DIMENSION FINIE

21

Dans tout le chapitre, **K** désigne un corps.

21.1 DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

21.1.1 Définition

Définition 21.1 – Un **K**-espace vectoriel E est dit **de dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.
Si ce n'est pas le cas, on dit que E est de dimension infinie.

Exemples 21.2

► $\mathbf{K}^n, \mathbf{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont de dimension finie, puisqu'on en connaît des bases[1] finies.
► En revanche, $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie car aucune famille finie $(P_1, \dots, P_r)$ n'est génératrice de $\mathbf{K}[X]$. En effet si on note $d = \max\{\deg P_i,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$, alors $\mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_r) \subset \mathbf{K}_d[X]$.
Et donc par exemple $X^{d+1} \notin \mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_r)$.

[1] Les bases que nous avons appelées canoniques.

Proposition 21.3 : *Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie qui possède une famille génératrice à n éléments. Alors toute famille de cardinal supérieur ou égal à $n+1$ est liée.*

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat pour les familles de $n+1$ vecteurs, puisque toute famille contenant une famille liée est liée.
Nous allons procéder par récurrence sur n en prouvant la propriété $\mathscr{P}(n)$: «pour tout **K**-espace vectoriel E admettant une famille génératrice à n éléments, toute famille de cardinal $n+1$ est liée.»

► **Initialisation** : supposons que $E = \mathrm{Vect}(x)$, et soit (y_1, y_2) une famille de deux vecteurs de E. Alors $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ tels que $y_1 = \lambda_1 x$ et $y_2 = \lambda_2 x$.
Si $\lambda_1 = 0$, $y_1 = 0_E$, donc (y_1, y_2) est liée.
Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $y_2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} y_1$ et donc (y_1, y_2) est liée.

► **Hérédité** : supposons $\mathscr{P}(n-1)$ vraie. Soit E un **K**-espace vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_n)$, et soit $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in E^{n+1}$.
Alors pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on peut écrire $y_i = Y_i + \lambda_i x_n$ avec $Y_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ et $\lambda_i \in \mathbf{K}$.
Si tous les λ_i sont nuls, alors les y_i sont dans $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$, et donc par hypothèse de récurrence, forment une famille liée.
Si l'un des λ_i est non nul, quitte à renuméroter[2], supposons qu'il s'agit de λ_1.
Posons alors pour tout $i \in [\![2, n+1]\!]$, $y_i' = y_i - \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} y_1 = Y_i - \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} Y_1 \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$.
Alors par hypothèse de récurrence, $(y_2', \dots, y_{n+1}')$ est liée.

[2] Ce qui ne change rien à la liberté de la famille

Il existe donc $(\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbf{K}^n$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i y_i' = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \left(y_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} y_1 \right) = 0_E.$$

Soit encore

$$\left(-\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right) y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i y_i = 0_E.$$

Les α_i n'étant pas tous nuls, $(y_1, \dots, y_{n+1})$ est liée.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. □

Corollaire 21.4 – *Si E est engendré par n éléments, alors toute famille libre est de cardinal au plus n.*

Autrement dit
Toute famille libre possède un cardinal inférieur à celui de toute famille génératrice.

Exemple 21.5

Dans $\mathbf{R}^3$, la famille $(1,0,1), (0,2,-3), (4,1,3), (2,2,2)$ est nécessairement liée, car $\mathbf{R}^3$ est engendré par les trois vecteurs de la base canonique.

Corollaire 21.6 : *Si E est un espace vectoriel qui possède une base finie de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$, alors toutes les bases de E sont finies et de cardinal n.*
*On dit alors que n est **la dimension de** E, et on la note $\dim_{\mathbf{K}} E$, ou plus simplement[3], $\dim E$.*
Par convention, on pose $\dim\{0_E\} = 0$.

[3] Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur $\mathbf{K}$.

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E de cardinal n, et soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.
Par le corollaire précédent, qui s'applique car $\mathcal{B}$ est génératrice et $\mathcal{B}'$ est libre, $\mathcal{B}'$ est finie, de cardinal au plus n.
Notons m le cardinal de $\mathcal{B}'$, de sorte que $m \leqslant n$.
Puis, $\mathcal{B}'$ étant génératrice et $\mathcal{B}$ libre, il vient[4] $n \leqslant m$.
Et donc $m = n$. □

[4] Toujours par le corollaire.

Notons que cette définition nécessite d'avoir déjà l'existence d'une base de E.
Tout l'enjeu de la suite va être de prouver qu'une telle base existe toujours si E est de dimension finie.

Exemple 21.7

La dimension d'un espace vectoriel E doit être comprise comme le nombre de «degrés de liberté» dans le choix d'un élément de E.

Par exemple, soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.
Alors pour choisir un élément de F, on peut choisir y et z comme on le souhaite, mais alors la valeur $x = -2y + 3z$ est imposée.
Donc «moralement», F doit être de dimension 2.
Plus rigoureusement, on prouve que $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ est dans F si et seulement si

$$(x,y,z) = (-2y+3z, y, z) = y(-2,1,0) + z(3,0,1) \in \operatorname{Vect}((-2,1,0),(3,0,1)).$$

Donc la famille $(-2,1,0), (3,0,1)$ est génératrice de F, et elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires : c'est une base de F, de cardinal 2, donc $\dim F = 2$.

De même, pour choisir une matrice symétrique $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on peut choisir comme on le souhaite les éléments sur la diagonale, et ceux en dessous de la diagonale, mais cela fixe alors la valeur des éléments au dessus la diagonale.
Autrement dit, on peut choisir comme on le souhaite tous les éléments de la première colonne de M (et cela impose alors la valeur de $m_{1,2} = m_{2,1}$), puis comme on veut tous ceux de la second colonne sauf le premier), etc, le dernier élément de la dernière colonne de M.
Ainsi, intuitivement, $\dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Plus formellement, soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$. Alors

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{2,1} & \dots & m_{n,1} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{n,2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n,n-1} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} m_{i,j}\left(E_{i,j} + E_{j,i}\right).$$

Donc la famille formée des $E_{i,i}$ et des $E_{i,j} + E_{j,i}$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$ est génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$.
On prouve facilement qu'elle est libre, et donc est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$. Étant de cardinal $n + (n-1) + \cdots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Sur le même principe, on prouve que $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices antisymétriques, est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
En effet, il suffit de choisir les coefficients sous la diagonale, qui sont au nombre de $n - 1 + n - 2 + \cdots + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Plus rigoureusement, une base de $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ est la famille des $E_{i,j} - E_{j,i}$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

Définition 21.8 – Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé une **droite (vectorielle)**, un espace de dimension 2 est appelé un **plan (vectoriel)**.

