4 Sommes, produits, systèmes linéaires

4.1 Sommes et produits

4.1.1 Notations $\sum$ et $\prod$

Il est fréquent d'avoir à écrire des sommes d'un grand nombre de termes, et il n'est pas question d'écrire alors tous les termes de la somme.
On peut s'en tirer en écrivant des pointillés comme dans $1 + 2 + \cdots + 999 + 1000$, mais nous introduisons ici une autre notation, souvent plus pratique.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ n nombres complexes[1]. On note alors $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ou $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$ la somme de ces n nombres :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Notons que lorsque $n = 1$, cette somme ne contient qu'un seul nombre (a_1), ce qui n'est pas totalement évident avec la notation utilisant les pointillés.

Exemple 4.1

La somme des 100 premiers entiers $1 + 2 + \cdots + 99 + 100$ s'écrit encore $\sum_{k=1}^{100} k$.

Plus généralement, si p et q sont deux entiers avec $p \leqslant q$, et si $a_p, \dots, a_q$ sont des complexes, on note

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q.$$

La variable k est ce qu'on appelle une variable muette, et on peut donc la nommer comme on le souhaite, à condition de ne pas utiliser le nom de variables déjà définies.
Par exemple $\sum_{k=1}^{100} k = \sum_{i=1}^{100} i = \sum_{\alpha=1}^{100} \alpha$.
En revanche, la variable en question n'a plus aucune signification en dehors de la somme : $\sum_{k=1}^{n} k^2$ a un sens, $\cancel{k \sum_{k=1}^{n} k}$ n'en a pas.
En effet, dans la somme, on sait que k prend successivement les valeurs $1, 2, \dots, 100$, mais en dehors de la somme, que vaut k ? 1 ? 2 ? 100 ? Autre chose ?
Une fois la somme terminée, la variable est de nouveau disponible[2], et donc peut être utilisée de nouveau, par exemple pour une autre somme : $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{30} k^3$ a bien un sens.
Cette quantité aurait aussi pu être écrite $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{i=1}^{20} i^2 + \sum_{j=1}^{30} j^3$.

[1] Rappelons qu'un réel est un complexe comme les autres, et donc que tout ce qui suit est donc aussi valable pour des réels.

[2] Il y a là une certaine analogie avec le concept de variable locale en Python : le i n'a de signification qu'à l'intérieur de la somme.

⚠ La seule précaution à prendre pour le nom de la variable de sommation et de ne pas utiliser le nom d'une variable déjà utilisée par ailleurs.

Par exemple, il n'est pas question définir une suite (u_n) par $u_n = \cancel{\sum_{n=1}^{10} n^2}$.

En effet, quand je choisis une valeur de n, par exemple parce que je souhaite calculer la valeur de u_4, n devient **fixé**. Il n'est alors plus possible de le faire varier de 1 à 10.
De même, les bornes de la somme ne peuvent en aucun cas dépendre de la variable de sommation : $\cancel{\sum_{n=1}^{n}}$ ou $\cancel{\sum_{n=-n}^{6}}$ n'ont aucun sens, n ne peut pas varier entre 1 et n (puisque n vaut justement n).

Mais si n est une variable qu'on a déjà définie, alors $\sum_{k=1}^{n}$ et $\sum_{k=-n}^{6}$ ont un sens.

Plus généralement, si I est un ensemble **fini** et si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes indexée par I, on note $\sum_{i\in I} a_i$ la somme de tous ces complexes.

Et si I est infini ?
Il est bien plus difficile de donner un sens à une somme infinie. Nous en parlerons plus tard dans l'année, et vous en reparlerez en deuxième année.

Exemple 4.2

La terminologie «famille indexée par I» est un peu effrayante, mais signifie juste que pour chaque élément i de l'ensemble I, on dispose d'un nombre a_i.
Si $I = [\![1, n]\!]$, alors ces nombres sont $a_1, \dots, a_n$.
Si E est l'ensemble des élèves de MPSI2 : $E = \{\text{Thomas, Margot, Cyril}, \dots\}$ et que pour chaque élève $e \in E$, je dispose de sa note n_e au dernier devoir, alors la moyenne de classe est

$$\frac{1}{48}\sum_{e\in E} n_e = \frac{1}{48}\left(n_{\text{Thomas}} + n_{\text{Margot}} + \cdots + n_{\text{Cyril}}\right).$$

Remarque
On peut toujours numéroter les éléments d'un ensemble fini. Par exemple, j'aurais aussi bien pu attribuer un numéro à chaque élève la classe : Thomas = 1, Margot = 2, ...
Et donc ma famille de notes se trouverait alors numérotée avec des nombres : $n_1, n_2, \dots, n_{48}$.

Notons qu'il est possible de renuméroter les éléments qui composent la somme, et que par exemple, $\sum_{k=0}^{n} a_{k+2} = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} + a_{n+2} = \sum_{i=2}^{n+2} a_i$.
On dit alors qu'on a réalisé le changement d'indice $i = k + 2$.
De même, $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a0 = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$. Nous avons ici réalisé le changement d'indice $i = n - k$.

⚠ Les seuls changement d'indices pertinents dans le cadre des sommes sont de la forme

$$\boxed{i} = \pm \boxed{k} + p, \text{ où } p \in \mathbb{Z}$$

«nouvelle» variable «ancienne» variable

On ne fera par exemple pas de changement d'indices de la forme $i = 2k$, même si on pourrait parfois être tenté d'écrire par exemple $\cancel{\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_{2i}}$.

Ceci ne peut pas être correct car les $2i$ ne prennent que des valeurs paires : et donc $\sum_{i=0}^{n} a_{2i} = a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}$ alors que $\sum_{k=0}^{2n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$.

Alternative
On peut aussi remarquer que l'une des deux sommes contient $2n$ termes et l'autre n'en contient que n.

Par convention, on décide que si $q < p$, alors $\sum_{k=p}^{q} a_k = 0$ et plus généralement, que si $I = \emptyset$, $\sum_{i\in I} a_i = 0$.

On s'autorise également des notations du type, $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} a_k$, $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ divisible par } 3}}^{n} a_k$ ou $\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 100 \\ k \text{ premier}}} a_k$, qui ne nécessitent pas davantage d'explications.

Sur le même principe, on note $\prod_{k=p}^{q} a_k = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_q$ le produit des nombres $a_p, \ldots, a_q$.

On convient alors que si $q < p$, $\prod_{k=p}^{q} a_k = 1$ et que si $I = \emptyset$, $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

4.1.2 Propriétés de la somme et du produit

La plupart des propriétés qui suivent sont très intuitives, et doivent être comprises bien plus qu'apprises par cœur.

- **(Somme de termes tous égaux)** : pour $\alpha \in \mathbf{C}$ (une constante ne dépendant pas de $i \in I$), $\sum_{i \in I} \alpha = \alpha \times \operatorname{Card}(I)$.

