléments de $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$.
En effet, un tel polynôme est dans l'un des $\mathbf{K}_n[X]$, et donc est combinaison linéaire de $1, X, \dots, X^n$, c'est-à-dire d'un nombre fini d'éléments de $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$.

Définition 19.32 – Soit X une partie de E. On note alors $\text{Vect}(X)$, et on appelle **sous-espace engendré par** X l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

On a alors encore les résultats suivants :

Proposition 19.33 : *Pour toute partie non vide X de E, $\text{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E.*
C'est même le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel qui contient X : si F est un sous-espace vectoriel de E avec $X \subset F$, alors $\text{Vect}(X) \subset F$.

Démonstration. On a toujours $0_E \in \text{Vect}(X)$, et si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \cdot f_j$ sont deux combinaisons linéaires de X, alors pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$,

$$\alpha \cdot x + y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i) \cdot e_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \cdot e_j$$

est encore combinaison linéaire de X.
Donc $\text{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire, et est un sous-espace vectoriel de E.
Il est trivial qu'il contient tous les éléments de X car pour $x \in X$, $x = 1 \cdot x \in \text{Vect}(X)$.

Inversement, si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient x, soit alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \in \text{Vect}(X)$.
Alors $e_1, \dots, e_n$ sont dans F, et par stabilité de F par combinaison linéaire, $x \in F$.
Donc $\text{Vect}(X) \subset F$. □

Proposition 19.34 :
1. *Si $X \subset Y$ sont deux parties de E, alors $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$.*
2. *Si $x \in \text{Vect}(X \setminus \{x\})$, alors $\text{Vect}(X \setminus \{x\}) = \text{Vect}(X)$.*

Intuition
On peut toujours enlever un vecteur combinaison linéaire des autres sans changer l'espace engendré.

Démonstration.
1. Toute combinaison linéaire d'éléments de X est en particulier combinaison linéaire d'éléments de Y.
2. On a toujours $\text{Vect}(X \setminus \{x\}) \subset \text{Vect}(X)$.
D'autre part, $x \in \text{Vect}(X \setminus \{x\})$ par hypothèse, et si $y \in X$ est différent de X, alors $y \in X \setminus \{x\}$, donc tout élément de X est dans $\text{Vect}(X \setminus \{x\})$, de sorte que $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(X \setminus \{x\})$.

□

Définition 19.35 – Une partie X est **génératrice de** E si $\text{Vect}(X) = E$.

Exemple 19.36

La famille $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est génératrice de $\mathbf{K}[X]$ puisque tout polynôme est combinaison linéaire[13] des X^k.

La notion de liberté se généralise également :

[13] Donc combinaison linéaire d'un nombre **fini** d'entre eux.

Définition 19.37 – Soit $X = \{e_i,\ i \in I\}$. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre si

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)},\ \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0.$$

Une famille contenue dans une famille libre est toujours libre, et une famille qui contient le vecteur nul est toujours liée.

Proposition 19.38 : *Une famille infinie*[14] $(e_i)_{i\in I}$ *est libre si et seulement si toutes ses sous-famille finies sont libres.*

[14] Le résultat reste vrai pour les familles finies, mais n'est d'aucun intérêt.

Démonstration. Prouvons plutôt[15] qu'une famille est liée si et seulement si elle possède une sous-famille finie liée.
Si $(e_i)_{i\in I}$ est liée, alors il existe une combinaison linéaire, nécessairement finie, nulle à coefficients non tous nuls.
Et donc la sous-famille finie des vecteurs qui forment cette combinaison linéaire est liée (par la même relation de dépendance linéaire).

[15] Ce qui est équivalent.

Inversement, s'il existe une sous-famille finie de $(e_i)_{i\in I}$ qui est liée, alors il existe une combinaison linéaire des vecteurs de cette sous-famille, nulle et à coefficients non tous nuls.
Donc il existe une combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$, qui est nulle et à coefficients non tous nuls.
Donc $(e_i)_{i\in I}$ est une famille liée. □

Exemple 19.39

Dans $\mathbf{K}[X]$, $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est libre. En effet, toute sous-famille finie est formée de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts, donc est libre.

19.2.5 Bases

Définition 19.40 – Une **base** de E est une famille qui est à la fois libre et génératrice de E.

Proposition 19.41 : *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit* ***de manière unique*** *comme combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$.*

Démonstration. L'existence vient de l'aspect générateur : $E = \mathrm{Vect}(e_i,\ i \in I)$, et l'unicité de la liberté. □

Exemple 19.42

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et soient $L_0, L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés.
Alors nous avons prouvé que tout polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des L_i, donc $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Nous serons surtout amenés à manipuler les bases finies[16]. Dans ce cas, on dispose de la notion suivante, qui nous permet de nous ramener à $\mathbf{K}^n$:

[16] L'existence d'une telle base n'est pas toujours vraie et fera l'objet d'un chapitre à part.

Définition 19.43 – Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.
On dit alors que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ est le vecteur des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque. Autant l'ordre dans lequel on prend les vecteurs d'une famille n'influe pas sur le fait qu'elle soit libre ou génératrice, autant il est important lorsqu'on manipule une base, puisque les coordonnées dépendent de l'ordre dans laquelle on a ordonné les vecteurs de la base.

