7

Introduction à la décomposition en éléments simples

Nous avons précédemment rencontré des identité telles que $\forall x \neq 1, \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$.
Une telle écriture permet, entre autres, de déterminer aisément une primitive de la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$: il s'agit de $x \mapsto \ln(x) - \ln(x+1) = \ln \dfrac{x}{x+1}$.
De telles décompositions apparaissent fréquemment lorsque nous considérons le quotient de deux fonctions polynomiales, et le but de ce chapitre est essentiellement de se familiariser avec les techniques permettant de trouver ces décompositions. Rien ne sera démontré ici, et toute la théorie est repoussée à un chapitre ultérieur.

7.1 Décomposition d'un polynôme réel en produit de facteurs irréductibles

La définition qui suit d'un polynôme est très provisoire, et correspond plutôt à ce que nous nommerons plus tard une fonction polynomiale. Mais nous verrons que dans ce contexte, les deux définitions sont équivalentes.

Définition 7.1 – On appelle **polynôme** toute fonction P définie sur $\mathbf{R}$ de la forme $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, avec $n \in \mathbf{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$.
Si $a_n \neq 0$, on dit alors P est de degré n, et on note $\deg(P) = n$.
Si P est de degré n, son coefficient en x^n (ici a_n) est appelé coefficient dominant de P.

Remarques. ► On note généralement X plutôt que x la variable dont dépend P.
► Le degré d'un polynôme est donc la plus grande puissance de X qui apparaît précédée d'un coefficient non nul dans l'expression de P, et ce coefficient est le coefficient dominant. Par exemple $P(X) = -2X^3 + 3X + 1$ est de degré 3 et de coefficient dominant -2. De même, $Q(X) = X^3 + 4X^2$ est de degré 3 et de coefficient dominant 1.
Et $P(X) + 2Q(X) = 8X^2 + 3X + 1$ est de degré 2 et de coefficient dominant 8.
► Toutes les puissances de X qui apparaissent sont des entiers positifs. Et donc par exemple $\sqrt{x} = x^{1/2}$ et $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ **ne sont pas des polynômes.**

Remarque
On constate sur cet exemple que le degré d'une somme peut être strictement inférieur aux degrés des deux polynômes de la somme.

Définition 7.2 – Soit P un polynôme, et soit $a \in \mathbf{C}$. Si $P(a) = 0$, on dit que a est une racine de P.

Réel/complexe
Notons qu'un polynôme à coefficients réels peut avoir des racines complexes, par exemple i est racine de X^2+1.

Nous admettons[1] que si P possède $a \in \mathbf{R}$ pour racine, alors P se factorise par $X - a$.
Autrement dit, il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$.
De plus, on a alors $\deg Q = \deg P - 1$.

[1] Pour l'instant.

Exemple 7.3

Soit $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$. Alors $P(1) = 0$, donc P se factorise par $X - 1$: il existe des réels a, b, c, d tels que $P(X) = (X-1)(aX^3 + bX^2 + cX + d)$.
En développant cette expression, on obtient alors

$$P(X) = aX^4 + (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (d-c)X - d.$$

Et alors en identifiant les coefficients des différents degrés, on a

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -2 \\ c - b = 2 \\ d - c = -2 \\ -d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases}$$

Remarque
Notons que ce système est compatible, ce qui pour un système de 5 équations à 4 inconnues, n'était pas une évidence.

Donc $P(X) = (X-1)(X^3 - X^2 + X - 1)$. On constate alors que 1 est également racine de $X^3 - X^2 + X - 1$, qui se factorise donc par $X - 1$.
Après calculs, on trouve $P(X) = (X-1)(X-1)(X^2+1)$.
Et le polynôme $X^2 + 1$, qui possède un discriminant négatif ne possède plus de racines réelles.

Encore une fois, donnons une définition provisoire sur laquelle nous reviendrons plus tard.

