20 Dérivabilité

Dans tout le chapitre, I désigne un **intervalle** non réduit à un point, et $\mathbf{K}$ désigne, sauf mention explicite du contraire, l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Un point est dit intérieur à I si ce n'est pas une borne de I. On note $\mathring{I}$ l'ensemble[1] des points intérieurs à I.

[1] Appelé intérieur de I.

20.1 Dérivabilité : l'aspect local

20.1.1 Définition

Définition 20.1 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$, et soit $a \in I$.
On dit que f est **dérivable en** a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbf{R}$.
On note alors $f'(a)$ cette limite, qu'on appelle nombre dérivé de f en a.

Définition 20.2 – Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on dit que f est dérivable sur I, et on note f' la fonction $a \mapsto f'(a)$, la fonction dérivée de f.
On note alors $\mathscr{D}(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Définition 20.3 – ▶ Si f est dérivable en $a \in I$, on appelle tangente à f en a la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.
▶ Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, on appelle tangente à f en a la droite verticale d'équation $x = a$.

Exemple 20.4

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.
En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
Donc le graphe de f possède une tangente verticale en 0. Plus généralement $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in]0,1[$ n'est pas dérivable en 0.

Proposition 20.5 : *La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe $\ell \in \mathbf{K}$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \ell(x-a) + o((x-a))$.*
Dans ce cas, $\ell = f'(a)$.

Remarque
On retrouve donc la formule de Taylor-Young à l'ordre 1.

Démonstration. Nous avons déjà vu le sens direct.
Inversement, si $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \ell(x-a) + o((x-a))$, alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} \ell + o(1) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Donc f est dérivable en a, avec $f'(a) = \ell$. □

Corollaire 20.6 – *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+o((x-a))$, alors $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, et donc f est continue en a. □

Proposition 20.7 : *Si $f : I \to \mathbf{C}$ est une fonction à valeurs complexes, alors f est dérivable en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont, et alors $f'(a) = (\operatorname{Re}(f))'(a) + i(\operatorname{Im}(f))'(a)$.*

20.1.2 Dérivées à gauche et à droite

Définition 20.8 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$, et soit $a \in I$.

- Si a n'est pas la borne de gauche de I, on dit que f **est dérivable à gauche en** a si $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbf{R}$, et on note alors $f_g'(a)$ cette limite (appelée dérivée à gauche de f en a).
- Si a n'est pas la borne de droite de I, on dit que f **est dérivable à droite en** a si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbf{R}$, et on note alors $f_d'(a)$ cette limite (c'est la dérivée à droite de f en a).

Proposition 20.9 : *Soit $f : I \to \mathbf{K}$ et soit $a \in \mathring{I}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et que $f_g'(a) = f_d'(a)$.*

Démonstration. □

Remarque. Notons que ceci ne vaut que pour un point intérieur à I. En une borne de I, la question ne se pose pas : la limite ne peut être calculée que d'un côté.

Exemple 20.10

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0.

En effet, pour $x < 0$, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{-x}{x} = -1 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -1$. Donc $f_g'(0) = -1$.

De même, pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$. Donc $f_d'(0) = 1$.

En revanche, f n'est pas dérivable en 0 puisque $f_g'(0) \neq f_d'(0)$.

20.1.3 Opérations sur les dérivées

Proposition 20.11 : *Soient $f, g : I \to \mathbf{K}$, soit $a \in I$ tel que f et g soient dérivables en a. Alors*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$*
2. *$f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$*
3. *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$*
4. *si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a avec $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g(a)^2}$ et $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$*

Démonstration. 1. On a $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} \lambda f(a)+\lambda f'(a)(x-a)+o((x-a))$, donc λf est dérivable en a, avec $(\lambda f)'(a)=\lambda f'(a)$.