Exemples 19.44 **Bases canoniques**

- La famille $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ est une base de $\mathbf{K}^n$, appelée **base canonique de $\mathbf{K}^n$.**
En effet, nous avons déjà vu qu'elle est à la fois libre et génératrice.
- La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$, appelée **base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.**
En effet, tout polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$.
- Plus généralement, la famille $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbf{K}[X]$.
- La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

«Canonique» veut dire standard, et désigne donc une base qui est sans doute un peu plus naturelle que les autres. Elles sont ainsi appelées par convention, et ce n'est pas vous qui décidez si une base est canonique ou non : les bases ci-dessus sont appelée bases canoniques, et ce sont les seules.
Pour un espace vectoriel quelconque, il n'y a pas de raison qu'une base soit privilégiée par rapport à un autre et mérite le qualificatif de «canonique».
En particulier, je ne veux surtout pas voir de raisonnement du type : «soit E un espace vectoriel et soit $\mathscr{B}$ **une** base canonique».
Soit on est dans l'un des cas ci-dessus, et il y a **la** base canonique, et c'est celle-ci et aucune autre que l'on peut nommer ainsi, soit on est dans un espace quelconque et il y a[17] des bases, mais aucune n'est plus canonique que les autres.

[17] Ce qui sera prouvé plus tard.

19.3 SOMMES DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

19.3.1 Sommes de deux sous-espaces

Définition 19.45 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle alors **somme de** F **et** G, et on note $F + G$ la partie de E définie par :

$$F + G = \{x + y, \ (x, y) \in F \times G\}.$$

Donc par définition, tout vecteur de $F + G$ est somme d'un élément de F et d'un élément de G.
En revanche, rien n'indique qu'une telle écriture soit unique.

Exemple 19.46

Dans $\mathbf{R}^3$, considérons les deux sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \ x - y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \ x + 2z + y = 0\}$.

Alors $(4,-2,0) \in F+G$ puisque

$$(4,-2,0) = \underbrace{(2,2,-1)}_{\in F} + \underbrace{(2,-4,1)}_{\in G} = \underbrace{(1,1,0)}_{\in F} + \underbrace{(3,-3,0)}_{\in G}.$$

Donc il s'écrit de deux[18] manières différentes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

[18] Au moins. On montrerait en fait qu'il y en a une infinité.

Proposition 19.47 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

1. *$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, qui contient à la fois F et G.*
2. *Si H est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cup G \subset H$, alors $F+G \subset H$.*

Autrement dit, $F+G$ est le plus petit[19] sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G.

[19] Au sens de l'inclusion.

Démonstration. 1. Puisque $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, $0_E \in F+G$.

Soient $x, y \in F+G$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$ et $(y_F, y_G) \in F \times G$ tels que $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$.
Alors

$$\lambda \cdot x + y = \lambda \cdot (x_F + x_G) + (y_F + y_G) = \underbrace{\lambda \cdot x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda \cdot x_G + y_G}_{\in G} \in F+G.$$

Donc $F+G$ est stable par combinaisons linéaires, et donc est un sous-espace vectoriel de E.

Si $x \in F$, alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F+G$.
Donc $F \subset F+G$, et de même $G \subset F+G$.

2. Soit H un sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G.
Alors, $\forall (x,y) \in F \times G$, $\underbrace{x}_{\in H} + \underbrace{y}_{\in H} \in H$, et donc $F+G \subset H$.

□

Proposition 19.48 : *Soient X et Y deux parties de E. Alors* $\mathrm{Vect}(X \cup Y) = \mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y)$.
Ainsi, si X est une famille génératrice de F et Y est une famille génératrice de G, alors $X \cup Y$ est une famille génératrice de la somme $F+G$.

Démonstration. Il est évident que $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(X \cup Y)$ et $\mathrm{Vect}(Y) \subset \mathrm{Vect}(X \cup Y)$, donc $\mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y) \subset \mathrm{Vect}(X \cup Y)$.
Inversement, si $x \in \mathrm{Vect}(X \cup Y)$, alors il existe $x_1, \dots, x_n \in X$, $y_1, \dots, y_p \in Y$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ tels que

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i}_{\in \mathrm{Vect}(X)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \mu_k \cdot y_k}_{\in \mathrm{Vect}(Y)} \in \mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y).$$

□

19.3.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 19.49 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en **somme directe** si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, x + y = 0_E \Rightarrow x = y = 0_E.$$

Dans ce cas, on note $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Notation

$F \oplus G$ n'est pas un nouvel objet : c'est le sous-espace vectoriel $F + G$. Mais la notation $F \oplus G$ nous donne une information supplémentaire : F et G sont en somme directe.

Exemple 19.50

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$, et soit $G = \operatorname{Vect}(I_n) = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbf{R}\}$.
Alors F et G sont en somme directe. En effet, soit $M \in F$ et soit $N \in G$, de sorte qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $N = \lambda I_n$. Alors

$$M + \lambda I_n = 0_n \Rightarrow \operatorname{tr}(M + \lambda I_n) = 0 \Rightarrow \operatorname{tr}(M) + \lambda \operatorname{tr}(I_n) = 0 \Rightarrow \lambda n = 0.$$

Et donc $\lambda = 0$, donc $N = 0_n$, et il vient donc $M + 0 \cdot I_n = 0_n \Leftrightarrow M = 0_n$.