Définition 7.4 – Un polynôme à coefficients réels est dit **irréductible** s'il est de degré 1 ou de degré 2 sans racines réelles (donc de discriminant strictement négatif).
Autrement dit, un polynôme irréductible est un polynôme de la forme $aX+b$, $(a,b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, ou de la forme $aX^2 + bX + c$, où $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Les polynômes irréductibles sont alors les «briques élémentaires» à partir desquelles on peut former tous les polynômes :

Théorème 7.5 : *Tout polynôme se décompose de manière unique comme produit de facteurs irréductibles. Ainsi, pour tout polynôme P s'écrit*

$$P = a\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{n_i} \times \prod_{j=1}^{q}(X^2 + b_jX + c_j)^{m_j}$$

où a est un réel non nul, $\lambda_1, \dots, \lambda_p, b_1, c_1, \dots, b_q, c_q$ sont des réels, $n_1, \dots, n_p, m_1, \dots, m_q$ sont des entiers strictement positifs et pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $b_j^2 - 4c_j^2 < 0$.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près, et s'appelle la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles.

Il est aisé de se convaincre que a est le coefficient dominant de P, et que les λ_i sont les racines réelles de P.
Dans le cas où $n_i > 1$, on dit que λ_i est une racine multiple de P (racine double si $n_i = 2$, racine triple si $n_i = 3$, etc).

⚠ Il n'y a pas de méthode générale pour trouver à coup sûr la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles. Par exemple, je serais bien embêté de donner la décomposition de $X^5 - 5X - 1$ en produit de facteurs irréductibles.
Bien que je puisse prouver à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que ce polynôme possède exactement trois racines, je ne sais pas calculer la valeur exacte de ces racines.
Et donc je peux dire qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a, b$ tels que $X^5 - 5X - 1 = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)(X^2 + aX + b)$, mais sans savoir calculer les valeurs exactes de ces réels.

Exemple 7.6

Soit $P(X) = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 4X^2$.
Alors $P(X) = 2X^2(X^3 - 2X^2 - X + 2)$. On constate alors aisément que 1 est racine évidente et donc que $P(X) = 2X^2(X-1)(X^2 - X - 2)$.
Il ne s'agit pas encore de la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P puisque $X^2 - X - 2$ n'est pas irréductible : il s'écrit sous la forme $(X-2)(X+1)$.
Donc la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles est $P(X) = 2X^2(X-$

1)$(X+1)(X-2)$.

7.2 Division euclidienne des polynômes

La division euclidienne des entiers relatifs vous est familière depuis longtemps : c'est celle avec les restes que vous avez apprise au primaire[2]
La division de a par b est de la forme $a = bq + r$, où q est un entier appelé quotient de a par b et r est un entier tel que $0 \leqslant r < |b|$, qu'on appelle le reste de la division de a par b.
Ainsi, $151 = 11 \times 13 + 8$ est la division euclidienne de 151 par 13 : son quotient vaut 11 et son reste vaut 8.
Une telle division existe aussi pour les polynômes :

[2] Et vous êtes parfois empressé d'oublier depuis !

Remarque
Il s'agit aussi de la division euclidienne de 151 par 11, mais dans ce cas, le quotient vaut 13.

Théorème 7.7 : *Soient A et B deux polynômes non nuls. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes avec $\deg R < \deg(B)$ tel que $A = BQ + R$.*
On dit alors que Q est le quotient de A par B et que R est le reste de la division euclidienne de A par B.
Si $R = 0$, on dit que B divise A.

Une fois n'est pas coutume, repoussons la preuve à plus tard, et essayons de comprendre comment trouver une telle division. Le principe est essentiellement le même que pour la division euclidienne des entiers, et nous allons également «poser» les divisions. Contentons nous d'un exemple commenté : la division euclidienne de $3X^4 - 5X^3 + X - 1$ par $X^2 - X + 2$.