2. On a $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+g(a)+(f'(a)+g'(a))(x-a)+o((x-a))$.

3. On a

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\underset{x\to a}{=} (f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a))\,(g(a)+g'(a)(x-a)+o((x-a))) \\ &\underset{x\to a}{=} f(a)g(a)+(f'(a)g(a)+f(a)g'(a))\,(x-a)+\underbrace{f'(a)g'(a)(x-a)^2}_{\underset{x\to a}{=} o(x-a)}+o((x-a))+o((x-a)^2) \\ &\underset{x\to a}{=} f(a)g(a)+(f'(a)g(a)+f(a)g'(a))\,(x-a)+o(x-a). \end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a)} \\ &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}\,\frac{1}{1+\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o(x-a)} \\ &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}\left(1-\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o(x-a)+o\left(-\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o(x-a)\right)\right) \\ &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}\left(1-\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o(x-a)\right) \\ &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}-\frac{g'(a)}{g(a)^2}(x-a)+o(x-a). \end{aligned}$$

Détails

C'est la formule

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+o(x).$$

La formule pour la dérivée d'un quotient en découle en notant que $\dfrac{f}{g}=f\times\dfrac{1}{g}$. □

Corollaire 20.12 – *L'ensemble $\mathscr{D}(I,\mathbf{K})$ est un sous-anneau de $\mathscr{C}(I,\mathbf{K})$ (et donc de $\mathscr{F}(I,\mathbf{K})$), mais également un sous-espace vectoriel.*

Démonstration. Les formules ci-dessus prouvent qu'il est stable par combinaisons linéaires (donc par différence) et par produit. □

Proposition 20.13 : *Soit $f : I\to J$ et $g : J\to\mathbf{K}$, où J est une partie de $\mathbf{R}$. Soit $a\in I$, tel que f soit dérivable en a et g soit dérivable en $f(a)$. Alors $g\circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a)=f'(a)g'(f(a))$.*

Démonstration. Puisque g est dérivable en $f(a)$,

$$g(x) \underset{x\to f(a)}{=} g(f(a))+g'(f(a))(x-f(a))+o(x-f(a)).$$

Soit encore[2]

$$g(f(x)) \underset{x\to a}{=} g(f(a))+g'(f(a))(f(x)-f(a))+o(f(x)-f(a)).$$

Mais f est dérivable en a, donc

$$f(x)-f(a) \underset{x\to a}{=} f'(a)(x-a)+o(x-a).$$

En particulier, $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{=} O(x-a)$ et donc $o(f(x)-f(a)) \underset{x\to a}{=} o(x-a)$.
Et donc

$$g(f(x)) \underset{x\to a}{=} g(f(a))+g'(f(a))f'(a)(x-a)+o(x-a).$$

Donc $g\circ f$ est dérivable en a. □

[2] C'est de la composition à droite par f.

Exemple 20.14

Proposition 20.15 : *Sot $f : I \to J$ une bijection continue, et soit $a \in J$ tel que f soit dérivable en $f^{-1}(a)$. Alors f^{-1} est dérivable en a si et seulement si $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ et dans ce cas,*

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}.$$

Astuce
Ceci donne un moyen simple de retrouver la formule si on l'a oubliée.
Malheureusement, ça ne saurait en aucun cas suffire à prouver que f^{-1} est dérivable...

Démonstration. Si f^{-1} est dérivable en a, alors en dérivant en a la relation $x = f(f^{-1}(x))$, alors il vient $1 = (f^{-1})'(a) \times f'(f^{-1}(a))$.
Donc en particulier, $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$.

Supposons à présent cette condition vérifiée. Alors, pour $x \in J \setminus \{a\}$,

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x-a} = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(a))}.$$

Mais f étant continue, f^{-1} l'est aussi, et en particulier, $\lim_{x\to a} f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$.
Et donc, par composition de limites, $\lim_{x\to a} \frac{f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(a))}{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)} = f'(f^{-1}(a)) \neq 0$.
Et alors, en passant à l'inverse,

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(a))}{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

□

On retrouve alors notamment les dérivées de l'exponentielle[3], et des fonctions trigonométriques inverses. Et notamment le fait que Arcsin et Arccos ne soient pas dérivables en -1 et en 1.

[3] Qui, rappelons-le, est définie comme la bijection réciproque de ln.