Notons en particulier que si x est un vecteur non nul d'un espace vectoriel E, alors $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite.
En effet, la famille formée du seul vecteur x est libre car $x \neq 0_E$, et elle est génératrice de $\mathrm{Vect}(x)$, donc c'en est une base : $\dim \mathrm{Vect}(x) = 1$.
De même, si x et y sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathrm{Vect}(x, y)$ est un plan.

Les seules vraies confusions possibles sur le corps $\mathbf{K}$ sont pour les $\mathbf{C}$-espaces vectoriels, qui peuvent aussi être vus comme des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

Proposition 21.9 : *Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n, c'est-à-dire tel que $\dim_{\mathbf{C}} E = n$. Alors $\dim_{\mathbf{R}} E = 2n$.*

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E (en tant que $\mathbf{C}$-espace vectoriel).
Considérons alors la famille $(e_1, \dots, e_n, i \cdot e_1, \dots, i \cdot e_n)$.
Soient alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$ des **réels** tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot i \cdot e_k = 0_E$.
Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + i\mu_k) \cdot e_k = 0_E$, et par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$, vue comme famille du $\mathbf{C}$-espace vectoriel E, pour tout k, $\lambda_k + i\mu_k = 0$ et donc $\lambda_k = \mu_k = 0$.
Donc $(e_1, \dots, e_n, i \cdot e_1, \dots, i \cdot e_n)$ est une famille libre du $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.

D'autre part, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, et donc

$$x = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Re}(\lambda_k)}_{\in \mathbf{R}} \cdot e_k + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Im}(\lambda_k)}_{\in \mathbf{R}} \cdot i \cdot e_k.$$

Et donc $(e_1, \dots, e_n, i \cdot e_1, \dots, i \cdot e_n)$ est une famille génératrice du $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
C'est donc une base, de sorte que $\dim_{\mathbf{R}} E = 2n = 2 \dim_{\mathbf{C}} E$. □

Exemple 21.10

Une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{C})$ est $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$.

21.1.2 Existence de bases

La proposition qui suit nous dit essentiellement que de toute famille génératrice finie, on peut extraire une base.

Proposition 21.11 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, engendré par $(x_1, \dots, x_n)$.*
On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre ($1 \leqslant p \leqslant n$). Alors il existe une base de E formée de $x_1, \dots, x_p$ et de certains des éléments de $(x_{p+1}, \dots, x_n)$.

Remarque
On a supposé ici que ce sont les p premiers vecteurs qui forment une famille libre, mais quitte à réordonner, ce résultat reste valable pour toute sous-famille libre de $(x_1, \dots, x_n)$.

Démonstration. Soit $A = \{\mathrm{Card}(J) \mid [\![1,p]\!] \subset J \subset [\![1,n]\!] \text{ et } (e_j)_{j\in J} \text{ libre}\}$ l'ensemble des cardinaux des sous-familles libres de $(x_1, \dots, x_n)$ contenant $(x_1, \dots, x_p)$.
Alors A est une partie non vide[5] de $\mathbf{N}$, donc elle possède un plus grand élément $q \in [\![p,n]\!]$.
Soit alors J une partie de $[\![1,n]\!]$, contenant $[\![1,p]\!]$, et telle que $(x_j)_{j\in J}$ soit une famille libre.

Soit alors $i \in [\![1,n]\!]$. Prouvons que $x_i \in F = \mathrm{Vect}(x_j, j \in J)$.
Si $i \in J$, c'est évident.
Sinon, la famille $\{x_j, j \in J\} \cup \{x_i\}$, de cardinal $q+1$ ne peut être libre par maximalité de q dans A.
Donc elle est liée : il existe $(\lambda_j)_{j\in J}$ et λ_i des scalaires non tous nuls tels que $\lambda_i x_i + \sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0_E$.
Si on avait $\lambda_i = 0$, alors $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0_E$. Par liberté de $(x_j)_{j\in J}$, les λ_j sont donc tous nuls, ce qui n'est pas le cas.
Donc $\lambda_i \neq 0$, de sorte que $x_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{j\in J} \lambda_j x_j \in F$.
Nous avons donc prouvé que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \in F$, donc $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset F$.
Or, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$, et donc $F = E$.
Ainsi, $(x_j)_{j\in J}$ est génératrice de E, et étant déjà libre, c'est une base de E. □

[5] Elle contient $p = \mathrm{Card}(x_1, \dots, x_p)$.

Remarque. Il serait également possible de donner une preuve algorithmique de ce théorème, l'idée étant de partir de la famille $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_p)$ et, pour chacun des vecteurs de $(x_{p+1}, \dots, x_n)$, regarder s'il est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ ou non.
S'il ne l'est pas, alors on l'ajoute à $\mathcal{B}$. La famille obtenue au final.
On prouve[6] alors qu'à chaque étape, la famille $\mathcal{B}$ est libre, et qu'après ajout (ou non) de x_k, $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$.
À la fin, la famille $\mathcal{B}$ obtenue est donc libre et génératrice de E.

[6] Comme on prouve la validité d'un algorithme en informatique : avec un invariant de boucle.

Corollaire 21.12 (Théorème de la base extraite) :
Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors de toute famille génératrice finie on peut extraire une base de E.

Démonstration. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E.
Puisque $E \neq \{0_E\}$, l'un au moins des x_i est non nul.
Quitte à renuméroter les x_i, on peut supposer qu'il s'agit de x_1.
Et alors la famille formée du seul vecteur x_1 est libre[7], et donc par la proposition précédente, on peut compléter cette famille à l'aide de certains vecteurs de $(x_2, \dots, x_n)$ de manière à former une base de E.
La base ainsi obtenue est bien extraite de $(x_1, \dots, x_n)$. □

[7] La non nullité de x_1 est indispensable ici.

Et en dim. infinie ?
Ce résultat reste valable en dimension infinie, sous réserve que l'on accepte l'axiome du choix, et la preuve est alors autrement plus technique, et ne tient alors plus dans la marge (ni dans le programme de MPSI).