  En particulier, $\sum_{k=p}^{q} \alpha = \alpha(q-p+1)$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha = n\alpha$ et $\sum_{k=0}^{n} \alpha = (n+1)\alpha$.

- **(Relation de Chasles)** : si $p \leqslant q \leqslant r$, alors $\sum_{k=p}^{r} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{r} a_k$.

  Plus généralement, si I_1 et I_2 sont deux ensembles **disjoints**[3] alors

$$\sum_{i \in I_1 \cup I_2} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i.$$

  Ceci n'est plus valable si I_1 et I_2 ne sont pas disjoints, car certains termes se trouveraient alors comptés deux fois dans le membre de droite (une fois dans chaque somme).

- **(Linéarité de la somme)** : pour $\lambda \in \mathbf{C}$, $\sum_{i \in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$.

Les deux premières propriétés se traduisent facilement pour le produit :

$$\prod_{i \in I} \alpha = \alpha^{\operatorname{Card}(I)}, \quad \prod_{i \in I_1 \cup I_2} a_i = \left(\prod_{i \in I_1} a_i\right) \times \left(\prod_{i \in I_2} a_i\right).$$

La troisième est un peu plus traîtresse : $\prod_{k=1}^{n} \lambda u_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} u_k$, et sûrement pas $\cancel{\lambda \prod_{k=1}^{n} u_k}$.

Et plus généralement, $\prod_{i=1}^{n} (\lambda u_i v_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} u_i \times \prod_{i=1}^{n} v_i$.

Enfin, notons que $\prod_{i \in I} \alpha^{u_i} = (\alpha)^{\sum_{i \in I} u_i}$.

Cardinal

Le cardinal $\operatorname{Card}(I)$ d'un ensemble fini I est le nombre d'éléments de I.
En particulier, si $p \leqslant q$,

$$\operatorname{Card}(\llbracket p, q \rrbracket) = q - p + 1.$$

[3] C'est-à-dire qui n'ont pas d'éléments communs :

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

Terminologie

Nous ne parlons pas de linéarité du produit, le terme linéaire (qui sera défini plus tard) faisant uniquement référence aux sommes.

Exemple 4.3

Si $I = \llbracket 1, 2n \rrbracket$, et si on note $I_1 = \{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket,\ k \text{ pair}\}$ et $I_2 = \{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket,\ k \text{ impair}\}$, alors I_1 et I_2 sont disjoints, de sorte que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^k k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^k k \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (2i) - \sum_{i=1}^{n} (2i-1) \\
&= 2\cancel{\sum_{i=1}^{n} i} - 2\cancel{\sum_{i=1}^{n} i} + \sum_{i=1}^{n} 1
\end{aligned}$$

$I = I_1 \cup I_2$.

Détails

$$I_1 = \{2i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$$I_2 = \{2i-1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Linéarité de la somme.

$$= \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

La relation de Chasles peut se généraliser[4] de la manière suivante : si $I_1, \dots, I_n$ sont des ensembles deux à deux disjoints, et si $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$, alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in I_k} a_i$. On parle alors de **sommation par paquets**.

[4] La preuve se fait par récurrence.

Autrement dit

L'hypothèse faite sur $I_1, \dots, I_n$ revient à demander à ce qu'ils forment une partition de I (en tous cas lorsqu'ils sont non vides).

Exemple 4.4

Reprenons l'exemple précédent, et notons que $[\![1, 2n]\!] = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \dots \{2n-1, 2n\}$.
Autrement dit, si pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $I_k = \{2k-1, 2k\}$, alors les I_k sont deux à deux disjoints et leur union vaut $[\![1, 2n]\!]$ tout entier.
Et donc par sommation par paquets,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} (-1)^i i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{2j-1}(2j-1) + (-1)^{2j} 2j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (2j - (2j-1)) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.
\end{aligned}$$

Exemple 4.5

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculons $\sum_{i=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor$.
On a alors, pour $k \leqslant n-1$, $\left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor = k \Leftrightarrow k \leqslant \sqrt{i} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \leqslant i \leqslant (k+1)^2 - 1$.
Et donc il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k \left((k+1)^2 - 1 - k^2 + 1 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 + k) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{(n-1)n(2n-1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

On appelle **somme télescopique** une somme de la forme $\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k)$.

Il s'agit alors d'une somme où les termes se simplifient deux à deux, à l'exception de quelques termes[5]. En effet, on a

[5] Le premier et le dernier.

$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = (\cancel{a_{p+1}} - a_p) + (\cancel{a_{p+2}} - \cancel{a_{p+1}}) + \dots + (\cancel{a_q} - \cancel{a_{q-1}}) + (a_{q+1} - \cancel{a_q}) = a_{q+1} - a_p.$$

De manière plus rigoureuse,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1}-a_k) &= \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} a_k \\ &= \sum_{i=p+1}^{q+1} a_i - \sum_{k=p}^{q} a_k \\ &= a_{q+1} + \cancel{\sum_{k=p+1}^{q} a_k} - \cancel{\sum_{k=p+1}^{q} a_k} - a_p = a_{q+1} - a_p.\end{aligned}$$

Méthode
Pour effectuer un changement d'indice, on commence par exprimer la «nouvelle» variable en fonction de l'«ancienne». Ici, $i = k+1$. Les bornes de la somme s'obtiennent alors en cherchant les valeurs extrêmes de la nouvelle variable en fonction de celles de l'ancienne.

Exemple 4.6 **Un grand classique**

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
Et donc pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

De même, il existe des produits télescopiques : $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\cancel{a_{p+1}}}{a_p}\frac{\cancel{a_{p+2}}}{\cancel{a_{p+1}}}\cdots\frac{a_{q+1}}{\cancel{a_q}} = \frac{a_{q+1}}{a_p}$.

4.1.3 Quelques formules remarquables

Les formules qui suivent sont à connaître par cœur et sont la base de nombreux calculs de sommes.

Proposition 4.7 (Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique) :
Soit q un nombre complexe. Alors pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Si $q = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

Si $q \neq 1$, notons $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$. Alors

$$qS = q\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{i=1}^{n+1} q^i.$$

Et donc $S - qS = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$.

On en déduit que $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. □

Remarque
Il serait tout à fait possible de prouver le résultat par récurrence.
L'avantage de la démonstration proposée ici est que, si vous oubliez la formule, mais retenez l'idée de la démonstration (calculer $S - qS$), alors vous serez capables de retrouver le résultat.