20.1.4 Dérivée $k^{\text{ème}}$, fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 20.16 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$. On note $f^{(0)} = f$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, si $f^{(k)}$ existe et est dérivable sur I, on note $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
Si la fonction $f^{(k)}$ est définie, on l'appelle alors dérivée $k^{\text{ème}}$ de f, et on dit que f est k-fois dérivable.

Remarque. En particulier une fonction k fois dérivable est continue, dérivable, deux fois dérivables, etc, $(k-1)$ fois dérivable.

Remarque
Nous avions déjà une notation pour l'ensemble des fonctions continues, et on utilisera indifféremment $\mathscr{C}(I, \mathbf{K})$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$.

Définition 20.17 – On note $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.
Pour $k \in \mathbf{N}^*$, une fonction $f : I \to \mathbf{K}$ est dite **de classe $\mathscr{C}^k$ sur** I si elle est k fois dérivable sur I et que $f^{(k)}$ est continue sur I.
On note alors $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
Enfin, on dit que $f : I \to \mathbf{K}$ est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur** I si elle de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. Autrement dit, si elle est dérivable autant de fois que l'on veut.
On note alors $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbf{K}) = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} \mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Remarque. Une fonction est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ si et seulement si elle est dérivable et que sa dérivée est de classe $\mathscr{C}^n$.

Proposition 20.18 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$) : *Soit $n \in \mathbf{N}^*$.*

1. *Si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$, alors $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda f + g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$.*
2. *Si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$, alors $fg \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$. De*
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{(Formule de Leibniz).}$$
3. *Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et que g ne s'y annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*
4. *Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{C}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*
5. *Si $f : I \to J$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^n$, et que sa dérivée ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.*

Tous ces énoncés restent valables en changeant «de classe $\mathscr{C}^n$» en «n fois dérivable» ou encore en «de classe $\mathscr{C}^\infty$».

Démonstration. Toutes ces preuves se font par récurrence sur n.

1.
2. Prouvons simplement $\mathscr{P}(n)$: «$\forall f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$, $fg \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$».
Pour $n = 1$, c'est un résultat bien connu.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soient f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I.
Alors fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$.
Mais f, f', g, g' sont toutes de classe $\mathscr{C}^n$, donc par hypothèse de récurrence[4], $(fg)' \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$.
Et donc $fg \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{K})$, de sorte que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Une fois acquis le fait que (fg) soit n fois dérivable sur I, la preuve de la formule de Leibniz est mot pour mot la même que pour les polynômes.
3.

□

[4] Et par le point 1) pour la somme.

20.2 Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis

20.2.1 Extrema locaux

Définition 20.19 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$, et soit $a \in I$. On dit que f possède un **maximum local** en a s'il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I,\ f(x) \leqslant f(a).$$
On dit que f possède un **minimum local en** a s'il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I,\ f(x) \geqslant f(a).$$
Si f possède un maximum local ou un minimum local en a, on dit que f possède un extremum local en a.

Bien entendu, un maximum ou un minimum de f sur I est un extremum local, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ possède en -1 et en 1 un maximum et un minimum local, qui ne sont pas des extrema globaux, puisque f n'est ni minorée ni majorée.

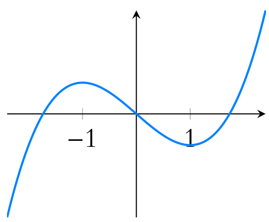

Figure 20.1– La fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$

Proposition 20.20 : *Soit $f : I \to \mathbf{K}$, et soit a intérieur à I. Si f est dérivable en a et possède un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Supposons que f possède un maximum local en a.
Alors pour $x < a$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$, et donc par passage à la limite

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0.$$

De même, pour $x > A$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$, et donc par passage à la limite,

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

Mais $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$, donc $f'(a)$ est à la fois positif et négatif : il est nul. □

Ceci n'est absolument plus vrai si a est un borne de I. Par exemple la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ possède un maximum local en 1, mais sa dérivée en 1 vaut 2 !

Définition 20.21 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$, et soit $a \in I$. On dit que a est un point critique de f si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Remarque. Ce que nous dit la proposition précédente, c'est qu'un extremum local de f est nécessairement atteint en un point critique.