Proposition 19.51 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors il y a équivalence entre :*

1. *F et G sont en somme directe*
2. *$F \cap G = \{0_E\}$*
3. *tout vecteur de $F + G$ s'écrit de manière **unique** comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons que F et G soient en somme directe, et soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $-x \in G$. Or $x + (-x) = 0_E$, donc $x = -x = 0_E$. Et donc $F \cap G \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque étant toujours vérifiée, on a bien $F \cap G = \{0_E\}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Soit $x \in F + G$, et supposons que $x = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, avec $f_1, f_2 \in F$ et $g, g_2 \in G$.
Alors $f_1 + g_1 = f_2 + g_2 \Leftrightarrow f_1 - f_2 = g_2 - g_1$.
Mais $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$, donc $f_1 - f_2 \in F \cap G = \{0_E\}$ et donc $f_1 - f_2 = 0_E \Leftrightarrow f_1 = f_2$.
Et de même, $g_1 = g_2$.
Donc l'écriture de x comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

3) $\Rightarrow$ 1). Supposons unique l'écriture des vecteurs de $F + G$, et soient $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x + y = 0_E$.
Comme on a d'autre part $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, alors, par unicité de l'écriture, $x = 0_E$ et $y = 0_E$.
Donc F et G sont en somme directe. □

19.3.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 19.52 – Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires dans** E si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire s'ils sont en somme directe, et que leur somme est égale à E tout entier.

Proposition 19.53 : *Les sous-espaces F et G ont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme un élément de F plus un élément de G.*

Démonstration. □

Exemple 19.54

Pour l'instant, la proposition précédente est le meilleur outil dont nous disposions pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, et nécessite souvent des raisonnements par analyse-synthèse.
▸ Par exemple, nous savons déjà prouvé que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Cela signifie donc que les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ formés des matrices symétriques et des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
▸ De même, nous avons prouvé que les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
▸ Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est non nul, alors $F = \{Q \in \mathbf{K}[X] \mid \deg Q < \deg P\}$ et $G = \{PQ, Q \in \mathbf{K}[X]\}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{K}[X]$. En effet, c'est tout simplement la division euclidienne.

⚠ Si $E = F \oplus G$, on dit bien que G est **un** supplémentaire de F, mais jamais **le** supplémentaire de F, tout simplement car il n'y a pas unicité : il y a généralement[20] une infinité de supplémentaires de F.
Par exemple, dans $\mathbf{R}^3$, soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y\}$.
Soit alors $G = \mathrm{Vect}(1,-1,0)$.
Alors $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.
En effet, si $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, supposons que $(x,y,z) = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$.
Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $v = \lambda(1,-1,0)$, et u est de la forme $u = (a,a,b)$.
Alors $(x,y,z) = (a,a,b) + \lambda(1,-1,0)$, de sorte que $b = z$, $x = a + \lambda$, $y = a - \lambda$.
Donc $a = \dfrac{x+y}{2}$, et donc $\lambda = \dfrac{x-y}{2}$.
Donc si une telle écriture $(x,y,z) = u + v$ existe, c'est

$$(x,y,z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) + \frac{x-y}{2}(1,-1,0).$$

Inversement, il est facile de vérifier que cette écriture convient, et qu'on a alors la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Mais on pourrait sur le même principe prouver que $G' = \mathrm{Vect}(1,-2,0)$ et $G'' = \mathrm{Vect}(-2,1,0)$ sont des supplémentaires de F.

De manière générale, ne confondez surtout pas un supplémentaire avec le complémentaire : le complémentaire d'un sous-espace vectoriel ne contient pas 0_E. Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

[20] Sauf dans les cas $F = E$ et $F = \{0_E\}$.

19.3.4 Somme et somme directe de n sous-espaces

Définition 19.55 – Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle alors somme de $F_1, \dots, F_n$, et on note

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = \left\{\sum_{i=1}^n x_i,\ (x_1,\dots,x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n\right\}.$$

On généralise alors sans difficultés les propriétés rencontrées dans le cas de deux sous-espaces vectoriels :

Proposition 19.56 :

1. $\sum_{i=1}^{n} F_i$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *qui contient tous les* F_i.
2. *si pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, X_i *est une partie génératrice (finie ou non) de* F_i, *alors* $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ *est une partie génératrice de* $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Définition 19.57 – La somme $F_1 + \cdots + F_n$ de n sous-espaces vectoriels est dite **directe** si

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots F_n,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_E.$$

On note alors $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ au lieu de $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

⚠ Attention ! Toujours comme pour le cas de deux sous-espaces vectoriels, on ne définit pas ici de nouvel objet.

⚠ Contrairement aux sommes directes de deux sous-espaces vectoriels, on n'a pas de caractérisation facile de la somme directe de $n \geqslant 3$ sous-espaces vectoriels à l'aide d'une intersection.
En particulier, il ne suffit pas que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \{0_E\}$ ni que $\forall i \neq j,\ F_i \cap F_j = \{0_E\}$.

