Rudiments de logique. Ensembles

3

3.1 Propositions logiques

Une **proposition logique** (ou **assertion**) P est une phrase dont on peut dire qu'elle est soit vraie soit fausse[1].
Par exemple, la proposition «2 est positif» est vraie, et la proposition «$-1 > 2$» est fausse.
La **valeur de vérité** d'une proposition est donc soit «vrai» (noté généralement V), soit «faux» (noté F).

[1] Mais pas les deux à la fois !

Une phrase en français n'est pas forcément une proposition logique :

- «S'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas» est bien vraie, donc est une assertion logique.
- «Federer est le meilleur tennisman de tous les temps» ne fait pas l'unanimité, donc ne peut être considérée comme une proposition logique.

Remarquons qu'une proposition peut dépendre d'un ou plusieurs paramètres, comme par exemple la proposition «$\lfloor x^2 \rfloor \geqslant 9$» qui dépend d'un réel x, ou encore «n est divisible par 6», qui dépend d'un entier n.
On fera alors attention à nommer correctement ces propositions, en faisant apparaître la ou les variables dans le nom. Par exemple $P(x)$ et $Q(n)$ et pas seulement P ou Q.
Ceci évite les confusions car par exemple, $Q(2)$ est fausse alors qu $Q(6)$ est vraie. Si on l'avait nommée uniquement Q, quelle valeur de vérité donner à Q ?

Remarque
Cette notation ne doit pas vous surprendre, c'est celle que vous avez utilisé pour les récurrences en terminale !

À partir de plusieurs propositions logiques, il est possible d'en créer d'autres, par exemple la proposition «2 est positif **et** $-1 > 2$». Cette dernière proposition est fausse, puisque -1 n'est toujours pas supérieur à 2.
On peut aussi par exemple considérer la proposition «si il neige, alors il fait froid».

La **table de vérité** d'une proposition P construite à base d'autres propositions est un tableau donnant la valeur de vérité de P en fonction des valeurs de vérité des propositions utilisées pour la construire.

Par exemple, la table de vérité de la proposition «P et Q» est la suivante :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Autrement dit, la proposition «P et Q» est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.
Deux propositions qui ont la même table de vérité sont dites **équivalentes**. Autrement dit, l'une est vraie si et seulement si l'autre l'est.
Si deux propositions P et Q sont équivalentes, on note alors $P \equiv Q$.

Nous présentons dans la suite les différents connecteurs logiques qui permettent de construire de nouvelles propositions à partir de propositions existantes.

3.1.1 Négation

Définition 3.1 – Si P est une proposition logique, alors sa **négation** notée $\neg P$ (ou **non** P) est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse.

Elle a donc la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemples 3.2

La négation de $P : x < 4$ est $\neg P : x \geqslant 4$.
La négation de «il fait chaud tous les jours» est «certains jours, il ne fait pas chaud».
Et sûrement pas «tous les jours, il ne fait pas chaud» !
La négation de $P : -1 < x \leqslant 2$ est $\neg P : x \leqslant -1$ ou $x > 2$.

Proposition 3.3 (Loi de la double négation) : *Si P est une proposition logique, alors $\neg(\neg P) \equiv P$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que P et $\neg(\neg P)$ ont la même table de vérité :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

□

3.1.2 Conjonction («et») et disjonction («ou»)

Définition 3.4 – Soient P et Q deux propositions logiques.

1. La conjonction de P et Q, notée $P \wedge Q$ (ou «P **et** Q») est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément vraies, et qui est fausse sinon.
2. La disjonction de P et Q, notée $P \vee Q$ (ou «P **ou** Q») est la proposition qui est fausse si et seulement si P et Q sont simultanément fausses, et qui est vraie sinon.

Autrement dit, les tables de vérité de ces deux propositions sont données par

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Ordre ?
L'ordre n'a bien évidemment aucune importance : $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ sont équivalentes, de même que $P \vee Q$ et $Q \vee P$.

Exemple 3.5

Si n est un entier naturel, alors si $P(n)$ est la proposition «n est pair», si $Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 3», alors $P(n) \wedge Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 6».
En revanche, $P(n) \vee Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 2 ou par 3», qui est vraie pour tous les entiers qui ne sont pas de la forme $6k+1$ ou $6k+5$, $k \in \mathbf{N}$.

⚠ En français, le **ou** est souvent (mais pas toujours) exclusif, comme dans «fromage **ou** dessert». Autrement dit, on considère qu'il est vraie si une et une seule des propositions qui le composent est vraie.
En logique, le **ou** que l'on manipule, et dont on vient de donner la table de vérité est

inclusif : (P **ou** Q) est vraie dès que l'une des deux propositions P ou Q est vraie, y compris si les deux sont vraies.

Proposition 3.6 : *Pour toute proposition P, on a :*

1. $P \wedge (\neg P)$ *est fausse*
2. $P \vee (\neg P)$ *est vraie (principe du tiers-exclus).*

Remarque

Ces deux propositions traduisent le fait que P est toujours soit vraie soit fausse, et ne peut être les deux à la fois.

Démonstration. Dresser les tables de vérité de $P \wedge (\neg P)$ et $P \vee (\neg P)$. □

Proposition 3.7 (Négation d'une conjonction/disjonction) : *Soient P et Q deux propositions logiques. On a alors*

1. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.
   Autrement dit **non**(P **et** Q) $\equiv$ (**non** P) **ou** (**non** Q).
2. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
   Autrement dit **non**(P **ou** Q) $\equiv$ (**non** P) **et** (**non** Q).

Démonstration. Une fois encore, dressons des tables de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	F	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V	F	V	V

Nous constatons donc que les tables de vérité de $\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$ (resp. $\neg(P \vee Q)$ et $(\neg P) \wedge (\neg Q)$) sont les mêmes. □

Exemple 3.8

Si P est la proposition : «je fais du ski» et Q la proposition «je fais de l'escalade», alors $P \wedge Q$ est la proposition «je fais du ski et de l'escalade».
Sa négation est $(\neg P) \vee (\neg Q)$: «je ne fais pas de ski ou ne fais pas d'escalade».
Et pas : «je ne fais ni ski ni escalade» !
En effet, si vous ne pratiquez que l'un des deux sports, alors $P \wedge Q$ est fausse, donc $\neg(P \wedge Q)$ est vraie, alors que $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ est fausse.
En revanche, la négation de $P \vee Q$ («je fais du ski ou de l'escalade) est bien $(\neg P) \wedge (\neg Q)$: «je ne pratique pas le ski et ne pratique pas l'escalade» (ou encore «je ne pratique ni le ski ni l'escalade»).

Le résultat qui suit est plutôt intuitif, mais il est bon de le mentionner :

Proposition 3.9 : *Soient P, Q, R trois assertions logiques. Alors*

1. $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
2. $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

Démonstration. Dresser des tables de vérité. □

La proposition précédente signifie que lorsqu'on utilise plusieurs fois de suite le même symbole $\vee$ ou $\wedge$, il n'est pas utile de mettre des parenthèses. Attention, ceci n'est plus vrai si l'on mélange conjonction ($\wedge$) et disjonction ($\vee$).
Mais on dispose alors du résultat suivant :

Proposition 3.10 (Distributivités) : *Soient P, Q, R trois propositions logiques. Alors*

1. $(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.
   Soit encore (P **ou** Q) **et** $R \equiv$ (P **et** R) **ou** (Q **et** R).
2. $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$.
   Soit encore (P **et** Q) **ou** $R \equiv$ (P **ou** R) **et** (Q **ou** R).