Il n'y a pas de réciproque[5] comme le prouve le cas de la fonction $f : x \mapsto x^3$.
Elle possède un point critique en 0, mais n'a pas d'extremum local en 0 : dans tout voisinage de 0, f prend des valeurs supérieures strictes à $f(0) = 0$ (en les réels supérieures stricts à 0) et des valeurs inférieures strictes à $f(0)$.

[5] En tous cas pas sans hypothèse supplémentaire.

20.2.2 Le théorème de Rolle

Théorème 20.22 (Théorème de Rolle[6]) : *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

[6] Michel ROLLE (1652–1719). Contemporain de Newton et Leibniz, il était très critique à l'égard du calcul différentiel, qui n'apportait selon rien de très nouveau.
Il est amusant de constater que son nom est passé à la postérité justement pour un théorème de calcul différentiel (que Rolle avait toutefois énoncé uniquement en termes algébriques, et pour des polynômes).

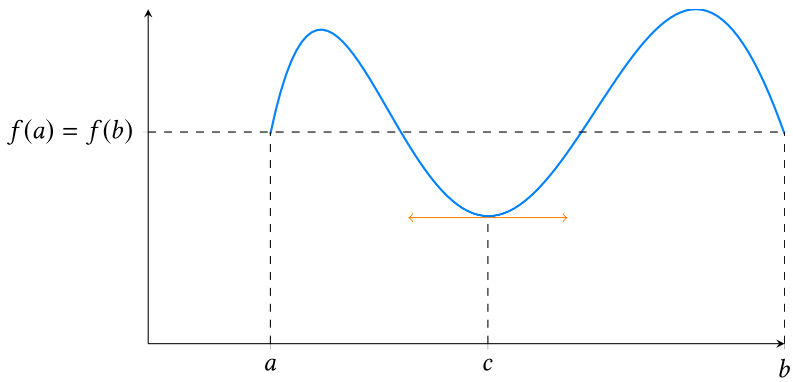

FIGURE 20.2 – Notons qu'il n'y a aucunement unicité d'un tel c. Sur la figure ci-dessus, il y en a 3.

Démonstration. La preuve est somme toute assez intuitive, et c'est probablement celle que vous imaginez sur la figure.
Puisque f est continue sur $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes.
Elle possède donc un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$.
▸ Si $m = M$, alors f est constante sur $[a,b]$, et n'importe quel $c \in]a,b[$ fait le job.
▸ Sinon, l'un des deux extremums, soit m, soit M n'est pas égal à $f(a)$. Et donc est atteint en un point $c \in [a,b]$ qui ne peut être ni a ni b, qui est donc dans $]a,b[$.
Par conséquent, f possède un extremum local[7] en c, qui est intérieur à $]a,b[$, et donc $f'(c) = 0$. □

[7] Et en fait global.

Ceci ne vaut plus du tout pour les fonctions complexes. Par exemple $f : t \mapsto e^{it}$ est dérivable sur $[0, 2\pi]$, avec $f(0) = f(2\pi) = 1$, mais pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f'(t) = ie^{it}$ est de module 1, donc non nul.

Exemple 20.23

Entre deux racines réelles d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ se trouve toujours une racine, réelle elle aussi, de son polynôme dérivé.
En effet, si $a < b$ sont deux racines de $P \in \mathbf{R}[X]$, alors P est bien continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et avec $P(a) = P(b) = 0$. Donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $P'(c) = 0$.
Mieux : si $P \in \mathbf{R}[X]$ est scindé à racines simples, c'est-à-dire qu'il possède n racines distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.
Mais dans chacun des $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$, P' possède une racine, et donc possède $n-1$ racines distinctes. C'est-à-dire autant que son degré : P' est scindé à racines simples.