Proposition 19.58 : *Soient* $F_1, \ldots, F_n$ *des sous-espaces vectoriels de* E. *Alors la somme* $\sum_{i=1}$ F_i *est directe si et seulement si tout vecteur de* $\sum_{i=1}^{n} F_i$ *s'écrit de manière* ***unique*** *comme somme d'éléments des* F_i.

Démonstration. Supposons la somme directe, et soit $x \in F_1 + \cdots + F_n$, qui s'écrit de deux manières $x = x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$, avec $x_i, y_i \in F_i$.
Alors $0_E = x - x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)$.
Et donc, $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i - y_i = 0_E \Leftrightarrow x_i = y_i$.

L'autre implication se prouver en remarquant que $0_E = 0_E + \cdots + 0_E$ est la seule décomposition possible du vecteur nul. □

Exemple 19.59

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Alors pour tout $p \leqslant n$ les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(e_1), \mathrm{Vect}(e_2), \ldots, \mathrm{Vect}(e_p)$ sont en somme directe.
En effet, si $0_E = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$, avec $x_i \in \mathrm{Vect}(e_i)$, alors il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $x_i = \lambda_i e_i$.
Et alors $0_E = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$.
La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ étant libre[21] il vient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, et donc $x_1 = \cdots = x_p = 0_E$, donc la somme est directe.

Si de plus $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}(e_i)$.

[21] Car sous-famille d'une famille libre.

Remarque. Sans chercher à trop formaliser, il est facile de se convaincre que la notion de somme directe est stable par sous-famille : si $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe, alors la somme de toute sous-famille de $(F_1, \ldots, F_n)$ est directe.

En particulier, deux quelconques des F_i sont en somme directe, et donc $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour $i \neq j$.
En fait, on a même mieux : par exemple si $F_1 + F_2 + F_3$ est directe, alors on a $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = F_1 \oplus (F_2 \oplus F_3)$, ce qui signifie que :

- la somme $F_2 + F_3$ est directe
- la somme $F_1 + (F_2 \oplus F_3)$ est directe.

19.4 APPLICATIONS LINÉAIRES

19.4.1 Définition, premières propriétés

Définition 19.60 – Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est appelée **application linéaire** si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque
Il est important que le corps $\mathbf{K}$ soit le même pour E et F : deux espaces vectoriels réels ou deux espaces vectoriels complexes.

Remarques. ▶ Notons qu'une application linéaire n'est rien d'autre qu'un morphisme de groupes[22] vérifiant en plus $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.
▶ On dit parfois $\mathbf{K}$-linéaire au lieu de linéaire, mais cette distinction n'a lieu d'être que lorsqu'il y a ambiguïté sur le corps.
Par exemple, l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array} \right.$ est $\mathbf{R}$-linéaire, c'est-à-dire est une application linéaire du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ dans lui-même.
Mais elle n'est pas $\mathbf{C}$-linéaire :

$$\forall z \in \mathbf{C}^*,\ f(iz) = \overline{iz} = -i\overline{z} \neq i\overline{z}.$$

[22] Prendre $\lambda = 1$ dans la définition pour s'en convaincre.

Exemples 19.61

▶ L'application constante $E \to F$ égale à 0_F est linéaire.
▶ L'identité id_E est linéaire puisque

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ \mathrm{id}_E(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot x + y = \lambda \cdot \mathrm{id}_E(x) + \mathrm{id}_E(y).$$

Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \mathrm{id}_E$ est une application linéaire de E dans E. Une application linéaire de la forme $\lambda \mathrm{id}_E$ est appelée homothétie de rapport λ.
▶ L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2P + P(0) - XP' \end{array} \right.$ est linéaire.
▶ Nous avons déjà vu que la trace et la transposition sont des applications linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ (à valeurs dans $\mathbf{K}$ pour la trace, dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ pour la transposition).
▶ Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors l'application $f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est une application linéaire, appelée application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 19.62 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :*

1. $f(0_E) = 0_F$
2. *pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, alors*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. 1. Ceci a déjà été prouvé pour les morphismes de groupes, donc reste en particulier vrai pour une application linéaire.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, prouvons

$$\mathcal{P}(n) \ : \forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,\ \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Pour $n=1$, il suffit de prendre $y = 0_E$ dans la définition de la linéarité : pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$f(\lambda x) = f(\lambda \cdot x + 0_E) = \lambda \cdot f(x) + f(0_E) = \lambda \cdot f(x).$$

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et soient $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in E^{n+1}, (\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$.
Alors

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

C'est la définition de la linéarité.

Hypothèse de récurrence.