Corollaire 21.13 : *Un espace vectoriel de dimension finie et distinct de $\{0_E\}$ possède des bases.*

Théorème 21.14 (Théorème de la base incomplète) : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0_E\}$. Soit $\mathscr{G}$ une partie génératrice finie de E et soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E. Alors il existe une partie finie $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ telle que $\mathscr{L} \cup \mathscr{H}$ soit une base de E.*
Autrement dit, on peut compléter $\mathscr{L}$ à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$ de manière à former une base de E.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la famille $\mathscr{L} \cup \mathscr{G}$, qui est encore génératrice de E car elle contient la famille génératrice $\mathscr{G}$. □

21.1.3 Dimension des espaces vectoriels usuels

Nous connaissons déjà des bases[8] d'un certain nombre d'espaces vectoriels. Et donc le cardinal de ces bases nous donne des dimensions :

[8] Les bases dites «canoniques».

- $\dim \mathbf{K}^n = n$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = n \times p$. En particulier, $\dim \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = n^2$.
- $\dim \mathbf{K}_n[X] = n + 1$

En revanche, $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
De même, $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ n'est pas de dimension finie : nous avons prouvé en TD qu'il existe des familles libres de cardinal infini.
De même pour $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Exemples 21.15

Certains résultats d'analyse se reformulent en termes de dimension.
Nous avions prouvé que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $y'(t) + a(t)y = 0$ est un espace vectoriel.
De plus, nous savons que les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a, et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Donc nous avons là un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 1, et dont une base est formée de la fonction $t \mapsto e^{-A(t)}$.

De même, on prouve que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension 2.
Il faut pour cela distinguer plusieurs cas. Par exemple pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, dans le cas où le polynôme caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2, il faut prouver que les fonctions $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ sont linéairement indépendantes, et forment une base[9] de l'ensemble des solutions.
Et de même pour les autres cas.

[9] Nous savons déjà qu'il s'agit d'une famille génératrice !

Proposition 21.16 : *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur* $\mathbf{K}$*. Alors $E \times F$ est encore de dimension finie et* $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
Soit alors $(x, y) \in E \times F$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j$.
Et donc

$$(x, y) = (x, 0_F) + (0_E, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j (0_E, f_j).$$

Donc la famille $(e_1, 0_F) \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)$ est génératrice de $E \times F$.
Il n'est pas difficile de prouver qu'elle est libre, et donc est une base de $E \times F$, de cardinal $n + p = \dim E + \dim F$. □

21.1.4 Cardinal des familles libres et génératrices

Proposition 21.17 : *Soit E un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :*

1. *toute famille libre est de cardinal au plus n.*
2. *toute famille génératrice de E est de cardinal supérieur ou égal à n.*

Démonstration.

1. Ce résultat a déjà été prouvé, puisqu'une base de cardinal n est en particulier une famille génératrice.
2. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice, alors on peut en extraire une base, qui sera nécessairement de cardinal n, donc $n \leqslant p$.

□

Proposition 21.18 : *Soit E un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Alors*

1. *toute famille libre de cardinal n est une base de E.*
2. *toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.*

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E de cardinal n.
   Par le théorème de la base incomplète, on peut lui ajouter des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour en faire une base de E, qui sera alors nécessairement de cardinal n.
   Mais $(x_1, \dots, x_n)$ est déjà de cardinal n, donc on ne lui aura ajouté aucun vecteur : c'est déjà une base de E.
2. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E de cardinal n. Alors on peut en extraire une base de E, qui sera alors de cardinal n.
   Mais $(x_1, \dots, x_n)$ étant déjà de cardinal n, la base extraite est nécessairement $(x_1, \dots, x_n)$ tout entier.

□

Exemple 21.19

La famille $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 1)$ est libre[10] dans $\mathbf{R}^3$.
Étant de cardinal $3 = \dim \mathbf{R}^3$, c'est une base de $\mathbf{R}^3$.

[10] Il faut écrire le système pour le prouver proprement, mais la position des 0 permet de se convaincre facilement de sa liberté.

21.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS EN DIMENSION FINIE

21.2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 21.20 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit F un sous-espace vectoriel de E.*
Alors F est de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Démonstration. Si $F = \{0_E\}$, il n'y a rien à dire. Nous supposons donc $F \neq \{0_E\}$.
Une famille libre d'éléments de F est une famille libre de vecteurs de E, et donc de cardinal inférieur ou égal à $\dim E$.
L'ensemble des cardinaux possibles des familles libres de vecteurs de F est donc une partie de $\mathbf{N}^*$, non vide (car F contient des vecteurs non nuls), et majorée par $\dim E$.
Il possède donc un plus grand élément $p \in [\![1, n]\!]$.
Soit alors $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de F.
Pour tout $x \in F$, $(e_1, \dots, e_p, x)$ n'est pas libre, et donc x est combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_p)$.
Donc $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de F. Ceci prouve donc que F est de dimension finie, et que $p = \dim F \leqslant \dim E$.

Si $F = E$, il est évident que $\dim F = \dim E$.
Inversement, si $\dim F = \dim E$, alors une base $\mathscr{B}$ de F est une famille libre de vecteurs de E, de cardinal $\dim E$. C'est donc une famille génératrice de E, de sorte que $F = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}) = E$. □

Exemple 21.21

Voici une autre preuve du fait que $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$, de dimension $n + 1$, donc si $\mathbf{K}[X]$ était de dimension finie, sa dimension serait supérieure ou égale à tout entier $n \in \mathbf{N}$, ce qui est absurde.

21.2.2 Dimension d'une somme

Proposition 21.22 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E (de dimension finie ou non), de bases respectives $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.*
Alors $F + G$ est de dimension finie et $\dim(F + G) \leqslant \dim F + \dim G$.
De plus, on a équivalence entre :

1. *la somme $F + G$ est directe*
2. *la concaténation de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une base de $F + G$*
3. $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$

Démonstration. Notons $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}_G = (f_1, \dots, f_p)$ une base de G.
Alors nous avons déjà prouvé que $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de $F + G$, qui est donc de dimension finie[11] et avec

$$\dim(F + G) \leqslant \operatorname{Card}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p) = n + p = \dim F + \dim G.$$

Pour le cas d'égalité, pour une fois, ne procédons pas par un raisonnement circulaire :
1) ⇒ 2) Nous savons déjà que $\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ est génératrice de $F + G$, il s'agit de prouver qu'elle est libre.
Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j e_j = 0_E \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}_{\in F} = -\underbrace{\sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j}_{\in G} \in F \cap G.$$

[11] Car il possède une famille génératrice finie.

Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$, et par liberté de $\mathcal{B}_F$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. De même, $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 0$.

2) $\Rightarrow$ 1). Supposons $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ libre, et soit $x \in F \cap G$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j$.

Et donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i - \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j = 0_E$, donc par liberté de $\mathcal{B}_F \cap \mathcal{B}_G$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et donc $x = 0_E$.
2) $\Rightarrow$ 3) Évident par définition de la dimension.

3) $\Rightarrow$ 2) Nous savons que $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est génératrice de $F+G$. Elle est de cardinal $\dim F + \dim G = \dim(F+G)$, donc c'est une base de $F+G$. □

Définition 21.23 – Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, de dimension fini, en somme directe, alors on appelle **base adaptée à la somme directe** $F \oplus G$ toute base de $F \oplus G$ obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G.

⚠ Une proposition précédente nous dit que lorsque la somme est directe, la concaténation de toute base de F avec toute base de G est une base de $F+G$, il n'y a pas de réciproque : toutes les bases de $F \oplus G$ ne sont pas forcément adaptées à la somme directe.

L'inégalité que nous venons d'obtenir peut être précisée par la formule suivante.

Théorème 21.24 (Formule de Grassmann) : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors*

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F \cap G$.
Alors il s'agit d'une famille libre, et par le théorème de la base incomplète, nous pouvons la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_r)$ de F.
Notons qu'alors $\dim F = p + r$.
De même, il est possible de compléter $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base $(e_1, \ldots, e_p, g_1, \ldots, g_m)$ de G, avec $\dim G = p + m$.

La famille $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_m)$ est alors une famille génératrice de $F+G$ car concaténation d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G.
En effet, si $x \in F+G$, alors il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.
Mais puisque $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_r)$ est une famille génératrice de F, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_r)$ tels que

> Remarque
> En réalité, la concaténation de ces deux familles génératrices contient deux fois chacun des e_i, mais les doublons peuvent évidemment être éliminés d'une famille génératrice tout en préservant l'aspect générateur.

$$x_F = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j.$$

De même, il existe des scalaires $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p, \mu'_1, \ldots, \mu'_m$ tels que

$$x_G = \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i e_i + \sum_{k=1}^{m} \mu'_k g_k.$$

Et donc

$$x = x_F + x_G = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \lambda'_i) e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j + \sum_{k=1}^{m} \mu'_k g_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_m).$$

Il nous reste donc à prouver que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_m)$ est une famille libre.
Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_r, \nu_1, \dots, \nu_m$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j + \sum_{k=1}^{m} \nu_k g_k = 0_E.$$

Alors

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{m} \nu_k g_k}_{\in G}.$$

Et donc les deux membres de l'égalité ci-dessus sont dans $F \cap G$.
En particulier, il existe $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbf{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k g_k = \sum_{i=1}^{p} \beta_i e_i.$$

Or $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_m)$ est libre[12], et donc

$$\beta_1 = \dots = \beta_p = \nu_1 = \dots = \nu_m = 0.$$

Et donc il vient

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j = 0_E.$$

Mais la famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est également libre[13] et donc

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_r = 0.$$

Ceci achève bien de prouver que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_m)$ est libre, et donc est une base de $F + G$.

Par définition de la dimension, il vient donc

$$\dim(F+G) = p + r + m = (p+r) + (p+m) - p = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

soit encore

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

□

[12] Car c'est une base de G.

[13] C'est une base de F.

Corollaire 21.25 – *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Si F et G sont supplémentaires dans E, alors :*

1. $F \cap G = \{0_E\}$
2. $E = F + G$
3. *E est de dimension finie et* $\dim E = \dim F + \dim G$.

Inversement, dès que deux de ces trois propriétés sont vraies, alors la troisième l'est aussi et F et G sont supplémentaires dans E.

Démonstration. Le sens direct ne pose pas de problèmes : les deux premiers points ont déjà été vus, dimension finie ou non, et le dernier découle directement de la formule de Grassmann : $\dim E = \dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

Inversement :

1. Supposons que 1) et 2) sont vrais. Alors F et G sont en somme directe, et la somme directe est égale à E. Donc ils sont supplémentaires, et donc 3) est vrai.
2. Supposons que 1) et 3) soient vrais. Alors F et G sont en somme directe par 1), et $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, qui, par la formule de Grassmann, est de dimension $\dim F + \dim G = \dim E$.
   Donc $E = F + G$, et donc $E = F \oplus FG$.

3. Supposons que 2) et 3) soient vrais. Alors par la formule de Grassmann, $\dim(F \cap G) = 0$, et donc $F \cap G = \{0_E\}$, donc F et G sont en somme directe, et par 2) sont supplémentaires dans E.

□

Corollaire 21.26 – *Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors tous les supplémentaires de F dans E ont même dimension* $\dim E - \dim F$.

Proposition 21.27 : *Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie, avec*

$$\dim \sum_{i=1}^{n} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe.

Alternative
Voir l'exercice 17 du TD21 pour une preuve alternative utilisant un théorème (le théorème du rang) prouvé un peu plus loin.

Démonstration. L'inégalité est facile : nous savons déjà que la concaténation de familles génératrices de F_i est une famille génératrice.

Et donc en particulier, la concaténation de bases, qui est de cardinal $\sum_{i=1}^{n} \dim F_i$ est génératrice, donc de cardinal inférieur ou égal à $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)$.

Pour le cas d'égalité, procédons par récurrence sur n, en prouvant la propriété :
$\mathscr{P}(n)$: «si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_n$, alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe».

Pour $n = 2$, le résultat a déjà été prouvé.
Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie et soient $F_1, \dots, F_{n+1}$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E tels que $\dim(F_1 + \cdots + F_{n+1}) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_{n+1}$.
Alors $\dim(F_1+\cdots+F_{n+1}) \leqslant \dim(F_1+\cdots+F_n)+\dim F_{n+1}$ et $\dim \sum(F_1 + \cdots + F_n) \leqslant \dim F_1 + \cdots + \dim F_n$.
Si l'une de ces deux inégalités était stricte, on ne pourrait pas avoir l'égalité $\dim(F_1 + \cdots + F_{n+1}) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_{n+1}$.
Donc les deux inégalités sont en fait des égalités.
En particulier, $\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_n$.