20.2.3 Le théorème des accroissements finis

Théorème 20.24 (Égalité des accroissements finis) : *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f'(c)(b - a) = f(b) - f(a).$$

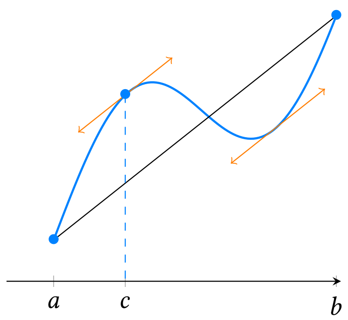

Figure 20.3 – Il existe une tangente parallèle à la corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Notons qu'il n'y a pas unicité d'un tel c.

Démonstration. Soit d la fonction affine[8] $x \mapsto \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
Et soit alors $g = f - d$. Il s'agit clairement d'une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ car f l'est.
On a alors $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ et $g(b) = f(b) - f(b) = 0$.
Donc par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Mais la dérivée de g est $g' : x \mapsto f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Donc on a $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

[8] Vous aurez peut-être reconnu qu'il s'agit de la corde joignant les points a et b.

Exemple 20.25

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la fonction ln est continue et dérivable sur $[k, k+1]$.
Donc il existe $c_k \in]k, k+1[$ tel que $\ln(k+1) - \ln(k) = \dfrac{1}{c_k}$.

Mais alors $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{c_k} < \frac{1}{k}$, de sorte que

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Soit encore $\ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1 - \frac{1}{n+1}$.

20.2.4 L'inégalité des accroissements finis

Bien que ni Rolle ni le théorème des accroissements finis ne soient valables pour des fonctions à valeurs complexes, l'inégalité qui suit est valable aussi en complexe.

Théorème 20.26 (Inégalité des accroissements finis) : *Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction dérivable sur I. S'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall t \in I$, $|f'(t)| \leqslant M$, alors*

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Remarque. L'existence d'un tel M est notamment garantie lorsque I est un segment et que f y est de classe $\mathscr{C}^1$. En effet, f' étant alors continue sur le segment I, par le théorème des bornes atteintes, elle y est bornée.

Démonstration. Si f est une fonction réelle, il suffit de remarquer que pour $x < y$ deux éléments de I, il existe $c \in]x, y[\subset I$ tel que $f'(c)(y - x) = f(y) - f(x)$. Mais alors $|f'(c)| \leqslant M$ et donc en passant à la valeur absolue,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y - x| \leqslant M|y - x|.$$

Dans le cas où f est à valeurs complexes, fixons $x < y$ dans I.
► **1^er^ cas** : supposons que $f(y) - f(x) \in \mathbf{R}$.
Alors la fonction $\mathrm{Re}(f)$ est dérivable sur $[x, y]$, avec $|\mathrm{Re}(f)'| = |\mathrm{Re}(f')| \leqslant |f'| \leqslant M$.
Et donc par le cas réel, $|f(y) - f(x)| = |\mathrm{Re}(f)(y) - \mathrm{Re}(f)(x)| \leqslant M|y - x|$.
► **Cas général** : soit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $f(y) - f(x) = e^{i\theta}|f(y) - f(x)|$. Alors $e^{-i\theta}(f(y) - f(x)) \in \mathbf{R}$.
Soit alors $\varphi : t \mapsto e^{-i\theta} f(t)$. C'est une fonction dérivable sur I, avec $\varphi'(t) = e^{-i\theta} f'(t)$, et donc $|\varphi'(t)| = |f'(t)| \leqslant M$.
Puisque d'autre part, $\varphi(y) - \varphi(x) \in \mathbf{R}$, on est dans le cas traité ci-dessus :

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant M|y - x|.$$

Mais $|\varphi(y) - \varphi(x)| = |f(y) - f(x)|$. □

Exemple 20.27

Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$.
En effet, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $|\sin'(t)| = |\cos t| \leqslant 1$.
Et en particulier, lorsque $y = 0$, il vient : $\forall x \in \mathbf{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

Remarque
Cette inégalité n'a vraiment d'intérêt que pour x proche de 0, puisque pour $|x| \geqslant 1$, elle est triviale...