Démonstration. Prouvons uniquement le premier point, comme toujours à l'aide d'une table de vérité.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$	$(P \wedge R)$	$(Q \wedge R)$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

□

3.1.3 Implication, équivalence

Définition 3.11 (Implication) – Si P et Q sont deux propositions, on note $P \Rightarrow Q$, et on lit «P implique Q» la proposition dont la table de vérité est la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque
$P \Rightarrow Q$ est fausse si et seulement si P est vraie et que Q est fausse.

Dire que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie signifie que dès que P est vraie, alors Q l'est aussi. Par exemple, si x est un nombre réel, alors «$x \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 0$» est vraie, puisqu'un réel plus grand que 4 est positif. En revanche, si x n'est pas plus grand que 4 (donc si $x \geqslant 4$ est fausse), alors $x \geqslant 0$ peut être vraie (par exemple si $x = 1$) ou fausse (si $x = -1$).

Proposition 3.12 : *Si P et Q sont deux propositions logiques, alors $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.*

Démonstration.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

Définition 3.13 (Contraposée) – On appelle **contraposée** de la proposition $P \Rightarrow Q$ la proposition $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

Proposition 3.14 : *La proposition $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée.*

Démonstration. Nous pourrions le prouver à l'aide d'une table de vérité[2], mais notons plutôt que $(P \Rightarrow Q) \equiv$ (**non** P) **ou** Q.
Et donc (**non** P) $\Rightarrow$ (**non** Q) est équivalente à (**non**(**non** Q)) **ou** (**non** P), soit encore à Q **ou** (**non** P). □

[2] Encore une...

Cette proposition d'apparence anodine est en réalité très importante : pour montrer qu'une implication est vraie, on peut en fait montrer que sa contraposée est vraie

> **Terminologie**
> On parle alors de raisonnement par contraposition.

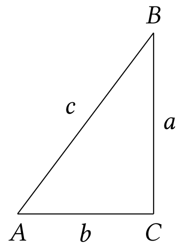
Par exemple, si n est un entier, prouvons la proposition «si n^2 est pair, alors n est pair». Soit encore «n^2 pair $\Rightarrow n$ pair».
Sa contraposée est alors «n impair $\Rightarrow n^2$ impair».
Or, si $n = 2k+1$ est impair, alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ est impair.
Ainsi, «n impair $\Rightarrow n^2$ impair» est vraie, et donc sa contraposée «n^2 pair $\Rightarrow n$ pair» est également vraie.

Définition 3.15 – Soient P et Q deux assertions.

1. Si la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors on dit que
   — P est une **condition suffisante** de Q, ce qui traduit que dès que P est vraie, alors Q l'est aussi.
   — Q est une **condition nécessaire** de P, ce qui traduit que P ne peut pas être vraie si Q n'est pas vraie.
2. La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée **réciproque** de la proposition $P \Rightarrow Q$.

> **Autrement dit**
> Pour que Q soit vraie, il **suffit** que P le soit.
> Pour que P soit vraie, il est nécessaire que Q le soit aussi.

⚠ Il ne faut pas confondre réciproque et contraposée.
Comme dit précédemment, une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité. En revanche, il n'y a pas de lien entre une implication et sa réciproque, l'une peut être vraie et pas l'autre, les deux peuvent être vraies, etc.



Par exemple, si ABC est un triangle de côtés a, b, c, alors vous savez depuis toujours que (ABC est rectangle en C) $\Rightarrow (a^2 + b^2 = c^2)$, et que la réciproque est également vraie.
En revanche, si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, alors la proposition

$$f \text{ et dérivable et sa dérivée est positive} \Rightarrow f \text{ est croissante}$$

est vraie, mais sa réciproque ne l'est pas. En effet, la fonction partie entière est une[3] fonction croissante sur $\mathbf{R}$ qui n'est pas dérivable sur $\mathbf{R}$.

[3] Parmi bien d'autres !

Définition 3.16 (Équivalence) – Si P et Q sont deux propositions logiques, on note $P \Leftrightarrow Q$ la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q ont les mêmes valeurs de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposition 3.17 (Équivalence et double implication) : *Si P et Q sont deux propositions logiques, alors les propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ sont équivalentes.*

Démonstration.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

□

Remarque. Ceci justifie le raisonnement par double implication : pour prouver une équivalence, il est possible de prouver séparément les deux implications.

3.2 Quantificateurs

3.2.1 Quantificateur universel, quantificateur existentiel

Nous avons vu plus haut des exemples de propositions dépendant d'un ou plusieurs paramètres, qui peuvent être vraies pour certaines valeurs du paramètre et fausses pour d'autres.

Définition 3.18 (Quantificateur universel) – On note $\forall x \in E, P(x)$, et on lit «pour tout x appartenant à E, $P(x)$», la proposition qui est vraie si quel que soit l'élément x de E, la proposition $P(x)$ est vraie.
Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

Exemples 3.19

► La proposition $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geqslant 0$ est vraie, puisqu'un carré est toujours positif.
► La proposition $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x \geqslant 0$ est fausse, puisque pour $x = -1$, on a $x^2 + 2x = -1 < 0$.
► La proposition $\forall n \in \mathbf{Z}, n^2 \in \mathbf{N}$ est vraie puisque le carré d'un entier relatif est **toujours** un entier naturel.
► La proposition $\forall n \in \mathbf{N}, n - 1 \in \mathbf{N}$ est fausse puisque pour $n = 0$, on a $n - 1 = -1 \notin \mathbf{N}$.
► La proposition $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 3$ est fausse. En effet, pour $x = 2$, on a $x \geqslant 2$ qui est vraie, et $x \geqslant 3$ qui est fausse, de sorte que $x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 3$ est fausse.
► En revanche, $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie.
En effet, si x est un réel, deux cas de figure sont possibles :

— soit $x \geqslant 2$, et alors on a bien $x > 0$, de sorte que $x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie ;

— soit $x < 2$, auquel cas $x \geqslant 2$ est fausse et donc $x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie.

► Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Alors la proposition «f est la fonction nulle» est équivalente à $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$.
Cela signifie que f prend toujours la valeur nulle.

Remarque
Notons que $n = 0$ est le seul entier de $\mathbf{N}$ pour lequel $n - 1 \notin \mathbf{N}$. Par conséquent, la proposition

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, n - 1 \in \mathbf{N}$$

est vraie.

Rédaction : pour prouver une proposition du type $\forall x \in E, P(x)$, on commencera systématiquement par «Soit $x \in E$», pour arriver à la conclusion que $P(x)$ est vraie.
Ceci signifie que l'on prend un x dont on sait qu'il est dans E, mais qui peut être n'importe quel élément de E (autrement dit, x est un élément quelconque de E).
Si on arrive alors à prouver $P(x)$, en n'utilisant que les propriétés communes à tous les éléments de E, alors on a bien prouvé $\forall x \in E, P(x)$.
Si on part de «Soit $n \in \mathbf{N}$» et que pour prouver $\mathscr{P}(n)$ on utilise que n est pair, alors il y a un problème : certains élément de $\mathbf{N}$ sont bien pairs, mais ce n'est pas une point commun à tous les entiers. Donc nous sommes en train de prouver $\forall n \in \{2k, k \in \mathbf{N}\}, P(n)$ et non $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$.

Détails
L'ensemble noté

$$\{2k, k \in \mathbf{N}\}$$

est l'ensemble des multiples de 2, donc l'ensemble des entiers pairs.