Donc par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

□

Proposition 19.63 : *Soit $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $\lambda f + g$ est encore linéaire, c'est-à-dire dans $\mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration. Soient $x, y \in E$ et soit $\mu \in \mathbf{K}$. Alors

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(\mu x + y) &= \lambda f(\mu x + y) + g(\mu x + y) \\ &= \lambda(\mu f(x) + f(y)) + \mu g(x) + g(y) \\ &= \mu(\lambda f(x) + g(x)) + (\lambda f(y) + g(y)) \end{aligned}$$

□

Corollaire 19.64 – *Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. En particulier, c'est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 19.65 (Composition d'applications linéaires) : *Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \to G$ est linéaire.*

Démonstration. Soient $(x,y) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$(g\circ f)(\lambda x+y) = g(f(\lambda x+y)) = g(\lambda f(x)+f(y)) = \lambda g(f(x))+g(f(y)) = \lambda(g\circ f)(x)+(g\circ f)(y).$$

Donc $g \circ f$ est linéaire. □

Définition 19.66 – Une application linéaire de E dans E est appelée un **endomorphisme** de E.
On note $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Proposition 19.67 : *$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.* .

Danger ! Généralement, cet anneau n'est pas commutatif

Démonstration. Nous savons déjà que $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien, d'élément neutre l'application linéaire nulle $0_{\mathcal{L}(E)}$.
La composition est associative[23], et possède pour élément neutre id_E. De plus, pour $(f, g, h) \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, on a

$$(f \circ (g+h))(x) = f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x).$$

Donc $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.
On prouve de même la distributivité à droite. □

[23] Puisqu'elle l'est sur $\mathcal{F}(E, E)$.

Remarques. ▸ Les inversibles de cet anneau sont les endomorphisme bijectifs (dont l'inverse est encore linéaire, mais ceci est automatique et sera prouvé dans un instant).
▸ Toutes les règles de calculs valables dans un anneau le sont donc dans $\mathcal{L}(E)$, et en particulier le binôme de Newton, sous réserve que deux endomorphismes commutent.

Proposition 19.68 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel de E stable[24] par f.*
Alors l'application induite par f sur F, qu'on notera $f_{|F}$ (au lieu de $f_{|F}^{|F}$) est un endomorphisme de F.

[24] C'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$.

Démonstration. Il s'agit simplement de prouver la linéarité, mais elle est évidente et découle de celle de F.
En effet, si $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors

$$f_{|F}(\lambda x + y) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda f_{|F}(x) + f_{|F}(y).$$

Donc $f_{|F}$ est linéaire. □

Exemple 19.69

Dans $\mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, soit u l'application $f \mapsto f''$.
Alors pour tout $\omega \in \mathbf{R}^*$, $F_\omega = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos(\omega x),\ x \mapsto \sin(\omega x))$ est stable par u et $u_{|F_\omega} = -\omega^2 \mathrm{id}_{F_\omega}$.

19.4.2 Noyau et image

Définition 19.70 – Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle alors **noyau de** f et on note $\mathrm{Ker}\, f$ l'ensemble

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

Définition 19.71 – Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On appelle image de f et on note $\mathrm{Im}\, f$ l'ensemble

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Proposition 19.72 : *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*
1. $\mathrm{Ker}\, f$ *est un sous-espace vectoriel de E*
2. $\mathrm{Im}\, f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration. 1. Commençons par noter que $\mathrm{Ker}\, f \subset E$ par définition.
Puisque $f(0_E) = 0_F$, $0_E \in \mathrm{Ker}\, f$.
Soient $x, y \in \mathrm{Ker}\, f$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y) = \lambda \cdot 0_F + 0_F = 0_F$$

et donc $\lambda \cdot x + y \in \operatorname{Ker} f$.
Donc $\operatorname{Ker} f$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

2. Puisque $f(0_E) = 0_F$, 0_F est bien[25] dans $\operatorname{Im} f$.
Soient $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Et donc
$$f(\lambda \cdot x_1 + x_2) = \lambda \cdot f(x_1) + f(x_2) = \lambda \cdot y_1 + y_2.$$
Donc $\lambda \cdot y_1 + y_2$ possède un antécédent par f, et donc est dans $\operatorname{Im} f$.
Ainsi, $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

□

[25] Les éléments de $\operatorname{Im} f$ sont ceux qui possèdent au moins un antécédent par f.

Remarque. Le premier point permet souvent de gagner du temps lorsqu'il s'agit de prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel : si on arrive à l'écrire comme le noyau d'une application linéaire, c'est automatique.
Par exemple, $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ \operatorname{tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, puisque c'est le noyau de l'application linéaire $\operatorname{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \mathbf{R})$.
De même, l'ensemble des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ puisqu'il s'agit du noyau de l'application $M \mapsto {}^tM - M$.

Remarque
A priori il faut tout de même prouver que cette application est bien linéaire, mais nous savons déjà que la transposition est linéaire, que l'identité est linéaire, et que toute combinaison linéaire d'applications linéaires l'est encore, donc en fait, il n'y a rien à dire.

Proposition 19.73 : *Soit $F : E \to F$ une application linéaire. Alors :*
1. *f est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$
2. *f est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration. 1. Supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, et soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
Alors $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0_F$, de sorte que $x - y \in \operatorname{Ker} f$.
Et donc $x - y = 0_E \Leftrightarrow x = y$: f est injective.