Donc par hypothèse de récurrence, $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est une somme directe.

De plus, $\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + F_{n+1}$ est également une somme directe.

Donc $\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) \oplus F_{n+1} = \bigoplus_{i=1}^{n+1} F_i$.
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n.

□

21.2.3 Existence de supplémentaires

Proposition 21.28 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe au moins un supplémentaire de F dans E, et tous les supplémentaires de F dans E ont même dimension* $\dim E - \dim F$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
Alors, $(f_1, \dots, f_p)$ est libre et $\mathscr{B}$ est génératrice de E.
Donc par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $(f_1, \dots, f_p)$ en une base de E à l'aide de vecteurs de $\mathscr{B}$.
Notons $(e_1, \dots, e_q)$ ces vecteurs, de sorte que $(f_1, \dots, f_p, e_1, \dots, e_q)$ est une base de E, et notons $G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_q)$.
Alors la concaténation de la base $(f_1, \dots, f_p)$ de F et de la base $(g_1, \dots, g_q)$ de G est une base de $F + G = E$.
Donc[14] F et G sont en somme directe.
Et donc sont supplémentaires dans E.

[14] C'est la proposition 21.22.

Enfin, par la formule de Grassmann, si G' est un supplémentaire de F dans E, alors $\dim F + \dim G' = \dim E \Leftrightarrow \dim G' = \dim E - \dim F$. □

21.3 APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

21.3.1 Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

Commençons par un résultat qui n'est pas spécifique à la dimension finie.

Proposition 21.29 : *Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$est nulle si et seulement si elle est nulle sur $\mathscr{B}$, c'est-à-dire si et seulement si $\forall i \in I$, $f(e_i) = 0_F$.*

Démonstration. Si f est nulle, il est évident que les $f(e_i)$ le sont.
Et inversement, si tous les $f(e_i)$ sont nuls, soit $x \in E$. Alors il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ de scalaires telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.
Et alors, par linéarité de f, $f(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$.
Donc f est l'application linéaire nulle. □

Corollaire 21.30 – *Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors deux applications linéaires $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base de E.*

Démonstration. Appliquer la proposition précédente à $f - g$. □

Ceci implique notamment que pour définir une application linéaire sur E, il suffit de la définir sur une base : étant donnée une base $(e_i)_{i\in I}$ de E, et étant donné des vecteurs $(y_i)_{i\in I}$ de F, il existe une et une seule application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I$, $f(e_i) = y_i$.
Cette application est l'application qui à $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ associe $f(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i y_i$.

Proposition 21.31 : *Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie, et*

$$\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on pose alors

$$\varphi_{i,j} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k & \longmapsto & \alpha_i f_j \end{array} \right.$$

Autrement dit
$\varphi_{i,j}$ est l'unique application linéaire qui à e_i associe f_j et à e_k, $k \neq i$ associe 0_F.

Il est facile de voir que $\varphi_{i,j}$ est linéaire, et que $\varphi_{i,j}(e_k) = \delta_{k,i} f_j$.
Soient $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j}\varphi_{i,j} = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$.

Alors pour $k \in [\![1, n]\!]$, en évaluant en e_k, il vient $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_{k,j} = 0_F$.
Et donc par liberté de $(f_1, \dots, f_p)$, $\lambda_{k,1} = \dots = \lambda_{k,p} = 0$.
Donc la famille $(\varphi_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est libre.
Prouvons à présent qu'elle est génératrice de $\mathcal{L}(E, F)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,p})$ les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $(f_1, \dots, f_p)$, de sorte que $f(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} f_j$.

Prouvons qu'alors $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j}\varphi_{i,j}$.

Par le corollaire ci-dessus, il suffit de prouver que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(e_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j}\varphi_{i,j}(e_k)$.

Mais $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j}\varphi_{i,j}(e_k) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{k,j} f_j = f(e_k)$.

Ainsi, la famille $(\varphi_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{L}(E, F)$, de cardinal $n \times p = \dim E \times \dim F$. □

Détails
Par définition,
$$\varphi_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

21.3.2 Isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 21.32 : *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie. S'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$, alors F est de dimension finie et* $\dim E = \dim F$.

Remarque
Le résultat reste valable si c'est F qui est supposé de dimension finie : il suffit de considérer φ^{-1}.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors nous savons que $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de F. Donc F est de dimension finie, et $\dim F = \operatorname{Card}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = n = \dim E$. □

Exemple 21.33

Soient a, b deux réels, et soit $E = \left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$.
Soit alors $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}\right.$.
Alors Φ est un isomorphisme, et donc E est un espace vectoriel de dimension 2.
Notons que nous en connaissons déjà des bases, par exemple dans le cas où $X^2 - aX - b$ possède une racine double r, une base est formée des deux suites $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Proposition 21.34 : *Deux espaces vectoriels de dimensions finies E et F sont isomorphes*[15] *si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

[15] C'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$

Démonstration. Il suffit de prouver que si $\dim E = \dim F$, alors il existe un isomorphisme de E dans F.
Supposons donc que $\dim E = \dim F = n$, et soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

Nous savons que $f_{\mathcal{B}_E} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{array}\right.$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dans E,

et de même $f_{\mathcal{B}_F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & F \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \end{array}\right.$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dans F.

Alors $f_{\mathcal{B}_E}^{-1} \circ f_{\mathcal{B}_F}$ est un isomorphisme[16] de E dans F. □

[16] Car composée d'isomorphismes.

21.3.3 Le théorème du rang

Le théorème du rang va nous donner une relation entre la dimension du noyau d'une application linéaire et celle de son image.
Essayons de nous faire une intuition avant de l'énoncer proprement : soit $\varphi : \mathbf{K}^n \to F$ une application linéaire.