Corollaire 4.8 – *Soient $q \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ et soit $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, avec $a \leqslant b$. Alors*

$$\sum_{k=a}^{b} q^k = q^a \frac{1 - q^{b-a+1}}{1 - q}.$$

Cette formule se retient bien plus simplement sous la forme suivante :

$$\sum_{k=a}^{b} q^k = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{k=a}^{b} q^k = \sum_{k=a}^{b} q^a q^{k-a} = q^a \sum_{k=a}^{b} q^{k-a} = q^a \sum_{i=0}^{b-a} q^i = q^a \frac{1 - q^{b-a+1}}{1 - q}.$$

□

Exemple 4.9

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^{2k-3}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^{-3}} \frac{1}{3^{2k}} = 27 \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{9}\right)^k = 27 \frac{1}{81} \frac{1 - \frac{1}{9^{n-1}}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{8}\left(1 - \frac{1}{9^{n-1}}\right).$$

Proposition 4.10 : *Pour $n \in \mathbf{N}$, on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Premier terme

Notons que ces sommes ont un premier terme qui est nul, et donc les formules sont valables que les sommes commencent à $k = 0$ ou qu'elles commencent à $k = 1$.

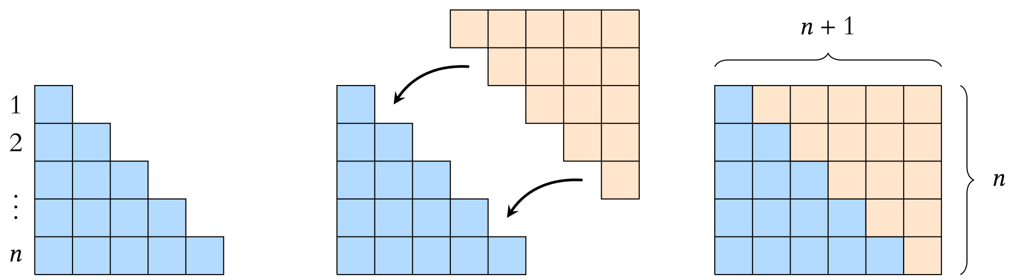
Démonstration. Notons $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Alors en effectuant le changement d'indice $i = n - k$ on obtient $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (n - i)$.

Et donc

$$2S = S + S = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{i=0}^{n} (n - i) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n - k) = \sum_{k=0}^{n} n = n(n+1).$$

Et par conséquent, $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.



Prouvons la seconde formule par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

Soit donc $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Pour $n = 0$, les deux membres de l'égalité sont nuls, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Supposons à présent $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)(n+1)}{6} = \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Méthode
$2n^2 + 7n + 6$ est un polynôme en n, qui possède -2 comme racine «évidente».
On peut donc le factoriser par $n + 2$.

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence :

pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. □

Proposition 4.11 (Troisième identité remarquable généralisée) :
Soient $a, b \in \mathbf{C}$ et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\
&= (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b) \times \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}.
\end{aligned}$$

Démonstration. Développons directement le membre de droite :

$$\begin{aligned}
(a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k &= a\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k - b\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{i=1}^{n} a^{n-i}b^i \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k}b^k - b^n = a^n - b^n.
\end{aligned}$$

□

Exemples 4.12

- Pour $n = 2$, on retrouve le classique $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
- Pour $n = 3$, $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.
- En particulier, si n est impair,

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + (-1)^{n-2}ab^{n-2} + (-1)^{n-1}b^{n-1}\right).$$

4.1.4 Sommes et produits doubles

Une famille de nombres peut ne pas dépendre d'un seul indice, mais de deux, comme par exemple i^j ou $\dfrac{i+1}{j!}$.
Pour calculer la somme d'un telle famille (finie bien entendu), il faut souvent réussir à faire apparaître des sommes simples.
Le cas le plus facile est en fait le cas général d'une famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$, ce qui revient à considérer une famille de nombres complexes $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,m}, \ldots, a_{n,1}, \ldots, a_{n,m}$ indexée

par les éléments de $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$.

On peut se représenter ces mn nombres sous forme d'un tableau[6], et la somme que nous cherchons à calculer est alors la somme de tous les coefficients du tableau.

[6] Voir la figure ci-dessous.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
i \diagdown j & 1 & 2 & \cdots & m \\
\hline
1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\
\hline
2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
n & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \\
\hline
\end{array}
\quad
\left.\begin{array}{l}
\\
\to \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{1,j} \\
\to \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{2,j} \\
\quad\vdots \\
\to \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{n,j}
\end{array}\right\}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}
\\
\begin{array}{ccccc}
\downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,2} & \cdots & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,m}}
\end{array}
\\
\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}
\end{array}
$$

Il y a plusieurs options pour calculer cette somme. L'une d'entre elles est de commencer par calculer la somme de chaque ligne (ce qui à i fixé correspond à $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$), puis calculer la somme des sommes des lignes, qui est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$.
Mais il est également possible de commencer, à j fixé, par calculer la somme des coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne, qui est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$, puis de calculer la somme des sommes de colonne, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$.
Et alors, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} a_{i,j}$.

Il est également possible d'imaginer que certaines cases du tableau soient vides. Par exemple, les cases sous la diagonale. Autrement dit, que $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.
Simplifions nous la vie, et considérons le cas où $m = n$, c'est-à-dire où notre tableau est carré.

Dans ce cas, à i fixé, la somme de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$.
Et donc la somme de tous les coefficients du tableau est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$.
D'autre part, si on commence par calculer la somme sur les colonnes, la somme de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$.
Et donc la somme de tous les coefficients est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$.

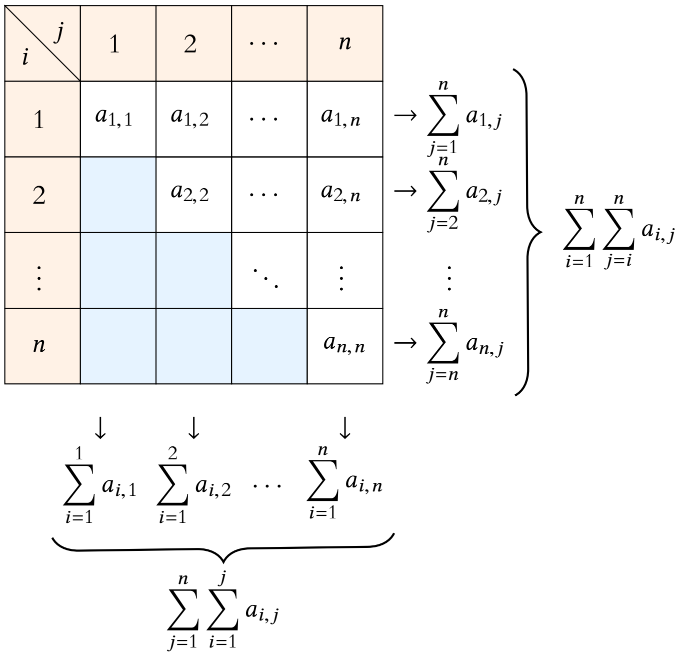


FIGURE 4.1 – Calcul de sommes triangulaires.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$. On note fréquemment $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$ cette somme.

Méthode
L'emploi de cette notation est conseillé lorsqu'on manipule des doubles sommes, et c'est souvent le plus simple pour intervertir les deux sommes en limitant les risques d'erreur.