Définition 20.28 – Soit D une partie de $\mathbf{R}$, soit $f : D \to \mathbf{C}$ et soit $k > 0$. On dit que f est **k-lipschitzienne**[9] si

$$\forall (x,y) \in D^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

S'il existe $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne, on dit simplement que f est **lipschitzienne.**

[9] Du nom de Rudolph LIPSCHITZ (1832–1903).

Graphiquement, une fonction k-lipschitzienne est une fonction pour laquelle pour $x \neq y$, $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant k$, c'est-à-dire dont les pentes des cordes restent comprises entre $-k$ et k.

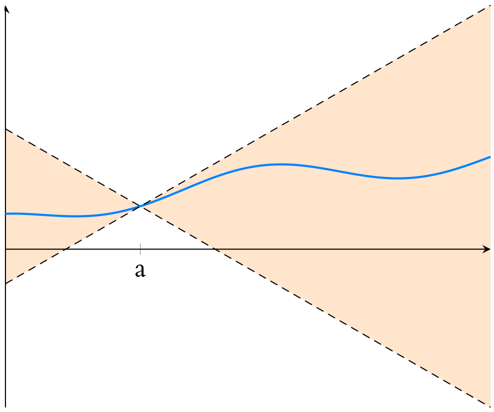

FIGURE 20.4 – Le graphe de f reste compris entre les droites passant par $(a, f(a))$ et de pentes $\pm k$.

Proposition 20.29 : *Si f est k-lipschitzienne sur D, alors elle est continue sur D.*

Démonstration. Soit $a \in D$, et soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$.
Alors pour $x \in D$, $|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < k\eta \leqslant \varepsilon$.
Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, de sorte que f est continue en a. Et ceci étant vrai pour tout a, f est continue sur D. □

⚠ La réciproque est fausse il existe des fonctions continues qui ne sont pas k-lipschitziennes pour aucun $k > 0$.
C'est par exemple le cas de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$.
En effet, quel que soit $k > 0$, pour $x > k$, on a $f(x) - f(0) = x^2 > k|x - 0|$.

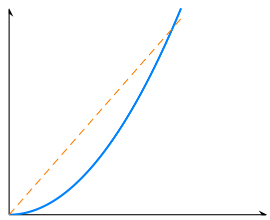

FIGURE 20.5– Les pentes des cordes de la fonction carré ne sont pas bornées : elle n'est pas lipschitzienne.

L'inégalité des accroissements finis prouve alors que si f est dérivable, et que f' est bornée, alors f est lipschitzienne. En particulier, si f est $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, alors f' y est bornée, et donc f est k-lipschitzienne, pour $k = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

20.3 DÉRIVABILITÉ ET MONOTONIE

Commençons par un résultat bien connu, qu'il est temps de prouver, et que nous avons déjà utilisé à maintes reprises[10].

[10] Par exemple pour dire que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Proposition 20.30 : *Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.*

Démonstration. Le sens direct est évident : si f est constante, alors sa dérivée est la fonction nulle.
Inversement, supposons que f' soit la fonction nulle, et soient $x < y$ deux éléments de I.
Si f est réelle, alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) = 0$. Donc $f(y) = f(x)$, et donc f est constante.

Si f est à valeurs complexes, alors le théorème des accroissements finis n'est plus valable pour f, mais l'est pour les fonctions réelles $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$, qui sont donc constantes. □

⚠ Rappelons qu'il est fondamental que I soit un intervalle.
Par exemple, $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, de dérivée nulle, mais n'est pas constante sur $\mathbf{R}^*$.
Mais elle est bien constante sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$.

Proposition 20.31 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I. Alors f est croissante si et seulement si $\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) \geqslant 0$.*

Démonstration. Si f est croissante, alors pour tout x intérieur à I et tout $y \neq x$, on a $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$, et donc lorsque $y \to x$, $f'(x) = \lim\limits_{y\to x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$.
Inversement, supposons f' positive sur $\mathring{I}$, et soient $x < y$ deux points de I.
Alors par les accroissements finis, il existe $c \in]x,y[\subset \mathring{I}$ tel que $f(y)-f(x) = f'(c)(y-x) \geqslant 0$.
Et donc $f(x) \leqslant f(y)$: f est croissante. □

Bien entendu, en appliquant cette proposition à $-f$, on obtient que f est décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$ sur $\mathring{I}$.