On commence par chercher par quel monôme multiplier $X^2 - X + 2$ pour faire apparaître un polynôme dont le terme de plus haut degré est $3X^4$.
On calcule alors $3X^2 \times (X^2 - X + 2)$.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
\boxed{3X^4} & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{6-8}
3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & \boxed{3X^2} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rrrrr|rrr}
(1) & 3X^4 & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{7-9}
(2) & 3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & 3X^2 & & \\ \cline{2-6}
(1)-(2) & & -2X^3 & -6X^2 & +X & -1 & & &
\end{array}$$

On soustrait les deux lignes précédentes.

On recommence...

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
3X^4 & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{6-8}
3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & 3X^2 & \boxed{-2X} & \\ \cline{1-5}
& \boxed{-2X^3} & -6X^2 & +X & -1 & & & \\
& -2X^3 & +2X^2 & -4X & & & & \\ \cline{2-5}
& & -8X^2 & +5X & -1 & & &
\end{array}$$

Jusqu'à obtenir un polynôme de degré strictement inférieur à celui du diviseur.
On s'arrête alors ici.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
3X^4 & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{6-8}
3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & 3X^2 & -2X & \boxed{-8} \\ \cline{1-5} \cline{6-8}
& -2X^3 & -6X^2 & +X & -1 & & & \\
& -2X^3 & +2X^2 & -4X & & & & \\ \cline{2-5}
& & \boxed{-8X^2} & +5X & -1 & & & \\
& & -8X^2 & +8X & -16 & & & \\ \cline{3-5}
& & & \boxed{-3X} & \boxed{+15} & & &
\end{array}$$

Le quotient est alors ici.

Et le reste est là.

La division euclidienne de $3X^4 - 5X^3 + X - 1$ par $X^2 - X + 2$ est donc

$$3X^4 - 5X^3 + X - 1 = (3X^2 - 2X - 8)(X^2 - X + 2) + (-3X + 15).$$

Son quotient est $3X^2 - 2X - 8$ et son reste est $-3X + 15$.

Notons que la division euclidienne s'applique aussi dans les questions de factorisation, et que pour trouver comment factoriser $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ par $X - 1$, nous aurions pu effectuer la division du premier par le second.
Nous avons alors admis qu'une factorisation était possible, ce qui signifie que le reste de la division sera nul, et le facteur cherché est alors le quotient :

$$
\begin{array}{ccccc|l}
X^4 & -2X^3 & +2X^2 & -2X & +1 & X-1 \\ \cline{6-6}
X^4 & -X^3 & & & & X^3 - X^2 + X - 1 \\ \cline{1-5}
 & -X^3 & +2X^2 & -2X & +1 & \\
 & -X^3 & +X^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & X^2 & -2X & +1 & \\
 & & X^2 & -X & & \\ \cline{3-5}
 & & & -X & +1 & \\
 & & & -X & +1 & \\ \cline{4-5}
 & & & & +0 &
\end{array}
$$

7.3 DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Définition 7.8 – On appelle **fraction rationnelle** toute fonction qui, sur son ensemble de définition, est de la forme $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes.
Le degré de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est alors par définition égal à $\deg(P) - \deg(Q)$.

Les points où $\dfrac{P}{Q}$ n'est pas défini sont les racines de Q, qu'on appelle aussi les **pôles** de $\dfrac{P}{Q}$.
On parle de pôle simple pour une racine simple de Q, de pôle double pour une racine double de Q, etc.

Exemple 7.9

$\dfrac{1}{X^2+1}$ est une fraction rationnelle de degré -2.
$\dfrac{X^3+X}{(X-1)(X-2)}$ est une fraction rationnelle de degré $3 - 2 = 1$.