Exemple 4.13

Calculons $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + n\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n(n+3)}{4}.
\end{aligned}$$

La deuxième somme ne dépendant pas de j, on peut sortir j de la somme.

Enfin, nous pourrions tenir le même type de raisonnement avec des sommes triangulaires où les coefficients diagonaux sont également nuls.
Tous les résultats sur les interversions de sommes sont résumés ci-dessous.

Proposition 4.14 (Interversion de sommes) : *Plus généralement, on a*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}.$$

Toutes les règles sur l'interversion de deux sommes s'étendent sans difficultés aux interversions de produits, en remplaçant le symbole $\sum$ par le symbole $\prod$.

Corollaire 4.15 – *Si pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = b_i c_j$, alors*

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right).$$

Démonstration. On a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i c_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(b_i \sum_{j=1}^{n} c_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Explication

La quantité $\sum_{j=1}^{n} c_j$ ne dépend pas de i, et donc peut sortir de la somme par linéarité.

□

La proposition ci-dessus ne s'applique qu'aux sommes où le terme $a_{i,j}$ peut s'écrire comme produit d'un terme ne dépendant que de i et d'un terme ne dépendant que de j, ce n'est pas le cas de toutes les sommes !
C'est par exemple possible pour $a_{i,j} = 2^{2i+3j} = 4^i 8^j$, mais pas pour $a_{i,j} = (i+j)!$

Corollaire 4.16 –

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

Démonstration. On a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$$
$$= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j + a_i^2 + \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j\right)$$
$$= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_i a_j + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

Relation de Chasles.

□

Notons que cette formule est bien connue si $n = 2$, c'est juste $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
Si $n = 3$, on a

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2 = (a^+b^2+c^2)+2(ab+bc+ac).$$

Plus généralement, lorsqu'on développe $(a_1 + \cdots + a_n)^2$, on fait apparaître tous les carrés $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$, ainsi que tous les «doubles produits» $a_i a_j$ avec $i \neq j$, qui apparaissent deux fois chacun.
Donc plutôt que d'écrire $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} a_i a_j$, on peut écrire $2 \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$.

4.2 Coefficients binomiaux et formule du binôme

4.2.1 Définition, premières propriétés

Commençons par donner une autre expression de la factorielle, souvent plus pratique que celle dont nous disposons déjà :

Proposition 4.17 : *Pour $n \in \mathbf{N}$, on a $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.*

Intérêt — Le principal avantage de cette formule est qu'il n'y a pas besoin de distinguer le cas $n = 0$.

Démonstration. Pour $n = 0$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{0} k = 1 = 0!$
Et pour $n > 0$, on retrouve bien évidemment le produit des entiers de k à n. □

Définition 4.18 (Coefficients binomiaux) – Soient n, k deux entiers naturels. On appelle **coefficient binomial «k parmi n»** le nombre $\dbinom{n}{k}$ défini par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que lorsque $k \leqslant n$, ceci s'écrit encore

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times (n-k)} \frac{1}{k!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}.$$

Proposition 4.19 : *Pour $n \in \mathbf{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.*

Démonstration. C'est un simple calcul :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

□

Donnons quelques valeurs remarquables qu'il est bon de connaître :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition 4.20 (Formule de Pascal) : *Pour tous entiers naturels k et n, on a*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration. ► Si $k > n$, alors on a aussi $k+1 > n$ et $k+1 > n+1$, donc les trois termes sont nuls, il n'y a rien à démontrer.
► Si $k = n$, alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 1 + 0 = 1 = \binom{n+1}{k+1}$.
► Enfin, si $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = n!\frac{k+1+n-k}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

A priori, les coefficient binomiaux sont des rationnels, car quotients de deux entiers, mais la formule précédente nous permet de dire bien mieux :

Corollaire 4.21 – *Quels que soient les entiers naturels k et n,* $\binom{n}{k} \in \mathbf{N}$.

Démonstration. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la proposition $\mathscr{P}(n)$:

$$\text{pour tout } k \in \mathbf{N},\ \binom{n}{k} \in \mathbf{N}.$$

Pour $n = 0$, c'est assez évident car $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$ et pour $k \geqslant 1$, $\binom{0}{k} = 0$.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soit $k \in \mathbf{N}$.
Si $k = 0$, $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1 \in \mathbf{N}$.
Et si $k \geqslant 1$, alors par la proposition précédente,

$$\binom{n+1}{k} = \underbrace{\binom{n}{k-1}}_{\in \mathbf{N}} + \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in \mathbf{N}} \in \mathbf{N}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

Les deux formules précédentes ont une interprétation très simple sur le triangle de Pascal (qui est le tableau ci-dessous, le nombre situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne étant $\binom{i-1}{j-1}$).

Décalage ?
La première ligne correspond à $n = 0$ et la première colonne correspond à $k = 0$.
Donc par exemple $\binom{4}{2}$ n'est pas sur la 4$^{\text{ème}}$ ligne et 2$^{\text{ème}}$ colonne, mais sur la 5$^{\text{ème}}$ ligne et 3$^{\text{ème}}$ colonne.
Le même type de décalage se rencontrera lorsqu'on manipulera des listes en Python.

$n = 0$	1						
$n = 1$	1	1					
$n = 2$	1	2	1				
$n = 3$	1	3	3	1			
$n = 4$	1	4	6	4	1		
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1

$n = 0$	1						
$n = 1$	1 +	1					
$n = 2$	1	2	1				
$n = 3$	1	3	3	1			
$n = 4$	1	4	6	4	1		
$n = 5$	1	5	10 +	10	5	1	
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1

Proposition 4.22 : *Soient* $(k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$. *Alors* $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration. Une fois encore, il n'y a besoin de travailler que pour $k \leqslant n$. On a alors

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} = n\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

□

4.2.2 La formule du binôme de Newton

Théorème 4.23 (Formule du binôme de Newton) : *Soient a et b deux nombres complexes*[7], *et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

[7] En particulier, cette formule reste valable si a et b sont des réels !

Démonstration. Fixons a et b, et prouvons par récurrence sur n la propriété $\mathscr{P}(n)$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Pour $n = 0$, on a $(a+b)^n = (a+b)^0 = 1$.
Et d'autre part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Supposons donc que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-(i-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^0 b^{n+1} \\
&= a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} b^0 \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Chgt d'indice — Dans la première somme, on a posé $i = k+1$, de sorte que $k = i-1$.

Formule de Pascal.

Et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, de sorte que par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Enfin, on a

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

□

Remarque. En particulier, pour $n = 2$, on retrouve

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Il est également utile de connaître la formule pour $n = 3$:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

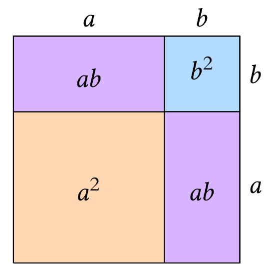


FIGURE 4.2– $(a+b)^2 = \dots$

Exemples 4.24

- $(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$.
- Pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Ainsi, la somme des coefficients de la $n^{\text{ème}}$ ligne du triangle de Pascal vaut 2^n.