Inversement, supposons f injective, et soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$ et donc, par injectivité, $x = 0_E$.
Ainsi, $\operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$, et l'inclusion réciproque est évidente[26], donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

2. C'est juste la définition de la surjectivité, la linéarité n'est ici d'aucune importance.

□

[26] Par exemple car $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

La proposition suivante est plus évidente, mais mérite d'être mentionnée : multiplier une application linéaire par une constante ne change ni son noyau, ni son image.

Proposition 19.74 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$. Alors*
$$\operatorname{Ker}(\lambda f) = \operatorname{Ker} f \text{ et } \operatorname{Im}(\lambda f) = \operatorname{Im} f.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors
$$x \in \operatorname{Ker}(\lambda f) \Leftrightarrow \lambda f(x) = 0_F \Leftrightarrow f(x) = 0_F \Leftrightarrow x = \in \operatorname{Ker} f.$$
Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = f\left(\lambda \frac{x}{\lambda}\right) = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im}(\lambda f)$.
Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(\lambda f)$.
Et alors $\operatorname{Im}(\lambda f) \subset \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) = \operatorname{Im} f$.
Par double inclusion, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(\lambda f)$. □

Proposition 19.75 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E. Alors $(f(e_i))_{i \in I}$ est génératrice de* $\operatorname{Im}(f)$.

Démonstration. Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Par définition, ceci signifie que y possède un antécédent $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Mais puisque $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ tel que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i$.
Et alors, par linéarité de f,

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) \in \mathrm{Vect}(f(e_i), i \in I).$$

Ainsi, tout vecteur de $\mathrm{Im}\, f$ est combinaison linéaire des $f(e_i)$, donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Vect}(f(e_i), i \in I)$.
Mais puisque $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F qui contient les $f(e_i)$, on a[27] $\mathrm{Vect}(f(e_i), i \in I) = \mathrm{Im}\, f$.
Donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_i), i \in I)$, de sorte que $(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$. □

[27] $\mathrm{Vect}(f(e_i))$ est le plus petit sous-espace vectoriel de F qui contient tous les $f(e_i)$.

19.4.3 Isomorphismes

Définition 19.76 – Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un **isomorphisme** si elle est bijective.
Dans le cas où $E = F$, on dit que f est un **automorphisme de** E.

Proposition 19.77 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire bijective. Alors $f^{-1} : F \to E$ est linéaire, donc est dans $\mathscr{L}(F, E)$.*

Démonstration. Soient $x, y \in F^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = \lambda f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = \lambda x + y.$$

En appliquant f^{-1}, il vient$\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}\left(f\left(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\right)\right) = f^{-1}(\lambda x + y)$.
Donc f^{-1} est linéaire. □

Définition 19.78 – On appelle **groupe linéaire sur** E, et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
C'est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$.

Proposition 19.79 : *Une famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si $f_{\mathscr{B}} : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{array}\right.$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ sur E.*

Démonstration. Il s'agit de commencer par prouver la linéarité de $f_{\mathscr{B}}$, ce qui est sans difficulté.
Pour la bijectivité, notons que demander que chaque élément de F possède un unique antécédent par $f_{\mathscr{B}}$ revient à demander que chaque vecteur de E s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire des e_i.
Ce qui est l'une des caractérisation des bases. □

Ce que nous dit la proposition précédente, c'est que si on a une base de E de cardinal n, alors E a les mêmes propriétés, en tant qu'espace vectoriel que $\mathbf{K}^n$.

Proposition 19.80 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.*

Démonstration. Si f est un isomorphisme, alors $\mathrm{Im}(f) = F$, et donc $(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de F.
De plus, si $(\lambda_i) \in K^{(I)}$ est telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$, alors $f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = 0_F$.

Donc $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$, et donc $\forall i \in I,\ \lambda_i = 0$.
Donc la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre, donc est une base de F.

Inversement, supposons que $(f(e_i))_{i\in I}$ soit une base de F.
Alors en particulier elle est génératrice de F, et donc $\operatorname{Im} f = F$: f est surjective.
Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. Alors, de manière unique, $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$.

Mais alors $f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = 0_F$, et donc $\sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$, donc[28] $\forall i \in I,\ \lambda_i = 0$.
Donc f est injective, et donc est un isomorphisme. □

[28] Par liberté de la famille des $f(e_i)$.

Remarque. Cette proposition dit notamment que si l'image d'une base de E est une base de F, alors f est un isomorphisme, et donc l'image de toute base de E est une base de F.

19.4.4 Endomorphismes remarquables

Définition 19.81 – Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On appelle **homothétie de rapport** λ l'application linéaire $\lambda \mathrm{id}_E$.

Les homothéties sont en quelques sorte les endomorphismes les plus simples que l'on puisse imaginer. En particulier, l'application nulle et l'identité sont deux homothéties (de rapports respectifs 0 et 1).

Définition 19.82 – Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Alors tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in G$. On appelle **projection sur** F **parallèlement à** G l'endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ qui à x associe x_1, sa composante suivant F.

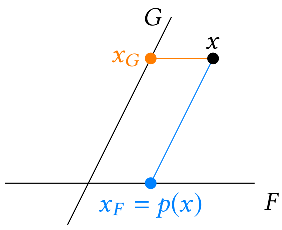

FIGURE 19.1– La projection sur F parallèlement à G.