Dans tout ce qui suit, nous ne intéresserons qu'aux fractions rationnelles dont le degré est strictement négatif, c'est-à-dire de la forme $\dfrac{P}{Q}$, avec $\deg Q > \deg P$.
Si jamais ce n'est pas le cas on commencera par effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
Plus précisément, si $P = AQ + R$ est la division euclidienne de P par Q, alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{AQ+R}{Q} = A + \frac{R}{Q} \text{ avec } \deg R < \deg Q.$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons donc $\deg P < \deg Q$.
Notons que quitte à effectuer des simplifications, on peut supposer que P et Q n'ont pas de facteurs irréductibles communs.
Par exemple,

$$\frac{X^2+X-2}{X^3-4X^2+5X-2} = \frac{(X-1)(X+2)}{(X-2)(X-1)^2} = \frac{X+2}{(X-1)(X-2)}.$$

Il existe alors une décomposition de $\dfrac{P}{Q}$ comme somme d'éléments, dits **éléments simples**, de la forme $\dfrac{a}{(X-\lambda)^m}$ ou $\dfrac{cX+d}{(X^2+aX+b)^m}$, où $X^2 + aX + b$ est irréductible (c'est-à-dire

vérifie $a^2 - 4b < 0$).
Les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{a}{(X-\lambda)^m}$ sont appelées **éléments simples de première espèce** et les fractions de la forme $\dfrac{cX+d}{(X^2+aX+b)^m}$ sont appelées **éléments simples de seconde espèce.**

Une fois encore, les énoncés précis viendront plus tard, essayons plutôt de comprendre sur des exemples sous quelle forme chercher la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
La règle générale étant que les éléments simples qui apparaissent dans la décomposition ont pour dénominateurs des puissances des facteurs irréductibles de Q, avec des puissances qui n'excédent pas celles qui apparaissent dans la décomposition en facteurs irréductibles de Q.

Exemples 7.10

- $\dfrac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \dfrac{P}{Q}$ possède une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}.$$

En effet, le facteur $X-1$ apparaît à la puissance 1 dans la décomposition de Q, et donc il n'y aura qu'un terme en $\dfrac{1}{X-1}$ dans la décomposition de $\dfrac{P}{Q}$.
De même, $X+2$ apparaît à la puissance 2 dans Q, et donc la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$ ne contient que des termes en $\dfrac{1}{X+2}$ et en $\dfrac{1}{(X+2)^2}$.

- $\dfrac{X^3-3X+1}{(X+1)^3(X+4)(X^2+1)^2}$ possède une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{(X+1)^3} + \frac{d}{X+4} + \frac{eX+f}{X^2+1} + \frac{gX+h}{(X^2+1)^2}.$$

Une fois admis l'existence d'une telle décomposition, la vraie question est «comment trouver les valeurs des coefficients $a, b, c, \dots$ dans les écritures ci-dessus ?»

Il existe plusieurs méthodes, plus ou moins efficaces suivant les cas.
Commençons par la méthode «naïve», qui fonctionne à tous les coups, mais peut conduire à des calculs laborieux : la mise au même dénominateur.

Exemple 7.11

Nous venons de dire qu'il existe des réels a, b, c tels que

$$\frac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2} &= \frac{a(X+2)^2 + b(X-1)(X+2) + c(X-1)}{(X-1)(X+2)^2}\\
&= \frac{a(X^2+4X+4) + b(X^2+X-2) + cX - c}{(X-1)(X+2)^2}\\
&= \frac{(a+b)X^2 + (4a+b+c)X + (4a-2b-c)}{(X-1)(X+2)^2}.
\end{aligned}$$

Et donc pour avoir $\dfrac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+2} + \dfrac{c}{(X+2)^2}$, il suffit d'avoir

$$(a+b)X^2 + (4a+b+c)X + (4a-2b-c) = X^2+2X+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b+c=2 \\ 4a-2b-c=1 \end{cases}.$$

Il ne reste donc qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} a+\ b \qquad = 1 \\ 4a+\ b+c=2 \\ 4a-2b-c=1 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-4L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-4L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+\ b \qquad = 1 \\ -3b+c=-2 \\ -6b-c=-3 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+\ b \qquad = 1 \\ -3b+\ c=-2 \\ -3c=1 \end{cases}$$

On trouve alors une unique solution, qui est $a=\dfrac{4}{9}$, $b=\dfrac{5}{9}$, $c=-\dfrac{1}{3}$.