- $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

4.2.3 Interprétation(s) des coefficients binomiaux

Lorsque vous avez rencontré les coefficients binomiaux en première, vous n'avez jamais parlé de factorielles...

À l'époque, $\binom{n}{k}$ désignait le nombre de manières d'obtenir k succès en n répétitions d'épreuves de Bernoulli.

Ou si vous préférez parler en termes d'arbres, le nombre de chemins de longueur n qui ont emprunté exactement k fois la branche de droite dans un arbre binaire.

En effet, si on note $C(n,k)$ le nombre de «chemins» à n essais menant à exactement k succès[8].

Par convention, on décide que $C(0,0) = 1$.

Il est clair que $C(n,0) = 1$: il n'y a qu'un seul moyen de n'avoir aucun succès, c'est d'avoir échoué à chaque essai.

De même, il est clair que $C(n,n) = 1$.

Enfin, si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, alors pour avoir k succès en n essais, il y a deux options :

- soit le dernier essai a été un échec, et donc il fallait avoir déjà eu k succès lors des $n-1$ premiers essais, ce qui pouvait se produire de $C(n-1,k)$ manières,
- soit le dernier essai a été un succès, et donc il fallait avoir eu $k-1$ succès lors des $n-1$ premiers essais, ce qui pouvait se produire de $C(n-1,k-1)$ façons.

On a donc $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$.

Probabilités
Notons qu'ici, nous ne comptons que le nombre d'issues, pas leur probabilités, et donc que les épreuves de Bernoulli soient indépendantes ou non, équiprobables ou non nous importe peu.

[8] Sur l'arbre ci-dessous, c'est le nombre de chemins partant de la case du haut et menant à $(k+1)^{\text{ème}}$ case de la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne.

Il est à présent possible de prouver par récurrence sur n la proposition $\mathscr{P}(n)$: «pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $C(n,k) = \binom{n}{k}$».

Pour $n = 0$, c'est évident car $C(0,0) = 1 = \binom{0}{0}$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors $C(n+1,0) = 1 = \binom{n+1}{0}$, $C(n+1,n+1) = 1 = \binom{n+1}{n+1}$ et si $k \in [\![1,n]\!]$, alors

$$C(n+1,k) = C(n,k) + C(n,k-1) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

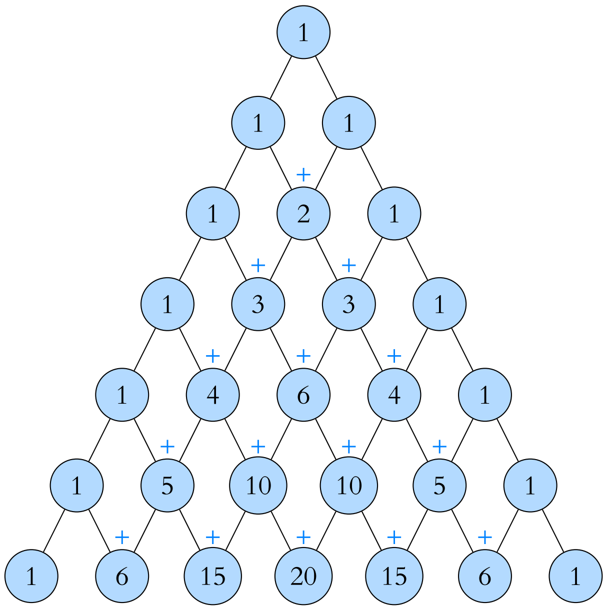


FIGURE 4.3 – Le nombre de chemins menant à une case donnée est la somme des nombres de chemins menant aux deux cases situées juste au dessus.

Ainsi, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, $C(n, k) = \binom{n}{k}$.
Enfin, il est évident que si $k > n$, alors $C(n, k) = 0 = \binom{n}{k}$.

Détails On ne peut avoir strictement plus de succès que d'essais...

Revenons à présent sur la formule du binôme : on a

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ fois}}.$$

Et donc lorsqu'on développe cette expression «à la main», il nous faut à chaque fois choisir un terme (a ou b) dans le premier facteur, un terme (a ou b) dans le second facteur, etc.
Autrement dit, on répète n fois l'expérience «choisir a (parlons de succès) ou b (parlons d'échec) dans le $i^{\text{ème}}$ facteur $a + b$.»
On obtient ainsi des produits de n termes tous égaux à a ou à b, donc de la forme $a^i b^{n-i}$, $i \in [\![0, n]\!]$.
Or, à k fixé, le nombre de manières d'obtenir $a^k b^{n-k}$ est le nombre de manières d'obtenir exactement k succès dans notre répétition d'expériences de Bernoulli : c'est donc $\binom{n}{k}$.
Et par conséquent, le coefficient devant $a^k b^{n-k}$ est $\binom{n}{k}$.

Une autre interprétation important des coefficients binomiaux, sur laquelle nous nous attarderons longuement dans un chapitre ultérieur est la suivante : $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble E à n éléments.
En effet, pour choisir une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments, il faut répéter n fois l'expérience à 2 issues suivantes : choisir ou non de prendre le premier élément de E, choisir de prendre ou non le second élément de E, etc.
Alors les parties de E à k éléments sont celles pour lesquelles on a obtenu k succès (= choisi k éléments), elles sont donc au nombre de $\binom{n}{k}$.

Exemple 4.25

Le nombre de trinômes de colle possibles en MPSI2 est $\binom{48}{3}$: c'est le nombre de façons de choisir une partie à 3 éléments de l'ensemble des étudiants.

Remarquons qu'une partie d'un ensemble à n éléments possède soit 0 éléments[9], soit un seul élément, soit deux éléments, ..., soit n éléments.
Et donc le nombre total de parties de E est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

[9] C'est alors $\emptyset$.

Exemple 4.26 **La formule du capitaine**

Revenons sur la formule 4.22 : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
Le sélectionneur d'une équipe de hockey doit former une équipe de k personnes parmi les n joueurs dont il dispose, et doit nommer un capitaine. Il y a alors deux options :

1. choisir les k joueurs qui composent l'équipe, et choisir un capitaine parmi ces k joueurs.
2. choisir un capitaine, puis lui choisir $k-1$ coéquipiers parmi les $n-1$ autres joueurs.

Dans le premier cas, il y a $\binom{n}{k}$ manières de former l'équipe, et une fois l'équipe choisie, il y a k manières de choisir le capitaine.
Soit donc en tout $k\binom{n}{k}$ choix possibles.