Définition 3.20 (Quantificateur existentiel) – On note $\exists x \in E, P(x)$, et on lit «il existe x appartenant à E tel que $P(x)$», la proposition qui est vraie si il existe au moins un[4] élément x_0 de E pour lequel $P(x_0)$ soit vraie.
Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

[4] Il peut y en avoir plusieurs !

Exemples 3.21

► La proposition $\exists x \in \mathbf{R}, x \geqslant 0$ est vraie, puisqu'il existe bien un réel positif, par exemple $x = 4$.
► La proposition $\exists z \in \mathbf{C}, z^2 + 1 = 0$ est vraie, puisque $z = i$ convient[5].
► En revanche, la proposition $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0$ est fausse. On prendra donc bien garde à l'ensemble auquel appartient la variable quantifiée.
► Si f est une fonction réelle, alors la proposition $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$ signifie que f s'annule au moins une fois.
Par exemple, elle est vraie si f est la fonction $x \mapsto x^2 - 1$, puisque $f(1) = 0$.

[5] Notons que $z = -i$ convient également.

Rédaction : Il est beaucoup plus difficile de prouver des propositions du type $\exists x \in E, P(x)$, et en général il faut avoir la bonne intuition pour savoir quel x vérifie P.
Mais une fois qu'on a trouvé un tel x, la rédaction est simplissime, il faut se contenter de «Posons $x = \dots$» (où l'on remplace $\dots$ par la valeur de x qu'on a «devinée»), et on prouve

qu'alors $P(x)$ est vraie.
Il reste enfin une dernière notation, qui n'est qu'une variation du précédent : on note $\exists! x \in E,\ P(x)$ pour signifier qu'il existe un unique $x \in E$ vérifiant la propriété P.
On a donc notamment $(\exists! x \in E,\ P(x)) \Rightarrow (\exists x \in E,\ P(x))$.

Remarque. L'assertion $\exists! x \in E,\ P(x)$ est équivalente à l'assertion

$$\exists x \in E,\ P(x) \textbf{ et } (\forall y \in E,\ (P(y) \Rightarrow y = x)).$$

Exemple 3.22

La proposition $\exists! x \in \mathbf{R},\ x^2 = 4$ est fausse, puisque $x = 2$ et $x = -2$ vérifient tous les deux $x^2 = 4$.
En revanche, $\exists! x \in \mathbf{R}_+,\ x^2 = 4$ est vraie, puisque $x = 2$ est l'unique réel **positif** dont le carré vaut 4.

3.2.2 Négation des propositions quantifiées

Faute de définition formelle et rigoureuse des quantificateurs, nous ne pouvons qu'admettre les résultats suivants, qui sont très intuitifs.

Proposition 3.23 :

1. *La négation de* $\forall x \in E,\ P(x)$ *est* $\exists x \in E,$ **non** $P(x)$.
2. *La négation de* $\exists x \in E,\ P(x)$ *est* $\forall x \in E,$ **non** $P(x)$.

Danger !
La négation de

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

n'est surtout pas

$$\forall x \in E,\ \textbf{non}\ P(x).$$

Exemples 3.24

► La négation de $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2 + 1 \geqslant 0$ est $\exists x \in \mathbf{R},\ x^2 + 1 < 0$.
Puisque la proposition de départ est vraie, sa négation est fausse.
► La négation de $\exists n \in \mathbf{N},\ \frac{n}{3} \in \mathbf{N}$ est $\forall n \in \mathbf{N},\ \frac{n}{3} \notin \mathbf{N}$.
Puisque la proposition de départ est vraie (par exemple pour $n = 3$), sa négation est fausse.
► Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors la négation de «$f$ est la fonction nulle» est $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$.
À ne pas confondre avec $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$ qui signifie que la fonction f ne s'annule jamais !

3.2.3 Succession de quantificateurs

Une proposition logique peut contenir plusieurs quantificateurs successifs.
Par exemple, $\forall n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N},\ n = m + 1$.
Déterminons la valeur de vérité de cette proposition, en la découpant en morceaux plus simples.
Notons $P(n)$ la proposition $\exists m \in \mathbf{N},\ n = m + 1$.
Alors $P(1)$ est vraie, puisque $m = 0$ convient, $P(2)$ est vraie puisque $m = 1$ convient, etc.
Plus généralement, si $n \in \mathbf{N}^*$, alors $P(n)$ est vraie, puisqu'on peut prendre $m = n - 1$, qui est encore un élément de $\mathbf{N}$.
En revanche, $P(0)$ est fausse, puisque s'il existait un entier m tel que $0 = m + 1$, alors on aurait $m = -1$. Or $-1 \notin \mathbf{N}$.
Et donc notre proposition de départ, qui n'est autre que $(\forall n \in \mathbf{N},\ P(n))$ est fausse.

De même, la proposition $\forall n \in \mathbf{Z},\ \exists m \in \mathbf{Z},\ n = m + 1$ est vraie, puisque pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $m = n - 1$ est encore un élément de $\mathbf{Z}$, vérifiant $n = m + 1$.
Cet exemple prouve que la seconde variable (ici m) peut dépendre de la première (ici n) : pour tout n, il existe un m **dépendant du** n **choisi** tel que $n = m + 1$.

⚠ Dans une expression possédant plusieurs quantificateurs, changer l'ordre des quantificateurs peut changer la valeur de vérité de la proposition !
Par exemple, la proposition «pour toute MPSI, il y a un prof de maths» est vraie. Soit encore $\forall m$ MPSI, $\exists p$ prof de maths, p enseigne à m.
Mais si on change l'ordre des quantificateurs, alors on obtient la proposition

$$\exists p \text{ prof de maths, } \forall m \text{ MPSI, } p \text{ enseigne à } m$$

qui signifie qu'il existe un prof de maths qui enseigne à toutes les MPSI, ce qui est faux.

Par exemple, $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x < y$ est vraie.
En effet, si x est un réel fixé, alors $y = x+1$ satisfait bien à $x < y$, de sorte que $\exists y \in \mathbf{R},\ x < y$ est vraie.
Et ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a bien $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ x < y$.

En une phrase
Cette proposition signifie que pour tout x, il existe un réel inférieur strictement à x.

En revanche, si l'on permute l'ordre des quantificateurs, on obtient la proposition $\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x < y$ ... qui est fausse !
En effet, sa négation est $\forall y \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ x \geqslant y$.
Cette négation est vraie, puisque $x = y - 1$ convient. Et donc la proposition de départ est fausse.
Plus généralement, on peut permuter l'ordre de deux quantificateurs universels, on peut permuter l'ordre de deux quantificateurs existentiels, mais on ne peut pas toujours permuter l'ordre de deux quantificateurs différents.

En une phrase
Cette proposition signifie qu'il existe un réel strictement supérieur à tous les réels, ce qui est bien évidemment faux.

Exemples 3.25

- Les propositions $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}_+,\ x^2 \geqslant -y$ et $\forall y \in \mathbf{R}_+,\ \forall x \in \mathbf{R},\ x^2 \geqslant -y$ sont équivalentes[6].
- De même, $\exists n \in \mathbf{N},\ \exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p$ et $\exists p \in \mathbf{N},\ \exists n \in \mathbf{N},\ n = 2p$ signifient toutes deux qu'il existe un entier pair.

[6] Et elles sont les deux vraies.