Proposition 20.32 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$, alors f est strictement croissante.*

Démonstration. Puisque $f' \geqslant 0$, alors f est croissante sur I. Soient $x < y$ deux points de I, et supposons par l'absurde que $f(x) = f(y)$. Alors f est constante sur $[x,y]$, et donc sa dérivé y est nulle, ce qui est absurde. □

Alternative
On pourrait aussi reprendre la preuve de la proposition précédente avec les accroissements finis.

Il est bien connu que la réciproque est fausse : une fonction strictement croissante peut avoir une dérivée qui s'annule, comme par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ en 0.

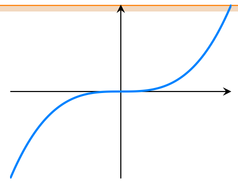
FIGURE 20.6– $x \mapsto x^3$ est strictement croissante mais possède un point critique en 0.

Corollaire 20.33 – *Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Si f' est positive sur $\mathring{I}$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.*

Démonstration. Supposons pour commencer que f' ne s'annule qu'en un point c, intérieur à I.
Soient alors $(x,y) \in I^2$, avec $x < y$.
Si $y \in]x,c[$, alors il suffit d'appliquer la proposition précédente sur $]x,c[$, pour prouver que $f(x) < f(y)$. De même si $x \in]c,y[$.
Si $x \leqslant c \leqslant y$, alors par la proposition précédente, f est strictement croissante sur $[x,c]$ et sur $[c,y]$. Donc $f(x) \leqslant f(c) \leqslant f(y)$, et puisque x et y ne peuvent être simultanément égaux à c, l'une au moins de ces deux inégalités est stricte, donc $f(x) < f(y)$.
On raisonne de même dans le cas d'un nombre fini de points d'annulation de la dérivée, $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$. □

Exemple 20.34

Encore une fois, il ne s'agit pas d'une équivalence.
Par exemple, considérons $f : x \mapsto x + \cos x$.
Alors f est dérivable et $f'(x) = 1 - \sin(x)$ est positive sur $\mathbf{R}$ et s'annule en tous les nombres de $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}$.
Pourtant f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
En effet, soient $x < y$ deux réels. Alors f' s'annule un nombre fini de fois sur $[x,y]$,

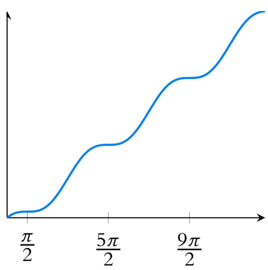

FIGURE 20.7– $x \mapsto x + \cos(x)$

et donc y est strictement croissante, de sorte que $f(x) < f(y)$.

20.4 THÉORÈME DE PROLONGEMENT $\mathscr{C}^1$

Théorème 20.35 (Théorème de la limite de la dérivée) : *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant :*

1. *f est continue sur $[a,b]$*
2. *f est dérivable sur $]a,b]$*
3. *$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$*

Alors $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
En particulier, si $\ell \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable[11] en a, avec $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.

[11] À droite.

Remarques. ▶ Il existe bien évidemment un énoncé analogue avec des limites à gauche en b.
▶ L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'il n'y a qu'une limite à calculer. Alors que si on avait voulu prouver «à la main» que f est $\mathscr{C}^1$, il aurait fallu commencer par prouver que f est dérivable en a (soit un premier calcul de limite), puis étudier la continuité de f' en a (second calcul de limite). Le théorème de la limite de la dérivée nous dit que seul ce second calcul est nécessaire.