Dans le second cas, il y a n manières de choisir le capitaine, et pour chaque choix du capitaine, $\binom{n-1}{k-1}$ manières de choisir ses coéquipiers.
Soit en tout $n\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles.
On retrouve ainsi $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

4.3 Systèmes linéaires

4.3.1 Système de deux équations à deux inconnues

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est un système de la forme

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

où x et y sont les deux inconnues, et a, b, c, d, e, f sont des réels ou des complexes fixés.
Résoudre le système, c'est trouver tous les couples (x, y) dans $\mathbf{R}^2$ (ou dans $\mathbf{C}^2$) vérifiant le système.
On supposera dans la suite que ni (a, b) ni (c, d) ne sont égaux à $(0, 0)$.
Notons que dans le cas réel, $ax + by = e$ et $cx + dy = f$ sont deux équations de droites. Nommons $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ces deux droites.
Alors un point $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est solution du système si et seulement si il satisfait les deux équations de droites, c'est-à-dire s'il appartient aux deux droites.
Il y a alors trois cas possibles :

1. si les deux droites sont confondues, alors $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \mathscr{D}_1$, et donc l'ensemble des solutions du système est $\mathscr{D}_1$. Il y a donc une infinité de solutions.
2. si les deux droites sont parallèles et non confondues, alors $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \emptyset$: le système n'a pas de solution.

3. si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles, leur intersection est réduite à un point, et donc le système possède une unique solution.

Notons de plus que $\overrightarrow{u_1} = (a, b)$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}_1$ et que $\overrightarrow{u_2} = (c, d)$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}_2$.
Et donc les droites sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires[10], soit si et seulement si $ad - bc = 0$.
Et donc le système admet une unique solution si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
La quantité $ad - bc$ est appelée **déterminant du système** $(\mathscr{S})$, et sera largement généralisée plus tard dans l'année.

[10] C'est-à-dire ont même direction.

4.3.2 Système de deux équations à trois inconnues

Considérons à présent un système de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2 \end{cases}$$

Alors pour $i \in \{1, 2\}$, $a_{i,1}x + a_{i,2}y + a_{i,3}z = b_i$ est l'équation d'un plan[11] $\mathscr{P}_i$ de $\mathbf{R}^3$.
Résoudre le système, c'est trouver les coordonnées des points qui satisfont aux deux équations de plans à la fois, donc trouver $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

[11] Sauf si tous les $a_{i,j}$ sont nuls, mais nous négligerons ce cas pour l'instant.

Plusieurs options s'offrent à nous :

1. si les deux plans sont parallèles et distincts, alors leur intersection est vide : le système n'a pas de solution.
2. si les deux plans sont confondus, alors $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_1$, et donc le système possède une infinité de solutions.
3. si les plans ne sont pas parallèles, alors leur intersection est une droite, qui contient une infinité de points, et donc le système possède une infinité de solutions.

Notons qu'un tel système ne peut pas posséder une unique solution.

4.3.3 Cas général : système linéaire de n équations à p inconnues

Dans toute la suite, la lettre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 4.27 – On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$

où les inconnues (réelles ou complexes) sont $x_1, \dots, x_p$ et où les $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ sont des réels ou des complexes **fixés**.

En particulier, les équations qui composent un système linéaire ne font pas apparaître de x_i^2, de $\sqrt{x_i}$, de e^{x_i}, etc.
Un peu de vocabulaire :

1. Les $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** du système.
2. $(b_1, \dots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système $(\mathscr{S})$
3. le système $(\mathscr{S}_0)$ obtenu en remplaçant le second membre par $(0, \dots, 0)$ est appelé **système homogène associé à** $(\mathscr{S})$
4. on dit que le système $(\mathscr{S})$ est **incompatible** s'il ne possède pas de solution. Sinon, il est dit **compatible**.

Remarque. Un système homogène est toujours compatible puisqu'il possède toujours $(0, \dots, 0)$ comme solution.

Systèmes triangulaires

Définition 4.28 – Un système linéaire est dit **triangulaire** s'il est de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + & a_{1,2}x_2 + & a_{1,3}x_3 + & \cdots + & a_{1,n-1}x_{n-1} + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & a_{2,2}x_2 + & a_{2,3}x_3 + & \cdots + & a_{2,n-1}x_{n-1} + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & \ddots & & & & \vdots & \\ & & & & a_{n-1,n}x_{n-1} + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Soit encore si $n = p$ et si $a_{i,j} = 0$ pour $j < i$.

Dans le cas où tous les coefficients diagonaux (les $a_{i,i}$) sont non nuls, le système possède une unique solution, que l'on obtient de la manière suivante :

1. la dernière équation nous donne directement $x_n = \dfrac{b_n}{a_{n,n}}$
2. puis, en substituant à x_n la valeur obtenue précédemment, l'avant-dernière équation nous donne $x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$
3. on poursuit alors le même procédé en remontant une à une les équations jusqu'à obtenir la valeur de x_1.

Exemple 4.29

Résolvons le système $\begin{cases} 5x - 2y - z = -4 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = 6 \end{cases}$. On a alors

$$\begin{cases} 5x - 2y - z = -4 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y - z = -4 \\ 2y - z = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y - z = -4 \\ 2y = 1 + 3 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -4 + 3 + 4 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Et donc l'unique solution au système est $\left(\dfrac{3}{5}, 2, 3\right)$.

Opérations élémentaires

Définition 4.30 – On dit que deux systèmes $(\mathscr{S}_1)$ et $(\mathscr{S}_2)$ à p inconnues sont **équivalents** s'ils possèdent les mêmes solutions.
Autrement dit, $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ est solution de $(\mathscr{S}_1)$ si et seulement si il est solution de $(\mathscr{S}_2)$.

Pour modifier un système en un système équivalent, nous disposons de trois opérations élémentaires qui sont

- L'échange de deux lignes. Lorsqu'on échange la $i^{\text{ème}}$ ligne avec la $j^{\text{ème}}$, on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- La multiplication d'une ligne par un scalaire **non nul**. Si on multiplie L_i par $\lambda \neq 0$, on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- L'ajout à une ligne d'un multiple d'une **autre** ligne. On note alors $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Notons qu'avec un peu d'habitude, on peut directement ajouter à une ligne des multiples de plusieurs autres lignes, et par exemple effectuer des opération du type $L_2 \leftarrow L_2 + L_1 - 3L_3$.

Non nul !
Si on multiplie une ligne par 0, cela revient tout bonnement à la faire disparaître, ce qui a de fortes chances de changer l'ensemble des solutions du système.

Proposition 4.31 : *Toute opération élémentaire transforme un système en un système qui lui est équivalent.*

Démonstration. Notons $(\mathscr{S})$ le système de départ et $(\mathscr{S}')$ le système obtenu à partir de $(\mathscr{S})$ à l'aide d'une opération élémentaire.