3.3 Ensembles

3.3.1 Définition

Nous ne donnerons pas[7] de définition rigoureuse de ce qu'est un ensemble, et nous contenterons de l'«intuition» suivante : un **ensemble** E est une «collection» d'objets, qui sont appelés les **éléments de** E.
Si x est un élément de E, on note alors $x \in E$. Au contraire, si x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

[7] Ni cette année ni l'an prochain.

Des ensembles peuvent être formés d'objets très divers : les plus fréquemment rencontrés sont des ensembles de nombres ($\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}_+^*$, etc), mais on peut également considérer l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires, ou l'ensemble E des élèves de MPSI2.
Il existe deux manières de définir un ensemble :

— en **extension**, en donnant la liste de tous ses éléments. Par exemple $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ou $F = \left\{\pi, \sqrt{2}, -e\right\}$.
Notons qu'alors, l'ordre dans lequel on donne les éléments n'a aucune importance, $\{0, 4, 3, 2, 1\}$ et $\{4, 3, 2, 1, 0\}$ désignent tous les deux l'ensemble noté E ci-dessus.
On ne peut définir ainsi que des ensembles finis[8].

— en **compréhension**, en donnant une propriété P qui caractérise tous les éléments de l'ensemble E, c'est-à-dire que tous les éléments de E vérifie, et qu'ils sont les seuls à vérifier.
On note alors $\{x \mid P(x)\}$ l'ensemble des objets x qui vérifient la propriété P.
Par exemple, $\left\{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x^2} = x\right\}$ désigne $\mathbf{R}_+$. En pratique, on note plutôt $\{x \in E \mid P(x)\}$ l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P.
Par exemple $\{n \in \mathbf{N} \mid \exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p\}$ désigne l'ensemble des entiers pairs.
Un tel ensemble peut également se noter $\{2p,\ p \in \mathbf{N}\}$ ou encore $\{2p\}_{p \in \mathbf{N}}$.

[8] Puisqu'il serait compliqué d'écrire **tous** les éléments d'un ensemble infini...

Pour un ensemble défini par exemple par $E = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p\}$, il faudra faire très attention au quantificateur existentiel lorsqu'on manipule plusieurs éléments de cet ensemble.
Ainsi, si n et m sont deux éléments de E, alors il existe un entier $p_1 \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p_1$ et il existe un entier $p_2 \in \mathbf{N}$ tel que $m = 2p_2$.
Mais p_1 et p_2 n'ont aucune raison d'être égaux, raison pour laquelle il est impératif de les noter différemment (et pas par exemple de les appeler bêtement p tous les deux).
Le même risque existe avec la notation $E = \{2p,\ p \in \mathbf{N}\}$.

> **Remarque**
> En réalité le risque est peut être même plus grand avec cette notation, car le quantificateur existentiel n'y apparaît pas directement (bien qu'il soit sous-entendu).

Un même ensemble peut être défini de différentes manières, et on a par exemple

$$\begin{aligned}\{-1, 1\} &= \left\{x \in \mathbf{R} \mid x^4 = 1\right\} = \left\{z \in \mathbf{C} \mid z^2 = 1\right\} = \{(-1)^n,\ n \in \mathbf{N}\} \\ &= \left\{n \in \mathbf{Z} \mid \forall m \in \mathbf{N}, (m \text{ divise } n) \Rightarrow (m = 1)\right\}.\end{aligned}$$

Définition 3.26 – ▸ On admet qu'il existe un unique ensemble, appelé **ensemble vide**, et qui ne contient aucun élément, qu'on note $\emptyset$.
▸ Un ensemble de la forme $\{x\}$ qui ne contient qu'un élément x est appelé un **singleton**.

Remarques. • Puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément, une proposition du type $\exists x \in \emptyset,\ P(x)$ est toujours fausse.
Et donc une proposition de la forme $\forall x \in \emptyset,\ P(x)$ est toujours vraie. En effet, sa négation est $\exists x \in \emptyset,\ \neg P(x)$, qui est est fausse.
• On ne confondra pas $\{x\}$, qui est un ensemble, et x, qui est un élément de cet ensemble. On a toujours $x \in \{x\}$, et ce quel que soit x.

3.3.2 Inclusion, égalité, ensemble de parties

Définition 3.27 – Soient E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E si $\forall x \in F,\ x \in E$. On note alors $F \subset E$.
On dit également que F est **une partie de** E, ou **un sous-ensemble de** E.

> **Autrement dit**
> F est inclus dans E si tout élément de F est également un élément de E.

Cette définition peut aussi se reformuler de la manière suivante : $F \subset E$ si et seulement si $\forall x,\ x \in F \Rightarrow x \in E$.
Rédaction : cela signifie notamment que pour prouver que $F \subset E$, une rédaction correcte commencera **toujours** par «Soit $x \in F$», pour terminer par «... donc $x \in E$».

Remarque. Notons qu'on a toujours $E \subset E$.
On a également $\emptyset \subset E$ car $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$ est vraie.

Exemples 3.28

▸ On a les inclusions classiques suivantes : $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
▸ $\{x \in \mathbf{R} \mid x = x^2 + 1\} \subset \mathbf{R}_+$. En effet, si x est un réel tel que $x = x^2 + 1$, puisque $x^2 + 1 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ et donc $x \in \mathbf{R}_+$.
▸ Pour tout ensemble E, la proposition $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$ est vraie. Et donc $\emptyset \subset E$, quel que soit l'ensemble E.
Par exemple, l'ensemble de l'exemple précédent s'écrit encore $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$. Or, cette équation ne possède pas de solutions réelles[9] et donc $\{x \in \mathbf{R} \mid x = x^2 + 1\} = \emptyset$, de sorte que l'inclusion précédente n'est autre que $\emptyset \subset \mathbf{R}_+$.

> **Remarque**
> Notons que nous n'avons pas eu besoin de déterminer explicitement les éléments de $\{x \in \mathbf{R}, \mid x = x^2 + 1\}$ pour prouver l'inclusion.

[9] Car son discriminant est $-3 < 0$.

Attention à ne pas confondre inclusion et appartenance, les deux symboles $\in$ et $\subset$ ne s'utilisent pas dans le même contexte !
Si E est un ensemble, si F est une partie de E, alors un élément $x \in E$ **peut** appartenir (ou non) à F, mais pas être inclus dans F.
Par exemple, $-2 \in \mathbf{Z}$, mais il est hors de question d'écrire $\cancel{-2 \subset \mathbf{Z}}$.
De même, une autre partie G de E peut être **incluse** dans F, mais pas lui appartenir.

> **Insistons un peu !**
> Je ne suis pas en train de dire que $-2 \subset \mathbf{Z}$ est faux (et donc que $-2 \not\subset \mathbf{Z}$ est vrai), mais que ça n'a pas de sens !

Ainsi, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, mais on ne peut pas écrire $\cancel{\mathbf{N} \in \mathbf{Z}}$.
En revanche, on a $\{-2\} \subset \mathbf{Z}$.

Proposition 3.29 (Transitivité de l'inclusion) : *Si A, B et C sont trois ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Alors $x \in B$. Mais puisque $B \subset C$, alors $x \in C$.
Et donc nous venons de prouver que $\forall x \in A$, $x \in C$, donc $A \subset C$. □

Définition 3.30 (Égalité d'ensembles) – Deux ensembles A et B sont dits égaux si ils ont les mêmes éléments, c'est-à-dire si $\forall x$, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. On note alors $A = B$.