Système

Ce système vient de l'identification des coefficients en X^2, en X et du coefficient constant.
Puisque nous avons admis qu'une telle décomposition existe, il est sûr que ce système admet des solutions (et en fait une unique solution).

Cette méthode, bien que fonctionnant toujours, peut vite s'avérer laborieuse en termes de calculs, et mener à des systèmes qui comportent de nombreuses inconnues[3].
Une autre méthode consiste à multiplier par $(X-\lambda)^m$, puis à évaluer la relation obtenue en $X=\lambda$.

[3] Et donc de gros risques d'erreurs de calcul !

Exemple 7.12

Il existe a, b, c tels que $\dfrac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2(X-3)} = \dfrac{a}{X-3} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{(X+1)^2} \quad (\star)$.
En multipliant $(\star)$ par $X-3$, il vient

$$\frac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2} = a + \frac{b(X-3)}{X+1} + \frac{c(X-3)}{(X+1)^2}.$$

En prenant alors $X=3$, il ne reste que

$$\frac{3^2-3^2-2}{(3+1)^2} = a + \frac{0}{3+1} + \frac{0}{(3+1)^2} \Leftrightarrow a = 1.$$

De même, en multipliant la relation $(\star)$ par $(X+1)^2$, il vient

$$\frac{3X^2-3X-2}{X-3} = \frac{a(X+1)^2}{X-3} + b(X+1) + c.$$

En évaluant en $X=-1$, on a donc

$$\frac{3+3-2}{-4} = \frac{0}{-4} + 0 + c \Leftrightarrow c = -1.$$

Toutefois cela ne nous permet pas d'obtenir la valeur de b, et multiplier $(\star)$ par $X+1$ ne saurait suffire. En effet, cela nous conduirait à

$$\frac{3X^2-3X-2}{(X+1)(X-3)} = \frac{a(X+1)}{X-3} + b + \frac{c}{X+1},$$

relation qui ne peut être évaluée en $X=-1$ puisqu'il reste des $X+1$ aux dénominateurs.
En revanche, s'il ne nous manque que b, nous pouvons utiliser la première méthode de mise au même dénominateur :

$$\frac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2(X-3)} = \frac{(X+1)^2+b(X+1)(X-3)-(X-3)}{(X+1)^2(X-3)} = \frac{(1+b)X^2+(1-2b)X+4-3b}{(X+1)^2(X-3)}.$$

Et alors l'identification de n'importe quel coefficient du numérateur nous conduit à $b=2$.
Ainsi, la décomposition cherchée est $\dfrac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2(X-3)} = \dfrac{1}{X-3} + \dfrac{2}{X+1} - \dfrac{1}{(X+1)^2}$.

Remarque

Ce problème apparaît dans le cas de pôles multiples.
Cette méthode est donc particulièrement adaptée pour les pôles simples.

Cette méthode peut aussi fonctionner lorsque λ est une racine **complexe** d'un facteur irréductible du dénominateur.

Exemple 7.13

Il existe a, b, c tels que $\dfrac{X^2+4X-7}{(X^2+4)(X+1)} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2+4}$ $(\star)$.
Déjà, en multipliant cette relation par $X+1$, puis en évaluant en $X=-1$, il vient $a=-2$.
D'autre part, les racines complexes de X^2+4 sont $2i$ et $-2i$, de sorte que $X^2+4 = (X-2i)(X+2i)$.
Et donc en multipliant $(\star)$ par $X-2i$, il vient

$$\frac{X^2+4X-7}{(X+2i)(X+1)} = \frac{-2(X-2i)}{X+1} + \frac{bX+c}{X+2i}.$$

Et donc en évaluant en $X=2i$, on obtient

$$\frac{-11+8i}{4i(1+2i)} = \frac{2bi+c}{4i}.$$

Soit encore $2bi+c = \dfrac{-11+8i}{1+2i} = \dfrac{(-11+8i)(1-2i)}{5} = \dfrac{5+30i}{5} = 1+6i$.
Puisque b et c sont des réels, il vient donc $c=1$ et $b=3$.
Et par conséquent, $\dfrac{X^2+4X-7}{(X^2+4)(X+1)} = \dfrac{-2}{X+1} + \dfrac{3X+1}{X^2+4}$.