- Il est évident que l'échange de deux lignes ne change pas l'ensemble des solutions d'un système.
- Si on a effectué l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$.
  Si $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathscr{S})$, alors on a en particulier $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p = b_i$, et donc en multipliant par λ,
  $$\lambda\left(a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p\right) = \lambda b_i \Leftrightarrow \lambda a_{i,1}x_1 + \dots + \lambda a_{i,p}x_p = \lambda b_i$$
  de sorte que $(x_1, \dots, x_p)$ satisfait encore la $i^{\text{ème}}$ équation de $(\mathscr{S}')$.
  Et puisque les autres équations sont inchangées, alors $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathscr{S}')$.
  Il reste à prouver qu'inversement, une solution de $(\mathscr{S}')$ est encore solution de $(\mathscr{S})$.
  Mais si on remarque qu'on passe de $(\mathscr{S}')$ à $(\mathscr{S})$ en réalisant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$, alors ce qui vient d'être dit s'applique, et donc une solution de $(\mathscr{S}')$ est solution de $(\mathscr{S})$.
  Ainsi, $(\mathscr{S})$ et $(\mathscr{S}')$ ont les mêmes solutions.
- Dans le cas où l'opération réalisée est $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $j \neq i$.
  Soit alors $(x_1, \dots, x_p)$ une solution de $(\mathscr{S})$.
  Alors en particulier $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p = b_i$ et $a_{j,1}x_1 + \dots + a_{j,p}x_p = b_j$.
  Et donc en multipliant la seconde égalité par λ et en ajoutant ces deux égalités, il vient
  $$(a_{i,1} + \lambda a_{j,1})x_1 + \dots + (a_{j,p} + \lambda a_{j,p})x_p = b_i + \lambda b_j$$
  de sorte que $(x_1, \dots, x_p)$ satisfait à la $i^{\text{ème}}$ équation de $(\mathscr{S}')$.
  Puisque les autres équations sont inchangées, $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathscr{S}')$.
  Inversement, on remarque qu'on passe de $(\mathscr{S}')$ à $(\mathscr{S})$ par l'opération $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$, et donc $(\mathscr{S})$ et $(\mathscr{S}')$ ont les mêmes solutions.

□

Ensemblistement
Nous venons de prouver que 'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est **inclus** dans l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S}')$.

La méthode du pivot de Gauss

Lorsque vous étiez petits et que vous avez appris à résoudre les systèmes de deux équations à deux inconnues, on vous a probablement présenté deux méthodes : la méthode par substitution (où l'on se sert d'une équation pour exprimer l'une des variables en fonction de l'autre avant de réinjecter cette expression dans la seconde équation) et la méthode par combinaison (où une combinaison astucieusement choisie des deux équations permet de faire disparaître l'une des variables).
Pour des systèmes linéaires plus généraux, la méthode par substitution mène à des calculs trop complexes pour être réellement efficace[12], et c'est la seconde méthode que nous allons chercher à développer ici.

[12] Bien qu'en théorie, elle soit valable.

Dans la suite nous donnons donc un algorithme qui permet de résoudre tous les systèmes linéaires, en utilisant le principe suivant : puisque les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système, essayons de bien choisir nos opérations de manière à nous ramener à des systèmes plus simples à résoudre (et si possible à des systèmes triangulaires).

Considérons donc un système linéaire

$$\mathscr{S} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

► Si tous les coefficients $a_{i,1}$ devant x_1 sont nuls, alors la valeur de x_1 n'a aucune importance. On résout donc le système $(\mathcal{S}')$ qui est le même que $(\mathcal{S})$, mais vu en tant que système des $p-1$ inconnues $x_2, \dots, x_{p-1}$.
Alors pour tout $x_1 \in \mathbf{K}$, $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $(x_2, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathcal{S}')$. Il s'agit donc de résoudre $(\mathcal{S}')$.
► Si l'un des $a_{i,1}$ est non nul, quitte à échanger deux lignes, on suppose qu'il s'agit de $a_{1,1}$.

Terminologie
Le coefficient $a_{i,1}$ que l'on choisit de mettre sur la première ligne est appelé **pivot**.

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, réalisons l'opération $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ (ou ce qui est équivalent, l'opération $L_i \leftarrow a_{1,1} L_i - a_{i,1} L_1$), ce qui ne change pas l'ensemble des solutions, et a pour effet de faire disparaître les termes en x_1 de toutes les équations suivant la première.
Le système[13] $(\widetilde{\mathcal{S}})$ obtenu est alors de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + & a_{1,2}x_2 + & \cdots + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & \widetilde{a}_{2,2}x_2 + & \cdots + & \widetilde{a}_{2,p}x_p & = & \widetilde{b}_2 \\ & & \vdots & & & \\ & \widetilde{a}_{n,2}x_2 + & \cdots + & \widetilde{a}_{n,p}x_p & = & \widetilde{b}_n \end{cases}$$

[13] Équivalent au système $(\mathcal{S})$.

Notons alors $(\widetilde{\mathcal{S}'})$ le système

$$\begin{cases} \widetilde{a_{2,2}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{2,p}}x_p & = \widetilde{b}_2 \\ & \vdots \\ \widetilde{a_{n,2}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{n,p}}x_p & = \widetilde{b}_n \end{cases}$$

On résout alors ce système suivant la même méthode, et alors, à toute solution $(x_2, \dots, x_p)$ de ce système correspond une unique solution $(x_1, \dots, x_p)$ de $(\widetilde{\mathcal{S}})$ (et donc[14] de $(\mathcal{S})$).
Pour l'obtenir, il suffit de réinjecter les valeurs de $x_2, \dots, x_p$ dans l'équation $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_p$ afin de déterminer la valeur de x_1 correspondante.

[14] Car $\mathcal{S}$ et $(\widetilde{\mathcal{S}})$ sont équivalents.

À chaque étape, nous sommes ramenés à la résolution d'un système qui comporte une équation de moins, ce qui finira toujours par aboutir à une seule équation[15], que nous savons alors résoudre.
En effet, trois cas de figure se présentent :

[15] Possiblement avec moins de p inconnues.

Remarque
Une formulation équivalente serait $b = c$, avec b et c deux constantes distinctes.

1. soit cette dernière équation est de la forme $0 = b$, avec $b \neq 0$, auquel cas elle ne possède pas de solution (et donc le système de départ n'a pas non plus de solutions).
2. soit elle est de la forme $ax_p = b$, avec $a \neq 0$, qui possède pour unique solution $x_p = \dfrac{b}{a}$.
C'est notamment ce qui se produit pour les systèmes triangulaires à coefficients diagonaux non nuls.
3. soit elle est de la forme $a_q x_q + a_{q+1}x_{q+1} + \cdots + a_p x_p = b$, avec $q < p$ et $a_q \neq 0$, et alors elle possède une infinité de solutions : pour tout choix de $(x_{q+1}, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^{q-p}$, $x_q = \dfrac{b - a_{q+1}x_{q+1} - \cdots - a_p x_p}{a_q}$ convient.
Et donc l'ensemble de ses solutions est $\left\{ \left(\dfrac{b - a_{q+1}x_{q+1} - \cdots - a_p x_p}{a_q}, x_{q+1}, \dots, x_p \right), (x_{q+1}, \dots, x_q p) \in \mathbf{K}^{q-p} \right\}$.