Puisqu'une inclusion $A \subset B$ correspond à une implication $x \in A \Rightarrow x \in B$, l'équivalence correspond aux deux implications $x \in A \Rightarrow x \in B$ et $x \in B \Rightarrow x \in A$.
Et donc $A = B \Leftrightarrow (A \subset B)$ **et** $(B \subset A)$.
Ceci nous donne donc deux méthodes pour prouver que deux ensembles A et B sont égaux :

1. soit procéder par double inclusion en prouvant $A \subset B$ et $B \subset A$
2. soit procéder directement par équivalences, en prouvant que $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Exemples 3.31

► Montrons par double inclusion que si $a < b$, alors

$$[a, b] = \underbrace{\{(1-t)a + bt,\ t \in [0, 1]\}}_{=F}.$$

• Soit $t \in [0, 1]$. Alors $(1-t)a+bt = a+t(b-a)$, qui est compris entre $(1-t)a+ta = a$ et $(1-t)b + tb = b$.
Donc tout élément de F est dans $[a, b]$: $F \subset [a, b]$.
• Inversement, si $x \in [a, b]$, il nous faut montrer que $x \in F$ et donc qu'il existe un réel $t \in [0, 1]$ tel que $x = (1-t)a + bt$.
Or, $x = (1-t)a + bt \Leftrightarrow x - a = t(b-a) \Leftrightarrow t = \dfrac{x-a}{b-a}$.
Si $x \in [a, b]$, alors $0 \leqslant x - a \leqslant b - a \Rightarrow \dfrac{x-a}{b-a} \in [0, 1]$.
Et donc il existe $t \in [0, 1]$ (qui vaut $\dfrac{x-a}{b-a}$) tel que $x = (1-t)a + bt \in F$.
Ainsi, $[a, b] \subset F$.
Par double inclusion, on en déduit que $[a, b] = F$.
► Montrons par équivalence que si A et B sont deux points distincts du plan, alors l'ensemble $E = \{M,\ MA = MB\}$ est la droite D orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et passant par le milieu I de $[AB]$.
Soit donc M un point du plan. Alors

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \cancel{\overrightarrow{IA}} + \overrightarrow{MI} + \cancel{\overrightarrow{IB}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in D. \end{aligned}$$

Et donc ceci prouve directement que $D = E$.

Médiatrice
Vous aurez probablement reconnu deux caractérisations de la médiatrice de $[AB]$.

Remarque. Deux ensembles A et B sont différents si $\exists x \in A,\ x \notin B$ ou $\exists x \in B,\ x \notin A$. Autrement dit s'il existe un élément qui est dans l'un des deux ensembles mais pas dans l'autre.

Définition 3.32 (Ensemble des parties de E) – Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles inclus dans E. Autrement dit, on a $F \in \mathscr{P}(E)$ si et seulement si $F \subset E$.

⚠ Attention !
$\mathscr{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles !

Exemples 3.33

- Puisque pour tout ensemble E, $\emptyset \subset E$, on a toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$.
- De même, on a toujours $E \in \mathscr{P}(E)$, et si $x \in E$, alors $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$.
- Si $E = \{x\}$ est un singleton, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}\}$.
- Si $E = \{a, b\}$ possède deux éléments, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
- Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

- On a $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Donc $\mathscr{P}(\emptyset)$ est un singleton.
Et par suite, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
Et donc $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

3.3.3 Opérations sur les ensembles

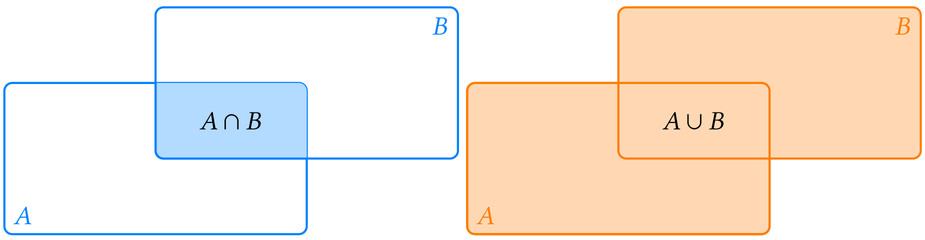
Définition 3.34 – Soient E et F deux ensembles. Alors on appelle

1. **union de** E **et** F, et on note $E \cup F$ l'ensemble des éléments qui sont dans E **ou** dans F. Autrement dit

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E) \textbf{ ou } (x \in F).$$

2. **intersection de** E **et** F, et on note $E \cap F$ l'ensemble des éléments qui sont dans E **et** dans F. Autrement dit

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E) \textbf{ et } (x \in F).$$



Exemples 3.35

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A \cap B = \{2, 3\}$.
- $\mathbf{R}_+^* \cup \mathbf{R}_- = \mathbf{R}$ et $\mathbf{R}_+^* \cap \mathbf{R}_- = \emptyset$.
- On a toujours $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = A$.

Vocabulaire
Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont **disjoints**.

Remarque. Notons qu'on a toujours $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

Proposition 3.36 : *Soient A, B et C trois ensembles. Alors*

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (A \cap B)$.

Terminologie

On dit que l'intersection est distributive par rapport à l'union (c'est le premier point) et que l'union est distributive par rapport à l'intersection (c'est le second point).

Démonstration. Prouvons le premier point, le second étant laissé en exercice. On a :

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \textbf{ et } x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \textbf{ ou } x \in B) \textbf{ et } x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \textbf{ et } x \in C) \textbf{ ou } (x \in B \textbf{ et } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \textbf{ ou } (x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

Et donc $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. □

Définition 3.37 – Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles indexée par I (c'est-à-dire si pour chaque élément $i \in I$, on dispose d'un ensemble noté A_i), alors on note :

1. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments qui sont dans **au moins l'un** des A_i.
2. $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments qui sont dans **tous** les A_i.

Autrement dit

On a

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \in A_i$$

et

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Dans le cas où $I = [\![a, b]\!]$, on note souvent $\displaystyle\bigcap_{i=a}^{b} A_i$ au lieu de $\displaystyle\bigcap_{i \in [\![a, b]\!]} A_i$, et de même pour les unions.

De même, si $I = \mathbf{N}$, on note souvent $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ au lieu de $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

Exemple 3.38

Considérons un point du plan M fixé, et pour $n \in \mathbf{N}$, on note D_n le disque de centre M et de rayon $\dfrac{1}{n}$.

Alors $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} D_n = \{M\}$.

Il est clair que M appartient à tous les D_n et donc à l'intersection des D_n.
Inversement, soit P un point du plan distinct de M, et soit r la longueur du segment MP (=la distance de M à P). Alors, pour $n > \dfrac{1}{r}$, on a $\dfrac{1}{n} < r$, et donc $P \notin D_n$. Par conséquent, $P \notin \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}} D_n$.

Par contraposée, on a donc $P \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}} D_n \Rightarrow P = M$, soit encore $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n \subset \{M\}$.

On en déduit que $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n = \{M\}$.

La proposition ci-dessous généralise la proposition 3.36.