Notons tout de suite que si p est la projection sur F parallèlement à G et si q est la projection sur G parallèlement à F, alors $p + q = \mathrm{id}_E$.
En effet, pour $x = x_F + x_G \in E$, on a $p(x) = x_F$ et $q(x) = x_G$, donc $p(x) + q(x) = x = \mathrm{id}_E$.

Proposition 19.83 : *La projection p sur F parallèlement à G est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.*

Démonstration. Prouvons que p est linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors, de manière unique, $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ et de même, $y = y_F + y_G$, avec $y_F \in F$ et $y_G \in G$.
Alors

$$\lambda \cdot x + y = \lambda \cdot (x_F + x_G) + (y_F + y_G) = \underbrace{\lambda \cdot x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda \cdot x_G + y_G}_{\in G}.$$

Nous avons donc là l'unique décomposition de $\lambda \cdot x + y$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
Et donc $p(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot x_F + y_F = \lambda \cdot p(x) + p(y)$.
Donc p est linéaire.

De plus, pour $x = x_F + x_G \in E$, on a $p(x) = x_F = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et donc $p(p(x)) = x_F = p(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $p \circ p = p$. □

Définition 19.84 – On appelle **projecteur de** E tout $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

Exemple 19.85

L'application $f : \mathcal{M}_n(R) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ M \mapsto \dfrac{M + {}^tM}{2}$ est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
En effet, elle est clairement[29] linéaire, et

$$f^2(M) = \frac{f(M) + {}^tf(M)}{2} = \frac{1}{4}\left(M + {}^tM + {}^t(M + {}^tM)\right) = \frac{M + {}^tM}{2} = f(M).$$

Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f^2 = f$.

[29] C'est une combinaison linéaire des deux applications linéaires $M \mapsto {}^tM$ et $M \mapsto M$.

A priori, projecteurs et projections sont deux notions différentes. Le théorème suivant prouve qu'il s'agit en fait de la même chose :

Théorème 19.86 : *Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si p est une projection.*
Dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Remarque
En particulier, si p est un projecteur, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E.

Démonstration. Supposons que $p \circ p = p$. Montrons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E.
Nous allons pour cela prouver que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Im} p$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker} p$.
Procédons par analyse-synthèse. Soit $x \in E$ et supposons que $x = x_1 + x_2, x_1 \in \operatorname{Im} p, x_2 \in \operatorname{Ker} p$. Alors

$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1).$$

Mais $x_1 \in \operatorname{Im} p$, donc il existe $y_1 \in E$ tel que $x_1 = p(y_1)$, et alors $p(x_1) = p^2(y_1) = p(y_1) = x_1$.
Donc $p(x) = x_1$, et alors $x_2 = x - x_1 = x - p(x)$.

Or, pour tout $x \in E, x = p(x) + (x - p(x))$.
Mais $p(x) \in \operatorname{Im} p$ par définition et $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ car

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0.$$

Donc tout vecteur de E s'écrit bien d'au moins une manière comme somme d'un élément de $\operatorname{Im} p$ et d'un élément de $\operatorname{Ker} p$.
Ainsi, tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\operatorname{Im} p$ et d'un élément de $\operatorname{Ker} p$: $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E.
Enfin, si $x \in E$, $x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p}$ et $p(x) = p(x)$.
Donc p est l'application qui à x associe sa composante $p(x)$ suivant $\operatorname{Im} p$: c'est donc la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Inversement, si p est la projection sur F parallèlement à G, avec $E = F \oplus G$, nous avons déjà prouvé que p est un projecteur.
Et alors, $\operatorname{Ker} p = \{x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in G : x_1 = 0\} = \{x_2, x_2 \in G\} = G$.
De même, il est clair que $\operatorname{Im} p \subset F$.
Soit $x \in F$. Alors $p(x) = x$, et donc $x \in \operatorname{Im} p$. Ceci prouve que $F \subset \operatorname{Im} p$, et donc $\operatorname{Im} p = F$. □

Exemple 19.87

Si f est le projecteur $M \mapsto \dfrac{M + {}^tM}{2}$, alors

$$M \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \frac{M + {}^tM}{2} = 0 \Leftrightarrow M = -{}^tM$$

et donc $\operatorname{Ker}(f)$ l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
D'autre part, il est clair que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f(M)$ est une matrice symétrique,

puisque ${}^t f(M) = {}^t\left(\dfrac{M + {}^tM}{2}\right) = \dfrac{M + {}^tM}{2} = f(M)$.
Donc déjà $\mathrm{Im}(f) \subset \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. De plus, pour tout $M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, on a $f(M) = M$, et donc $M \in \mathrm{Im}(f)$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.
Puisque nous savons déjà que f est un projecteur, il vient donc $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$, et f est la projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

Proposition 19.88 : *Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur, alors*

$$\mathrm{Im}\, p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E).$$

Autrement dit
Im p est l'ensemble des points fixes de p.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que si $x \in \mathrm{Im}\, p$, alors $p(x) = x$.
Et inversement, si x est un point fixe de p, $x = p(x)$, alors $x \in \mathrm{Im}\, p$.
Le fait que l'ensemble des points fixes de p soit le noyau de $p - \mathrm{id}_E$ est en fait vrai pour tout endomorphisme :

$$\{x \in E \mid p(x) = x\} = \{x \in E \mid p(x) - \mathrm{id}_E(x) = 0_E\} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E).$$

□

Définition 19.89 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G, x_F \in F, x_G \in G$.
On appelle alors **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G l'application $s : x \mapsto x_F - x_G$.