Quelques exemples

Voici qui vaut bien mieux qu'un long discours.

Exemple 4.32

Considérons le système $\begin{cases} -y+2z=5 \\ -4x+y-5z=0 \\ x+y-z=-6 \end{cases}$
Puisque le coefficient en x de la première ligne est nul, on commencer par échanger deux lignes, afin d'obtenir un pivot non nul. Échangeons donc L_1 et L_3.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} & -y+ & 2z & = & 5 \\ -4x & +y- & 5z & = & 0 \\ x & +y- & z & = & -6 \end{array}\right. \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcr} x+ & y- & z & = & -6 \\ -4x+ & y- & 5z & = & 0 \\ & -y+ & 2z & = & 5 \end{array}\right.$$

Nous pouvons donc prendre le 1 devant le x de la première équation comme pivot, et donc effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$, qui a pour effet de faire disparaître les x de la seconde équation[16].

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -6 \\ -4x & + & y & - & 5z & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2+4L_1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -6 \\ & & 5y & - & 9z & = & -24 \\ & - & y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right.$$

Nous ne nous préoccupons donc plus de la seconde ligne pour l'instant. Dans le système ainsi obtenu, le terme en y de la seconde ligne est non nul. Nous pouvons donc le prendre comme pivot. Notons que ceci nous contraindrait à diviser par 5 la première équation, ce qui ferait apparaître des dénominateurs un peu pénibles.
Deux solutions s'offrent à nous pour éviter ceci :

- échanger les lignes 2 et 3 pour prendre le -1 comme pivot.
- réaliser l'opération $L_3 \leftarrow 5L_3 + L_1$, qui revient à effectuer successivement les deux opérations élémentaires $L_3 \leftarrow 5L_3$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

Nous choisissons ici la seconde solution.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 6 \\ & & 5y & - & 9z & = & 15 \\ & - & y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow 5L_3+L_2}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -6 \\ & & 5y & - & 9z & = & -24 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Le système obtenu est alors triangulaire, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc il possède une unique solution.
On a alors immédiatement $z=1$, puis $5y=-24+9=-15 \Leftrightarrow y=-3$ et enfin $x=-6-(-3)+1=-2$.
Donc l'unique solution au système est $(-2,-3,1)$.

Choix du pivot
Nous pourrions aussi bien choisir d'échanger L_1 et L_2, prenant ainsi -4 comme pivot.
Cela aura l'inconvénient de nécessiter une division par 4 dans la suite, bien moins plaisante qu'une division par 1 !
On essaiera donc toujours de choisir des pivots les plus simples possibles (-1 ou 1 si on le peut).

[16] La dernière équation ne comportant pas de x, on ne s'en préoccupe pas.

Le cas que nous venons de voir est en quelque sorte le plus agréable, puisqu'on arrive à la fin sur un système triangulaire. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas !

Exemple 4.33 **Un système de 4 équations à 4 inconnues**

Résolvons le système $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} 5x-6y+6z-t=0 \\ 2x-3y+4z-t=1 \\ x \quad\quad -2z+t=-2 \\ -3x+3y-2z \quad =1 \end{cases}$
Nous pourrions nous contenter de prendre le 5 de la première ligne comme pivot, mais puisque la troisième équation contient un 1, commençons donc par échanger

les lignes 1 et 3.

$$(\mathscr{S}) \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \begin{cases} x \qquad -2z+t=-2 \\ 2x-3y+4z-t=1 \\ 5x-6y+6z-t=0 \\ -3x+3y-2z \qquad =1 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-5L_1 \\ L_4\leftarrow L_4+3L_1}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} x \qquad -2z+t=-2 \\ -3y+8z-3t=5 \\ -6y+16z-6t=10 \\ 3y-8z+3t=-5 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4+L_2}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} x \qquad -2z+t \qquad =-2 \\ -3y+8z-3t \qquad =5 \\ +0=0 \\ +0=0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont bien entendu inutiles, puisqu'elles sont satisfaites quelles que soient les valeurs de x, y, z, t.

Reste donc seulement $\begin{cases} x \qquad -2z+t=-2 \\ -3y+8z-3t=5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=-2+2z-t \\ y=-\frac{5}{3}-\frac{8}{3}z+t \end{cases}$.

Et donc l'ensemble des solutions est $\left\{\left(-2+2z-t, -\frac{5}{3}-\frac{8}{3}z-t, z, t\right), (z,t)\in\mathbf{R}^2\right\}$

On dit alors que z et t sont des **inconnues secondaires** en fonction desquelles on choisit d'exprimer les autres (ici x et y, appelées **inconnues principales**).

Notons qu'on aurait pu choisir d'autres inconnues secondaires.
Exprimons par exemple x et t en fonction de y et z.
La deuxième équation nous donne donc $t=-\frac{5}{3}+y-\frac{8}{3}z$.
Et alors la première équation donne

$$x=-2+2z-t=-2+\frac{5}{3}-y+\frac{8}{3}z+2z=-\frac{1}{3}-y+\frac{14}{3}z.$$

Et donc l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est $\left\{\left(-\frac{1}{3}-y+\frac{14}{3}z, y, z, -\frac{5}{3}+y-\frac{8}{3}z\right), (y,z)\in\mathbf{R}^2\right\}$.
Il ne saute pas aux yeux qu'on ait trouvé le même ensemble de solutions que ci-dessus, mais rassurez-vous, c'est bien le cas !

Exercice
Le prouver.

Exemple 4.34

$$\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ -2x+y+5z=4 \\ 4x+5y+3z=5 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow 3L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow 3L_3-4L_1}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 7y+13z=14 \\ 7y+13z=11 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 3x+3y-z=1 \\ 7y+13z=14 \\ 0=-3 \end{cases}$$

La dernière équation ne peut pas être satisfaite, et donc le système est incompatible.

Remarque
Notons qu'à l'étape précédente, il était déjà largement possible de voir que le système est incompatible, et cette dernière opération élémentaire n'était pas indispensable.

Notons que sur ces trois exemples, nous avons un système possédant une unique solution, un possédant une infinité de solutions, et un ne possédant pas de solution.
Ce sont en fait les trois seuls cas possibles[17], ce que nous justifierons plus tard, mais qui a quasiment déjà été fait : un système composé d'une unique équation linéaire ne peut posséder que zéro, une seule ou une infinité de solutions.
Terminons par une dernière définition :

[17] Par exemple il ne se peut pas qu'un système linéaire ne possède que 2 solutions : s'il en a plus d'une, il en a forcément une infinité.

Définition 4.35 – On dit qu'un système linéaire est un **système de Cramer** s'il possède une unique solution.

Par exemple, un système de deux équations à deux inconnues est de Cramer si et seulement si son déterminant est non nul.