Proposition 3.39 : *Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles et si B est un ensemble, on a*

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \quad \textit{et} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B).$$

Définition 3.40 –

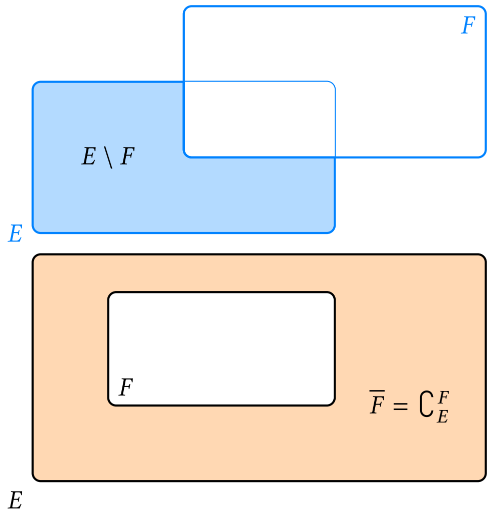
1. Soient E et F deux ensembles. La **différence ensembliste** de E et F est l'ensemble noté $E \setminus F$ (lire «E privé de F» ou «E moins F») formé des éléments qui appartiennent à E, mais n'appartiennent pas à F. Donc

$$x \in E \setminus F \Leftrightarrow (x \in E \textbf{ et } x \notin F).$$

2. Dans le cas particulier où $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ est appelé **complémentaire de** F **dans** E et noté $\complement_E^F$ (ou $\complement_E F$). Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté sur ce qu'est E, on abrège souvent en «complémentaire de F» et on note $\overline{F}$ au lieu de $\complement_E^F$.

Ambiguïté ?

Le «gros ensemble» E dans lequel on considère le complémentaire n'est pas toujours très clair et a donc parfois besoin d'être précisé.
Par exemple, sans précisions, dur de savoir si la notation $\overline{\mathbf{N}}$ désigne $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{N}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ ou encore $\mathbf{C} \setminus \mathbf{N}$.



Remarques. Si A est une partie de E, on a toujours $E = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
Et de même $\complement_E^E = \emptyset$ et $\complement_E^\emptyset = E$.
De plus, si A et B sont des parties d'un même ensemble E, alors $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap \complement_E^B$.

Proposition 3.41 (Lois de De Morgan) : *Soit E un ensemble.*

1. *Si A et B sont deux parties de E, alors*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

2. *Plus généralement, si les $A_i, i \in I$ sont des parties de E, alors*

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \text{ et } \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

En français

Le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires, et le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires.

Démonstration. Prouvons directement le second point : soit $x \in E$. Alors

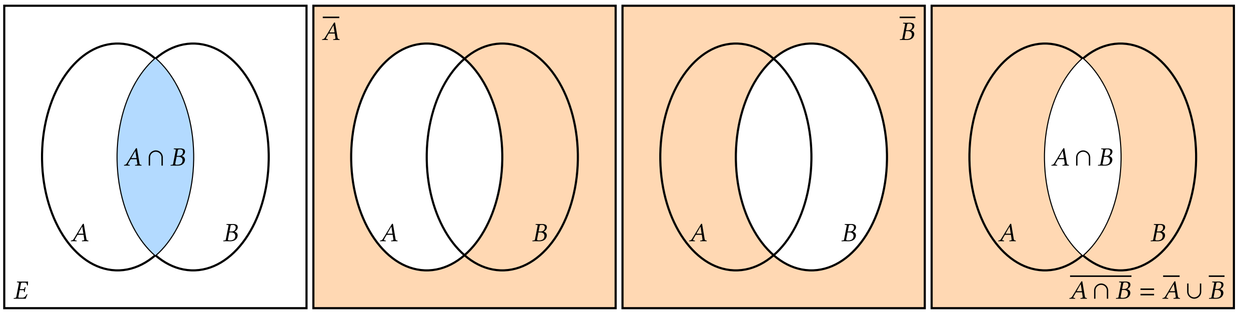
$$\begin{aligned} x \notin \bigcup_{i \in I} A_i &\Leftrightarrow \textbf{non}(\exists i \in I, x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x \in \overline{A_i} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \textbf{non}(\forall i \in I, x \in A_i)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in I,\ x \notin A_i$$
$$\Leftrightarrow \exists x \in I,\ x \in \overline{A_i}$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

□



Définition 3.42 – Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties **non vides** d'un même ensemble E.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une **partition de** E si :

- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$
- les A_i sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire que

$$\forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

> ⚠ **Attention !**
> Dire que les A_i sont deux à deux disjoints est bien plus fort que de demander simplement à ce que $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$.

Exemples 3.43

- La famille A, B est une partition de E si et seulement si $B = \overline{A}$.
- Si $A_0 = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{N} : n = 3k\}$, $A_1 = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{N} : n = 3k+1\}$ et $A_2 = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{N} : n = 3k+2\}$, alors $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ est une partition de $\mathbf{N}$.
- Pour $t \in [0,1[$, notons $A_t = \{x \in \mathbf{R} \mid x - \lfloor x \rfloor = t\}$.
Alors $(A_t)_{t\in[0,1[}$ est une partition de $\mathbf{R}$.
En effet, si $x \in \mathbf{R}$, alors $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$. Et donc en notant $t = x - \lfloor x \rfloor$, $x \in A_t$.
Donc $x \in \bigcup_{t\in[0,1[} A_t$. Ainsi, $\mathbf{R} \subset \bigcup_{t\in[0,1[} A_t$.
L'inclusion réciproque étant triviale[10], on a donc $\mathbf{R} = \bigcup_{t\in[0,1[} A_t$.
Reste à prouver que les A_t sont deux à deux disjoints.De plus, soient t_1, t_2 deux éléments de $[0,1[$ tels que $A_{t_1} \cap A_{t_2} \neq \emptyset$. Alors il existe $x \in A_{t_1} \cap A_{t_2}$, et donc

$$t_1 = x - \lfloor x \rfloor = t_2.$$

Nous venons donc de prouver que $A_{t_1} \cap A_{t_2} \neq \emptyset \Rightarrow t_1 = t_2$.
Par contraposée, on a donc $t_1 \neq t_2 \Rightarrow A_{t_1} \cap A_{t_2} = \emptyset$.
Et donc les A_t dont deux à deux disjoints.

> **Autrement dit**
> A_t est l'ensemble des réels dont la partie décimale est t.

[10] Car les A_t sont des parties de $\mathbf{R}$.

3.3.4 Lien entre logique et ensemble

Coté logique	Côté ensembles	En détails
Implication	Inclusion	$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Équivalence	Égalité	$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Conjonction (**et**)	Intersection	$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A$ **et** $x \in B)$
Disjonction (**ou**)	Union	$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A$ **ou** $x \in B)$
Négation	Complémentaire	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ **non**$(x \in A)$

3.3.5 Produit cartésien d'ensembles

Définition 3.44 (Produit cartésien de deux ensembles) – Si E et F sont deux ensembles non vides, on note $E \times F$ l'ensemble des **couples** (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. On dit que $E \times F$ est le **produit cartésien de** E **et** F.
Si $E = F$, on note alors E^2 au lieu de $E \times F$.

Exemples 3.45

Puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément, $\emptyset \times \emptyset$ est encore l'ensemble vide.
L'ensemble $\mathbf{R}^2$ est l'ensemble des couples de deux réels, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) avec $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$.
$\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ = \{(x, y), x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}_+\}$.
Si $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux segments de $\mathbf{R}$, alors $I \times J = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, a \leqslant x \leqslant b \text{ et } c \leqslant y \leqslant d\}$ est un pavé de $\mathbf{R}^2$.

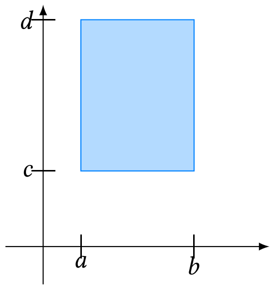


FIGURE 3.1– $[a, b] \times [c, d]$.