Démonstration. Soit $x \in]a,b]$. Alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a,x[$ tel que $f(x)-f(a) = f'(c_x)(x-a)$.
Mais alors $a \leqslant c_x \leqslant x$, de sorte que par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to a^+} c_x = a$.
Et donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to a} f'(c_x) = \lim\limits_{t\to a} f'(t) = \ell$.
Et donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
Ainsi, f est dérivable en a, avec $f'(a) = \ell$, et donc $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = f'(a)$, donc f' est continue en a. □

Composition
La notation c_x est trompeuse : il s'agit en fait d'une fonction

$$c : \begin{array}{|ccc}]a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & c_x \end{array}$$

Exemple 20.36

Soit $f : \begin{array}{|ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}(1-x^4) \end{array}$.
Alors f est continue sur $[-1,1]$ par composition de fonctions continues.
La fonction $x \mapsto 1-x^4$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,0[\cup]0,1]$, à valeurs dans $[0,1[$.
Or, sur $[0,1[$, Arcsin est $\mathscr{C}^1$. Donc par composition f est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,0[\cup]0,1]$.
Pour x dans cet ensemble, on a $f'(x) = \dfrac{-4x^3}{\sqrt{1-(1-x^4)^2}} = \dfrac{-4x^3}{\sqrt{2x^4-x^8}} = -\dfrac{4x}{\sqrt{2-x^4}}$.
Et en particulier, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.
Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.
Et donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$ tout entier.

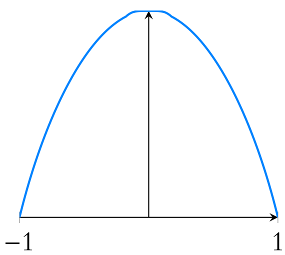

FIGURE 20.8– La fonction f.

En revanche, la fonction $g : \begin{array}{|ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}(1-x^2) \end{array}$ n'est pas dérivable en 0.
En effet, le même raisonnement que précédemment reste valable sur $[1,0[\cup]0,1]$, avec $g'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$.
Pour $x > 0$, ceci se simplifie en $g'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$, mais pour $x < 0$, on obtient $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = -\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g'(x) = \sqrt{2}$.
Donc par le théorème de la limite de la dérivée, g est dérivable à gauche en 0 avec $g'_g(0) = \sqrt{2}$ et dérivable à droite avec $g'_d(0) = -\sqrt{2}$.
Par conséquent, g n'est pas dérivable en 0.

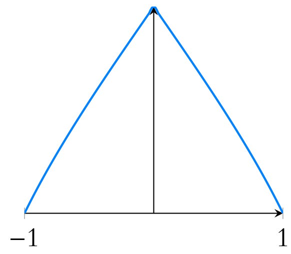

FIGURE 20.9– La fonction g.

Bien que la preuve utilise le théorème des accroissements finis, ce résultat reste valable pour les fonctions à valeurs complexes, il suffit pour cela de séparer partie réelle et partie imaginaire.

Corollaire 20.37 (Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$) – *Soit $f :]a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$.*
Si f et f' possèdent des limites finies en a, alors le prolongement par continuité de f en a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

Démonstration. Notons $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, de sorte que le prolongement par continuité de f à $[a,b]$ est $\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x > a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$
Alors $\tilde{f}$ est continue sur $[a,b]$, et $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$.
Et alors, le théorème de la limite de la dérivée s'applique à $\tilde{f}$, de sorte que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. □

Corollaire 20.38 (Théorème de prolongement $\mathscr{C}^k$) – *Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et soit $f \in \mathscr{C}^k(]a,b],\mathbf{R})$. Si $\lim\limits_{x\to a} f^{(i)}(x)$ existe et est finie pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, alors le prolongement par continuité de f à $[a,b]$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b]$.*

Et si $k = \infty$?
Il n'est pas difficile de constater que ceci reste valable pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur k.
Pour $k = 1$, c'est la proposition précédente.
Supposons le résultat vrai au rang k, et soit $f \in \mathscr{C}^{k+1}(]a,b])$, telle que $\lim\limits_{x\to a} f^{(i)}(x)$ existe pour tout $i \in [\![0,k+1]\!]$. Alors par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Notons encore f son prolongement.
Il reste à prouver que f' est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b]$.
Mais f' est $\mathscr{C}^k$ sur $]a,b]$, et pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, $(f')^{(i)}$ possède une limite finie en a.
Donc par hypothèse de récurrence, f' est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b]$.
Et donc f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $[a,b]$. □