Nous savons que $f(1,0,\dots,0), f(0,1,0,\dots,0),\dots,f(0,\dots,0,1)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, qui est donc de dimension inférieure ou égale à n.
Mais si $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq 0_{\mathbf{K}^n}$ est un élément du noyau de f, alors

$$f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 0_F \Leftrightarrow \alpha_1 f(1,0,\dots,0) + \cdots + \alpha_n f(0,\dots,0,1) = 0_F.$$

Donc nous avons une combinaison linéaire des $f(e_i)$, nulle et à coefficients non tous nuls.
Donc l'un des $f(e_i)$ est combinaison linéaire des autres, et donc $(f(e_j))_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}$ est encore génératrice de $\operatorname{Im} f$, qui est donc de dimension au plus $n-1$.
Si le noyau contient un autre élément, non colinéaire à $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, alors il existe une autre[17] relation de dépendance linéaire entre les $f(e_i)$.
Et donc on peut enlever un autre vecteur de notre famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, de sorte que $\dim \operatorname{Im} f \leqslant n-2$. Etc
L'idée sous-jacente au théorème du rang est donc que plus le noyau de f est gros, plus son image est petite.

[17] Au sens où ce n'est pas un multiple de celle déjà utilisée ci-dessus.

Proposition 21.35 : *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Supposons qu'il existe S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Alors $f_{|S}^{|\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$.*

Remarque
L'existence d'un tel supplémentaire est toujours vérifiée si E est de dimension finie

Démonstration. Il est clair que $u = f_{|S}^{|\operatorname{Im} f}$ est une application linéaire bien définie de S sur $\operatorname{Im} f$.
Montrons que u est surjective : soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Mais alors x s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $x_2 \in S$. Et donc

$$y = f(x) = \underbrace{f(x_1)}_{=0_F} + f(x_2) = f(x_2) = u(x_2).$$

Donc u est surjective.

Soit à présent $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0_F \Leftrightarrow f(x) = 0_F$.
Donc $x \in \operatorname{Ker} f$. Mais $x \in S$ par définition, et donc $x \in S \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$, de sorte que u est injectif. □

Théorème 21.36 (Théorème du rang) : *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et*

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Remarque
$\operatorname{Ker} f$ est automatiquement de dimension finie car sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie.

Démonstration. Par le lemme précédent, un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} f$ dans E, et il en existe si E est de dimension finie, est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.
Mais $\dim S = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$, donc

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim S = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f.$$

□

⚠ On n'a surtout pas dit que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E. Cela peut bien entendu se produire, mais il n'est pas obligatoire d'avoir $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Par exemple, si f est non nul et vérifie $f^2 = 0$, comme c'est par exemple le cas de $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(0)X \end{array}\right.$, alors $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
Et donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \neq \{0_E\}$.

21.3.4 Rang d'une application linéaire

Définition 21.37 – Si $f : E \to f$ est une application linéaire, on dit que f est **de rang fini** si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
Dans ce cas, on appelle rang de f et on note $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.

Remarques. Si F est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, donc est de dimension finie, donc f est de rang fini.
Le théorème du rang nous dit aussi que si E est de dimension finie, alors f est de rang fini, et $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$.
Si E et F sont tous deux de dimension infinie, il existe tout de même des applications linéaires de rang fini de E dans F. Par exemple $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(0)X \end{array} \right.$.

Définition 21.38 – Si $(e_1, \dots, e_n)$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle rang de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ et on note $\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_n)$ la dimension de l'espace engendré par cette famille :

$$\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_n) = \dim \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Remarquons que $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ étant engendré par n vecteurs, on a toujours

$$\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_n) \leqslant \operatorname{Card}(e_1, \dots, e_n).$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, donc si et seulement si elle est libre.

Cette notion de rang est alors directement reliée à celle du rang d'une application linéaire :

Proposition 21.39 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, de base $(e_1, \dots, e_n)$, soit F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*
Alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Démonstration. C'est une simple reformulation du fait que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$ et donc

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

□

Proposition 21.40 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors :*

1. *f est surjective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim F$
2. *f est injective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim E$.

Démonstration.
1. Puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, $\operatorname{Im} f = F$ si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim F$.
2. f est injective si et seulement si $\dim \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, ce qui d'après le théorème du rang est équivalent à $\operatorname{rg} f = \dim E$.

□

Corollaire 21.41 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, où E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, avec $\dim E = \dim F$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est un isomorphisme*
2. *f est surjective*
3. *f est injective*

Dimensions
L'hypothèse sur les dimensions est indispensable, mais notons qu'elle est en particulier vérifiée dès que f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E **de dimension finie**.

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) : c'est évident, par définition une bijection est surjective.
2) $\Rightarrow$ 3). Si f est surjective, alors $\operatorname{rg} f = \dim F = \dim E$.
Donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f = 0$.
On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et donc que f est injective.
3 $\Rightarrow$ 1) Si f est injective, alors $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, et donc $\operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$. Donc f est surjective, et donc est bijective. □

Exemples 21.42

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' - P'' \end{array} \right.$.
Alors pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on a $P \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $XP' = P''$.
Pour des raisons de degré, ceci n'est possible que si P' est nul, c'est-à-dire si P est constant.
Donc $\operatorname{Ker} f = \mathbf{R}_0[X]$. Par conséquent, f n'est pas injective, et donc n'est pas surjective.

En revanche, $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & 2P - P' - (X+1)P'' \end{array} \right.$ est injective (toujours pour des raisons de degré), et donc est surjective.

Remarque
Ceci ne nous donne toutefois pas un élément qui ne serait pas dans l'image de f, il faut travailler davantage pour trouver un tel élément sans antécédent.

Proposition 21.43 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est un inversible de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, c'est-à-dire une bijection*
2. *f est inversible à gauche (c'est-à-dire il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$)*
3. *f est inversible à droite*

Spoiler
C'est ce résultat qui nous permettra bientôt de prouver un résultat annoncé il y a quelques temps sur les matrices : une matrice est inversible si et seulement si elle est inversible à droite ou à gauche.

Démonstration. Si f est inversible, alors elle est inversible à droite et à gauche.
Si elle est inversible à gauche, alors elle est injective, et donc est bijective.
Et si elle est inversible à droite, alors elle est surjective, et donc est bijective. □

Proposition 21.44 : *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{rg} f \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.*
En particulier :

1. *si $\dim E < \dim F$, alors f ne peut pas être surjective*
2. *si $\dim E > \dim F$, alors f ne peut pas être injective.*

Remarque. Notons que le second point vient préciser le fait que si f est un isomorphisme, alors $\dim E = \dim F$: en effet, dès qu'il n'y a pas égalité, f ne peut pas être injective ou ne peut pas être surjective[18].