⚠ On ne confondra pas le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$, qui sont deux éléments de nature différente.
En particulier, l'ordre des éléments d'un couple est important $\big((1, 2) \neq (2, 1)\big)$, alors que dans un ensemble, l'ordre n'a aucune importance $\big(\{1, 2\} = \{2, 1\}\big)$.
Autrement dit, on a $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow ((a = c)$ **et** $(b = d))$.
On notera qu'il revient au même d'écrire $\forall x \in E, \forall y \in F,\ P(x, y)$ et $\forall (x, y) \in E \times F,\ P(x, y)$.
En revanche[11] on n'écrira pas $\forall x, y \in E, \ldots$ au lieu de $\forall (x, y) \in E^2, \ldots$. À **un** quantificateur correspond **une** variable !

[11] Et bien que ce soit tentant...

Définition 3.46 (Produit cartésien de n ensembles) – Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles non vides, on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ ou encore $\prod_{i=1}^{n} E_i$ l'ensemble formé des **n-uplets** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$.
Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n$, on note E^n au lieu de $E \times E \times \cdots \times E$.

Notons que deux éléments $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont égaux si et seulement si

$$x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2 \text{ et } \ldots \text{ et } x_n = y_n.$$

Remarquons que si E, F, G sont trois ensembles, alors un élément de $(E \times F) \times G$ est un couple formé d'un élément de $E \times F$ (lui-même un couple) et d'un élément de G.
Autrement dit, il est de la forme $((x, y), z)$, avec $x \in E, y \in F$ et $z \in G$.
On l'identifiera alors au triplet $(x, y, z) \in E \times F \times G$, de sorte qu'on ne fera pas de différence entre $(E \times F) \times G$ et $E \times F \times G$.
Et de même pour des produits de plus de trois ensembles.

Exemple 3.47

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, et soit $F = [a, b] \subset \mathbf{R}$.
Alors $E \times F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1$ **et** $a \leqslant z \leqslant b\}$. C'est un cylindre de $\mathbf{R}^3$.

3.4 LES MODES DE RAISONNEMENTS

3.4.1 Par disjonction de cas

Il est possible de prouver une proposition du type $\forall x \in E,\ P(x)$ en écrivant E sous la forme $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$, et en prouvant séparément que $P(x)$ est vraie si $x \in E_1$, si $x \in E_2$, etc.

Remarque
Les E_i peuvent être deux à deux disjoints (et donc former une partition de E), ou non.

Exemple 3.48

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.
Pour cela, notons que $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$.

Distinguons alors trois cas, suivant la valeur du reste de la division de n par 3 :

- si n est de la forme $3k$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $n^3 - n = (3k-1)3k(3k+1)$ est divisible par 3.
- si n est de la forme $3k+1$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $n^3 - n = 3k(3k+1)(3k+2)$ est divisible par 3.
- si n est de la forme $3k+2$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $n^3 - n = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4)$ est divisible par 3.

Intuition

L'idée qui se cache ici est assez simple : si P était vraie, puisque $P \Rightarrow Q$, alors Q serait vraie également. Mais Q et sa négation ne peuvent être vraies en même temps !

3.4.2 Par contraposition

Nous avons mentionné précédemment qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est toujours équivalente à sa contraposée $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
Et donc pour prouver qu'une implication est vraie, on peut se contenter de prouver sa contraposée.

Exemple 3.49

Prouvons que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
Si on souhaite vraiment tout quantifier, cette proposition est

$$\forall n \in \mathbf{N}, (\forall k \in \mathbf{N},\ n^2 - 1 \neq 8k) \Rightarrow (\exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p).$$

Cela dit, nous n'avons pas besoin de tout écrire avec des quantificateurs.
La contraposée est «n impair $\Rightarrow n^2 - 1$ est divisible par 8», et nous allons prouver que cette contraposée est vraie.
Soit donc n un entier impair. Il existe donc $p \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2p + 1$, et alors

$$n^2 - 1 = (2p+1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p = 4p(p+1).$$

Or, l'un des deux entiers p et $p+1$ est pair[12], donc $p(p+1)$ est pair, de sorte qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p(p+1) = 2k$.
Et donc $n^2 - 1 = 4 \cdot 2k = 8k$ est divisible par 8.
Ainsi, la contraposée de notre proposition initiale est vraie, et donc la proposition de départ l'est aussi.

[12] De deux entiers consécutifs, l'un (et un seul) est toujours pair.

3.4.3 Par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde repose sur le fait qu'une implication est équivalente à sa contraposée : $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$.
En particulier, notons `Vrai` la proposition toujours vraie (par exemple $0 = 0$).
Sa négation est donc $\neg$`Vrai` qui est la proposition toujours fausse.

Le raisonnement par l'absurde consiste à prouver que $\neg P \Rightarrow$ `Faux`, c'est-à-dire à supposer que P est fausse, pour arriver à `Faux`, c'est-à-dire à une contradiction (qui peut par exemple être le fait que P soit vraie : $P \wedge \neg P \equiv$ `Faux`).
Alors par contraposée, `Vrai` $\Rightarrow P$.
Mais `Vrai` $\Rightarrow P \equiv \neg$`Vrai` **ou** $P \equiv$ `Faux` **ou** $P \equiv P$. Donc si $\neg P \Rightarrow$ `Faux` est vraie, P l'est également.

Détails

Puisque `Faux` est toujours faux, `Faux` **ou** P a même valeur de vérité que P.

Exemple 3.50 **Irrationalité de $\sqrt{2}$**

Prouvons par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.
À cet effet, supposons que $\sqrt{2}$ est un rationnel, et soit alors $\dfrac{p}{q}$ une fraction irréductible égale à $\sqrt{2}$.
Alors $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$.

Donc p^2 est pair, et donc p lui-même est pair.
Et donc il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p = 2k$, et donc $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
Donc $2q^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$ est pair. Donc q est pair.
Mais p et q étant tous deux divisibles par 2, ceci vient contredire l'irréductibilité de la fraction $\frac{p}{q}$.
Et donc notre hypothèse initiale est fausse : $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Détails
Le carré d'un nombre impair est impair, donc si p^2 est pair, c'est que p lui-même est pair.

Exemple 3.51 **Principe des tiroirs de Dirichlet**

Si vous rangez $n+1$ paires de chaussettes dans une commode à n tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux paires de chaussettes.
En effet, supposons par l'absurde que chaque tiroir contienne au plus une seule paire de chaussettes.
Alors la commode contient au plus $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}}$ paires de chaussettes, ce qui est absurde.
Par conséquent, un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.
Ce résultat est loin d'être anodin et sert plus souvent qu'il n'y paraît[13].

⚠ Attention !
La négation de «au moins 2» est bien «au plus une», et pas «une seule».
Un tiroir peut tout à fait ne contenir aucune paire de chaussettes.

[13] Même si nous nous en servirons plutôt pour ranger des nombres dans des ensembles que des chaussettes dans des tiroirs...