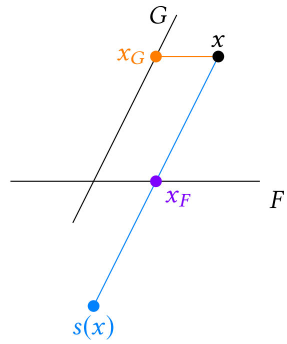

FIGURE 19.2– La symétrie par rapport F parallèlement à G.

Proposition 19.90 : *La symétrie s par rapport à F parallèlement à G est un endomorphisme de E, qui vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$.*

Démonstration. Notons simplement que si p désigne la projection sur F parallèlement à G, alors $s = 2p - \mathrm{id}_E$.
En effet, pour $x \in E$,

$$2p(x) - \mathrm{id}_E(x) = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s(x).$$

Donc s est linéaire car combinaison linéaire d'applications linéaires, et

$$s \circ s = (2p - \mathrm{id}_E) \circ (2p - \mathrm{id}_E) = 4p^2 - 4p + \mathrm{id}_E = 4p^2 - 4p + \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E.$$

□

Remarque
On a ici utilisé le fait que p et id_E commutent.

Remarque. Les applications dont le carré est égale à l'identité ou, de manière équivalente, égales à leur propre bijection réciproque sont nommées involutions.
Ce que dit la proposition qui précède, c'est que les involutions **linéaires** sont exactement les symétries.

Proposition 19.91 : *Si s est un endomorphisme de E tel que $s^2 = \mathrm{id}_E$, alors*

1. $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ *et* $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ *sont supplémentaires dans E*
2. *s est la symétrie par rapport à* $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration. Notons $p = \dfrac{s + \mathrm{id}_E}{2}$.
Alors $p^2 = \dfrac{s^2 + 2s + \mathrm{id}_E}{4} = \dfrac{s + \mathrm{id}_E}{2} = p$.

Donc p est un projecteur dont l'image et le noyau sont supplémentaires dans E.
Mais $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
D'autre part, on a

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Ker}\left(\frac{s - \mathrm{id}_E}{2}\right) = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E).$$

Donc $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, ce qui prouve 1).
De plus, pour $x \in E$, alors de manière unique, $x = x_{\operatorname{Im} p} + x_{\operatorname{Ker} p}$ avec $x_{\operatorname{Im} p} \in \operatorname{Im} p$ et $x_{\operatorname{Ker} p} \in \operatorname{Ker} p$.
Et donc $s(x) = 2p(x) - \mathrm{id}_E(x) = 2x_{\operatorname{Im} p} - (x_{\operatorname{Im} p} + x_{\operatorname{Ker} p}) = x_{\operatorname{Im} p}$.
On reconnaît bien là l'expression de la symétrie par rapport à $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. □

19.4.5 Détermination d'une application par restriction à des supplémentaires

Proposition 19.92 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, et soit H un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel.*
Alors pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{L}(F, H) \times \mathcal{L}(G, H)$, il existe un unique $f \in \mathcal{L}(E, H)$ tel que $f_{|F} = u$ et $f_{|G} = v$.

Démonstration. Supposons qu'un tel f existe, et soit $x \in E$. Alors, de manière unique $x = x_F + x_G$.
Et donc $f(x) = u(x_F) + v(x_G)$.

Inversement, soit $f : x_F + x_G \mapsto u(x_F) + v(x_G)$.
Prouvons que f est linéaire : soient $x = x_F + x_G$ et $= y_F + y_G$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
Alors $\lambda x + y = \underbrace{\lambda x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda y_F + y_G}_{\in G}$. Donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= u(\lambda x_F + y_F) + v(\lambda x_G + y_G) \\ &= \lambda u(x_F) + u(y_F) + \lambda v(x_G) + v(y_G) \\ &= \lambda(u(x_F) + v(x_G)) + u(y_F) + v(y_G) = \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Donc f est bien un élément de $\mathcal{L}(E)$.
Si $x \in F$, alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ de sorte que $f(x) = u(x) + v(0_E) = u(x)$, et donc $f_{|F} = u$.
De même, $f_{|G} = v$. □

En particulier, la projection sur F parallèlement à G aurait pu être définie comme l'unique endomorphisme de E dont la restriction à F est id_F et la restriction à G est l'application nulle.
Et de même, la symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'unique endomorphisme de E dont la restriction à F est id_F et la restriction à G est $-\mathrm{id}_G$.

Cette proposition se généralise sans difficulté au cas d'une somme directe de n sous-espaces vectoriels.
Vous passerez une bonne partie de l'année prochaine à déterminer quand, étant donné un endomorphisme f de E, E se «casse» en une somme directe de sous-espaces vectoriels sur lesquels la restriction de f est une homothétie.
Un tel endomorphisme sera appelé diagonalisable.