[18] Et n'est souvent ni l'un ni l'autre !

Démonstration. Puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim F$.
Et par le théorème du rang, $\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant \dim E$.
Et donc $\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Si $\dim F > \dim E$, alors $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E < \dim F$, donc on ne peut pas avoir $\operatorname{Im} f = F$: f ne peut pas être surjective.
Si $\dim F < \dim E$, alors $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f$, avec $\operatorname{rg} f < \dim E$, donc $\dim \operatorname{Ker} f > 0$, et donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$: f n'est pas injective. □

Exemple 21.45

Une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^p$ n'est jamais injective si $p < n$, jamais surjective si $n < p$.
Notons que ce dernier point était assez évident : une application linéaire ne peut jamais augmenter la dimension. En effet, si $f : E \to F$, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$, qui est donc de dimension inférieure ou égale à $n = \dim E$.

Proposition 21.46 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soit $u \in GL(E)$. Alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, de dimension finie, $u(F)$ est de dimension finie et $\dim u(F) = \dim F$.*

Démonstration. Il suffit de noter que $u_{|F}$ réalise un isomorphisme de F sur $u(F)$.
En effet, cette restriction est surjective par définition de $u(F)$, elle est injective car u l'est. □

En particulier, l'image d'une droite par un isomorphisme est une droite, l'image d'un plan est un plan, etc.

Proposition 21.47 (Invariance du rang par automorphisme) : *Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de rang fini. Alors :*

1. $\forall v \in GL(E)$, $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} u$
2. $\forall w \in GL(F)$, $\operatorname{rg}(w \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Démonstration.
1. Si v est bijective, alors $\operatorname{Im}(v) = E$, et donc $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$.
2. On a $\operatorname{Im}(w \circ u) = w(\operatorname{Im} u)$. Et donc la proposition précédente s'applique.
   Puisque w réalise un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur $\operatorname{Im}(w \circ u)$, ces deux espaces sont de même dimension[19]

□

[19] Et en particulier $\operatorname{Im}(w \circ u)$ est bien de dimension finie.

21.3.5 Formes linéaires et hyperplans

Définition 21.48 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire $\varphi : E \to \mathbf{K}$.
On note généralement E^* au lieu de $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

Terminologie
L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle le dual de E.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit alors $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i & \longmapsto & \lambda_i \end{array} \right.$.

Alors φ_i est une forme linéaire sur E.

Et alors, pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$, et pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, on a

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\varphi(e_i)}_{\in \mathbf{K}} \varphi_i(x).$$

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est donc génératrice de $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$.
Mais $\dim \mathcal{L}(E, \mathbf{K}) = \dim E = n$, donc cette famille est une base de $\mathcal{L}(L, \mathbf{K})$.
Pour le dire autrement, une fois une base de E fixée, toute forme linéaire sur E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des formes linéaire qui à x associe sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée.

Exemples 21.49

▸ $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2x-3y+z \end{array} \right.$ est une forme linéaire.
Et c'est $2\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3$ où

$$\varphi_1(x,y,z) = x,\ \varphi_2(x,y,z) = y,\ \varphi_3(x,y,z) = z.$$

▸ $\varphi \mathbf{R}_n[X] \mathbf{R} P \int_0^1 P(t)\,dt$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
Si on prend comme base de $\mathbf{R}_n[X]$ la base canonique, alors avec les notations précédentes, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$\varphi_i : a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mapsto a_i.$$

Et ici, on a $\varphi(X^i) = \displaystyle\int_0^1 t^i\,dt = \frac{1}{i+1}$.
Donc $\varphi(a_0 + \cdots + a_nX^n) = a_0\varphi(1) + \cdots + a_n\varphi(X^n) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1}$.
Donc $\varphi = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\varphi_i$.

Définition 21.50 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un **hyperplan** de E s'il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbf{K})$, non nulle[20], telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$.

[20] C'est-à-dire qui ne prend pas toujours la valeur 0. Ce qui ne l'empêche pas de s'annuler en certains points de E, notamment 0_E.

Exemple 21.51

Dans $\mathbf{R}^4$, $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x+2y-t = 0\}$ est un hyperplan : c'est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & x+2y-t \end{array} \right.$.
Notons que celle-ci est non nulle puisque $\varphi(1,0,0,0) = 1 \neq 0$.

En dimension finie, avec les notations ci-dessus, une forme linéaire est de la forme $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$, où $a_1,\dots,a_n$ sont des scalaires.
Et donc l'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$ est

$$\{x \in E \mid \varphi(x) = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i = \right\}.$$

Autrement dit, une fois une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E fixée, un hyperplan possède toujours une équation qui est une équation linéaire en les coordonnées dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Cas particuliers
Dans le plan, vous savez déjà que $ax+by=0$ est l'équation d'une droite (qui passe par l'origine) et que dans $\mathbf{R}^3$, $ax+by+cz=0$ est l'équation d'un plan (qui passe par l'origine aussi).

Exemple 21.52

Dans $\mathbf{R}_n[X]$, $\left\{ P \in \mathbf{R}_n[X] \mid \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0 \right\}$ est un hyperplan.
Il a une équation simple dans la base canonique : c'est l'ensemble des $a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ tels que $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_{n+1}}{n+1} = 0$.

Proposition 21.53 : *Soit E un espace vectoriel, et soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si il possède un supplémentaire de dimension 1 (une droite), c'est-à-dire si et seulement si il existe $u \in E$, non nul, tel que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$.*

Terminologie
On dit aussi que H est de codimension 1.

Démonstration. Supposons que H soit un hyperplan de E et soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ tel que $\operatorname{Ker} \varphi = H$.
Puisque φ est non nulle, il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$.
Montrons alors par analyse-synthèse que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$.
Soit $x \in E$. Supposons[21] que $x = y + \lambda u$, avec $y \in H$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $\varphi(x) = \varphi(y) + \lambda\varphi(u) = \lambda\varphi(u)$.
Donc $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$. Et par conséquent, $y = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u$.
Inversement[22], posons $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} \in \mathbf{K}$, de sorte que $\lambda \cdot u \in \operatorname{Vect}(u)$, et soit $y = x - \lambda \cdot u$.
Alors $\varphi(y) = \varphi(x) - \lambda\varphi(u) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$, et donc $y \in \operatorname{Ker} \varphi = H$.
Enfin, on a bien $x = y + \lambda \cdot u$, donc x s'écrit bien de manière unique comme somme d'un élément de H et d'un élément de $\operatorname{Vect}(u)$.
Et donc $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$: $\operatorname{Vect}(u)$ est un supplémentaire de H de dimension 1.