Une autre méthode consiste à multiplie la fraction de départ par X, puis à faire tendre X vers $+\infty$, ce qui peut faire apparaître des relations[4] simples entre les différents coefficients de la décomposition en éléments simples.

[4] Et donc permet de réduire le nombre d'inconnues.

Exemple 7.14

Il existe des réels a, b, c tels que $\dfrac{-3X+16}{(X+3)(X-2)^2} = \dfrac{a}{X+3} + \dfrac{b}{(X-2)} + \dfrac{c}{(X-2)^2}$.
En multipliant cette relation par $X+3$ et en évaluant en $X=-3$, il vient $a=1$.
Puis en multipliant $(\star)$ par X, on obtient

$$\frac{-3X^2+16X}{(X+3)(X-2)^2} = \frac{-X}{X+3} + \frac{bX}{X-2} + \frac{cX}{(X-2)^2}.$$

Mais lorsque $X \to +\infty$, il vient

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{-3X^2+16X}{(X+3)(X-2)^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^2\left(-3+\frac{16}{X}\right)}{X^3\left(1+\frac{3}{X}\right)\left(1-\frac{2}{X}\right)^2} = 0.$$

Et de même, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{-X}{X+3} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{-1}{1+\frac{3}{X}} = -1$, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{bX}{X-2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{b}{1-\frac{2}{X}} = b$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{cX}{(X-2)^2} = 0$.
Et par conséquent, par identification des limites, $-1+b=0 \Leftrightarrow b=1$.
Enfin, en multipliant $(\star)$ par $(X-2)^2$, et en évaluant en $X=2$, on trouve $c = \dfrac{10}{5} = 2$.
Et donc $\dfrac{-3X+16}{(X+3)(X-2)^2} = \dfrac{1}{X+3} - \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{2}{(X-2)^2}$.

Rédaction ✎
J'ai tout bien rédigé ici, mais nous formaliserons bientôt un fait avec lequel vous devez déjà être familier : la limite en $\pm\infty$ d'un quotient de polynômes est la limite du quotient des termes de plus haut degré.
Si vous êtes familiers avec ceci, alors il n'est pas nécessaire de détailler ce type de calcul de limite.

Et pour conclure, notons que l'évaluation de la relation de départ en n'importe quel X qui n'est pas un pôle de la fraction de départ donnera une relation liant les coefficients de la décomposition en éléments simples.

Exemple 7.15

Il existe des réels a, b et c tels que $\dfrac{2X^2+11X+1}{(X-3)(X^2+X+1)} = \dfrac{a}{X-3} + \dfrac{bX+c}{X^2+X+1} \quad (\star)$.
En multipliant $(\star)$ par $X-3$ et en évaluant en $X=3$, il vient $a = \dfrac{52}{13} = 4$.
En multipliant $(\star)$ par X et en faisant tendre vers $+\infty$, il vient $2 = a+b \Leftrightarrow b = -2$.
Enfin, en évaluant $(\star)$ en $X=0$, on obtient

$$-\frac{1}{3} = \frac{a}{-3} + c \Leftrightarrow c = 1.$$

Nous nous contentons de ces exemples. L'important pour l'instant sera :

1. de savoir sous quelle forme se présente la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de degré négatif.
2. d'utiliser à bon escient ces différentes méthodes afin de déterminer, avec le moins de calculs possibles[5].

Un chapitre ultérieur justifiera l'existence et même l'unicité de la décomposition en éléments simples, l'étendra aux fractions rationnelles à coefficients complexes, et donnera également quelques autres astuces permettant de simplifier la détermination de la décomposition en éléments simples.

[5] Personne ne vous reprochera d'avoir fait «trop» de calculs... à condition que ceux-ci mènent au bon résultat !