3.4.4 Le raisonnement par analyse-synthèse

Expliquons le raisonnement par analyse-synthèse sur un exemple : prouvons que toute fonction définie sur $\mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Soit donc $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

▸ **Analyse** : supposons qu'il existe deux fonctions f_1 paire et f_2 impaire telles que $f = f_1 + f_2$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$.
En sommant ces deux égalités, il vient $f(x) + f(-x) = 2f_1(x) \Leftrightarrow f_1(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.
Et de même, $f(x) - f(-x) = 2f_2(x) \Leftrightarrow f_2(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Donc si deux telles fonctions existent, elles sont uniques, et sont définies par

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

▸ **Synthèse** : reste à vérifier que les formules obtenues précédemment pour f_1 et f_2 définissent bien une fonction paire et une fonction impaire dont la somme vaut f.
Posons donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_1(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_1(-x) = \dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x)$, de sorte que f_1 est paire.
D'autre part, $f_2(-x) = \dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_2(x)$ donc f_2 est impaire.
Enfin, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f_1(x)+f_2(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$.
Donc $f = f_1 + f_2$.
Donc nous venons de prouver qu'il existe bien deux telles fonctions f_1 et f_2.

▸ **Conclusion** : il existe un unique couple formé d'une fonction paire et d'une fonction impaire dont la somme vaut f.

⚠ Si on oublie la synthèse, on prouve seulement qu'il existe au plus un tel couple, mais pas qu'il en existe au moins un !

3.5 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence, que vous avez déjà manipulé en terminale, connaît plusieurs variantes, dont le but est à chaque fois de montrer qu'une propriété $\mathscr{P}(n)$, dépendant de n, est valable pour tout n dans une certain partie de $\mathbf{N}$.

3.5.1 Récurrence simple

C'est la récurrence étudiée en terminale : on initialise la récurrence à $n_0 \in \mathbf{N}$, en on prouve que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
Ceci prouve alors que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n)$.

La preuve de sa validité[14] sera donnée plus tard.

[14] Bine que cela doive vous sembler être une évidence.

Exemple 3.52

Montrons que pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \leqslant n!$
Soit donc $\mathscr{P}(n)$ la propriété $2^n \leqslant n!$
Initialisation : $\mathscr{P}(4)$ est vérifiée car $2^4 = 16 \leqslant 24 = 4!$
Hérédité : supposons que $n \geqslant 4$ et que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \leqslant 2 \times n! \leqslant (n+1) \times n! \leqslant (n+1)!$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 4$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

3.5.2 Récurrence multiple à pas fixé

Commençons par la récurrence double : il s'agit d'une légère variation de la précédente, où pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$, vous n'avez pas seulement besoin de savoir que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, mais aussi que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie.

Le principe est donc le suivant : on initialise la récurrence en prouvant que pour un certain $n_0 \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont toutes deux vraies.
Puis on prouve que $(\mathscr{P}(n)$ **et** $\mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n)$.

Exemple 3.53

Soit $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$ que $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}$.
Soit donc $\mathscr{P}(n)$: $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}$.
Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbf{Z}$.
$\mathscr{P}(1)$ est vraie car

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{6+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4} = 3.$$

Hérédité : supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Alors

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}}$$

et donc

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \in \mathbf{Z}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Ce principe se généralise à des récurrences triples, quadruples, etc.

Proposition 3.54 : *Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier $n \in \mathbf{N}$, et soit $k \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose que*

1. $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \cdots \mathcal{P}(n_0+k)$ *soient vraies*
2. *que pour tout $n \geqslant n_0$, $(\mathcal{P}(n)$ **et** $\mathcal{P}(n+1)$ **et** $\ldots$ **et** $\mathcal{P}(n+k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+k+1)$.*

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $\mathcal{Q}(n)$ la proposition $\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(n+k)$.
Par hypothèse, $\mathcal{Q}(n_0)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie.
Alors $\mathcal{P}(n), \ldots, \mathcal{P}(n+k)$ sont vraies.
Donc $\mathcal{P}(n+k+1)$ est vraie.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1), \mathcal{P}(n+2), \ldots, \mathcal{P}(n+k), \mathcal{P}(n+1+k)$ sont vraies.
Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence (simple !) appliqué à la proposition $\mathcal{Q}(n)$, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.
Et en particulier, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

3.5.3 Récurrence forte

Cette fois, il s'agit d'une récurrence où pour prouver $\mathcal{P}(n+1)$, on a non seulement besoin de savoir que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, mais aussi que $\mathcal{P}(n-1), \mathcal{P}(n-2), \ldots, \mathcal{P}(0)$ sont vraies.

Exemple 3.55

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Prouvons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant 2^n u_0$.
Notons donc $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_n \leqslant 2^n u_0$.
Alors $\mathcal{P}(0)$ est trivialement vérifiée.
Supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Alors

$$u_{n+1} \leqslant u_0+u_1+\cdots+u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_0\left(2^0+2^1+\cdots+2^n\right) \leqslant u_0\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \leqslant u_0\left(2^{n+1}-1\right) \leqslant u_0 2^{n+1}.$$

Par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_0 2^n$.

Proposition 3.56 : *Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier n telle que*

1. *il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}(n_0)$ soit vraie.*
2. *pour tout $n \geqslant n_0$, $(\forall k \in [\![n_0, n]\!], \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.*

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Notons $\mathcal{Q}(n)$ la proposition «$\forall k \in [\![n_0, n]\!], \mathcal{P}(k)$ est vraie».
Alors $\mathcal{Q}(n_0)$ n'est rien d'autre que $\mathcal{P}(n_0)$, donc est vraie par hypothèse.
Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. Alors $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies.
Par hypothèse, cela implique que $\mathcal{P}(n+1)$ soit vraie.
Donc $\mathcal{P}(n_0), \ldots, \mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1)$ sont vraies : $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence (simple), pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

3.5.4 Récurrence finie

Citons enfin une dernière variant du principe de récurrence : la récurrence finie, qui consiste à ne supposer $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ n'est plus vraie pour tout $n \geqslant n_0$, mais seulement pour $n \in [\![n_0, n_1+1]\!]$.
Alors dans ce cas, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n \in [\![n_0, n_1]\!]$.

Exemple 3.57

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Prouvons que pour tout $p \in [\![1, n+1]\!]$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \left(\frac{p}{n}\right)^2$.

Pour $p = 1$, on a $1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, donc la récurrence est initialisée.

Supposons que pour $p \leqslant n$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&< \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{p^2}{n^3} \\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{p}{n^2} \\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2+2p}{n^2} \\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{(p+1)^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

Nous avons ici utilisé le fait que $p \leqslant n$ et donc $\frac{p}{n} \leqslant 1$.

Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $p \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}.$$

En particulier, pour $p = n$, alors $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Or nous prouverons plus tard dans l'année que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$, et donc ceci prouve[15] que $e \leqslant 3$.

[15] Sans aucun calcul de valeur approchée.

3.5.5 La récurrence fausse !

Juste pour la culture, citons une petite curiosité.
Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 1$, n crayons sont toujours de la même couleur.
On note donc $\mathscr{P}(n)$ la proposition : quels que soient les n crayons $C_1, \dots, C_n$, alors ils ont tous la même couleur.
$\mathscr{P}(1)$ est vrai si je n'ai qu'un crayon, alors tous mes crayons sont de la même couleur.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soient $C_1, \dots, C_{n+1}$, $n+1$ crayons.
Alors par hypothèse de récurrence, $C_1, \dots, C_n$ sont de même couleur, de la couleur de C_2.
De même, $C_2, \dots, C_{n+1}$ sont de même couleur, de la couleur de C_2.
Et donc $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}$ ont tous la couleur de C_2.
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Pourtant j'ai dans ma trousse un crayon bleu et trois crayons rouges, qui ne sont clairement pas de la même couleur ! Où se cache le problème ?