[21] C'est l'analyse.

[22] C'est la synthèse.

Inversement, supposons que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$. Alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique $x = x_H + \lambda_x u$, avec $x_H \in H$ et $\lambda_x \in \mathbf{K}$.
Soit alors $\varphi : \left| \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x = x_H + \lambda_x u & \longmapsto & \lambda_x \end{array} \right.$.
Alors φ est linéaire, et donc est une forme linéaire.
Et alors, pour $x = x_H + \lambda_x u$, on a

$$x \in \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow \lambda_x = 0 \Leftrightarrow x = x_H \in H.$$

Et donc $\operatorname{Ker} \varphi = H$, donc H est un hyperplan de E. □

Corollaire 21.54 – *Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension* $\dim E - 1$.

Cas particuliers
Dans un plan, les hyperplans sont les droites.
Dans $\mathbf{R}^3$, les hyperplans sont des plans.

Démonstration. En dimension n, un sous-espace vectoriel possède un supplémentaire de dimension 1 si et seulement si il est de dimension $n - 1$. □

Exemple 21.55

L'ensemble $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, et donc de dimension $n^2 - 1$.
C'est très intuitif : pour choisir une matrice de trace nulle, on peut choisir comme on le souhaite tous les coefficients hors diagonale, et $n-1$ coefficients de la diagonale, le dernier étant alors nécessairement l'opposé de la somme des autres.
Mais ceci est pénible à écrire proprement, il faut exhiber une base alors que l'argument «c'est un hyperplan car noyau d'une forme linéaire» est bien plus efficace.

Proposition 21.56 : *Soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires non nulles sur E. Alors* $\operatorname{Ker} \varphi_1 = \operatorname{Ker} \varphi_2$ *si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$.*

Autrement dit
Deux formes linéaires qui définissent le même hyperplan sont proportionnelles.

Démonstration. Nous savons déjà que pour $\lambda \in \mathbf{K}^*$, $\operatorname{Ker}(\lambda\varphi_1) = \operatorname{Ker} \varphi_1$.

Inversement, soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires de même noyau, et soit $u \notin \operatorname{Ker} \varphi_1$.
Soit alors $\lambda = \dfrac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)} \in \mathbf{K}$.
Pour $x \in E$, il existe $y \in \operatorname{Ker} \varphi_1$ et $\mu \in \mathbf{K}$ tels que $x = y + \mu u$.
Et alors $\varphi_1(x) = \mu\varphi_1(u)$ et $\lambda\varphi_2(x) = \dfrac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)}\varphi_2(\mu u) = \mu\varphi_2(u) = \varphi_1(x)$.
Donc $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$. □

Supposons que H_1 et H_2 soient deux hyperplans distincts de E, avec $\dim E = n$.
Puisqu'ils ont même dimension, ils ne peuvent être inclus l'un dans l'autre. Donc $H_1 \cap H_2$ est strictement inclus dans H_1. , de sorte que $\dim(H_1 \cap H_2) \leqslant n-2$.
Par ailleurs, par la formule de Grassmann, $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2)$.
Or $H_1 + H_2$ contient strictement[23] H_1, donc $\dim(H_1 + H_2) > \dim H_1 = n-1$.
Nécessairement, $\dim(H_1 + H_2) = n$, et donc

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n-1+n-1-n = n-2.$$

Rappel
On a $A \cap B = B$ si et seulement si $B \subset A$.

[23] Il contient aussi les vecteurs de H_2 qui ne sont pas dans H_1.

Notons qu'il y a un cas où nous avions déjà l'intuition géométrique de ce fait : l'intersection de deux plans distincts est une droite.

Parallélisme ?
Nous parlons ici de vecteurs, tous les plans contiennent le vecteur nul, il ne peuvent donc pas être disjoints.
Pour avoir des plans parallèles, il va falloir attendre d'avoir la notion d'espace affine.

Le résultat qui suit généralise ceci à l'intersection de m hyperplans.

⚠ On n'a alors qu'une inégalité, et pas une égalité, même si on suppose les H_i distincts. Par exemple, l'intersection de trois plans de $\mathbf{R}^3$ peut tout à fait être une droite, qui est alors de dimension 2.

Proposition 21.57 : *Soit $p \in \mathbf{N}^*$, et soient $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors*

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geqslant \dim E - p.$$

Remarque. Bien qu'il reste vrai, ce théorème n'a d'intérêt que lorsque p, le nombre d'hyperplans est inférieur à la dimension de E. Si $p > \dim E$, il vous dit juste qu'une dimension est positive...

Démonstration. Notons φ_i une forme linéaire de noyau H_i, et soit

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K}^p \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_p(x)) \end{array} \right.$$

Il est clair que ψ est linéaire, et $\operatorname{Ker} \psi = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$.
Alors, par le théorème du rang appliqué à ψ, il vient

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} \psi + \dim \operatorname{Ker} \psi \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} \psi = \dim E - \dim \operatorname{Im} \psi \geqslant \dim E - p.$$

□

Détails
$\operatorname{Im} \psi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$, donc de dimension inférieure ou égale à p.

Il existe une réciproque à ce résultat, qui dit que tout espace de dimension $n-p$ est intersection de p hyperplans.

Proposition 21.58 : *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ d'un espace vectoriel E de dimension n. Alors il existe des hyperplans $H_1, \dots, H_p$ tels que $\bigcap_{i=1}^{p} H_i = F$.*

Démonstration. Soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de F.
Complétons-la[24] en une base de E : $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.
Et alors pour $i \in [\![1, p]\!]$, posons φ_i la forme linéaire définie sur E par $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto x_i$.
Et soit alors $H_i = \operatorname{Ker} \varphi_i = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{p+1}, \dots, e_n)$.
Alors $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$. □

[24] C'est toujours possible par le théorème de la base incomplète.

Détails
H_i est l'ensemble des vecteurs de E dont la composante suivant e_i est nulle.