8

Calcul de primitives et d'intégrales

Une fois n'est pas coutume, nous allons utiliser dans ce chapitre des résultats que nous admettrons pour l'instant, mais démontrerons plus tard, afin de nous intéresser à l'aspect calculatoire, et à la pratique du calcul de primitives.
Cela dit, il n'y aura pas de grandes surprises, les résultats que nous admettrons momentanément ayant déjà été admis en terminale. Il s'agit essentiellement des propriétés de l'intégrale, et du théorème stipulant que toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.
Cela dit, il faudra que nous y revenions plus tard dans l'année, en donnant une définition plus rigoureuse de l'intégrale[1].

[1] Qui nous permettra notamment de faire le lien avec la notion d'aire.

8.1 Rappels sur les primitives et les intégrales

8.1.1 Le théorème fondamental de l'analyse

Définition 8.1 – Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque
La définition reste valable même si f n'est pas continue, mais dans ce chapitre, nous ne considérerons que des primitives de fonctions continues.

Proposition 8.2 : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I. Alors une fonction $G : I \to \mathbf{R}$ est une primitive de f si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $G = F + \lambda$ (c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + \lambda$).*

Soyons clair !
Le λ est une constante qui ne dépend pas de $x \in I$!

Démonstration. Il est évident qu'une fonction qui ne diffère de F que par l'ajout d'une constante possède encore f comme dérivée, et donc est une primitive de f.
Inversement, si G est une primitive de f, alors la fonction $G - F$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $f - f = 0$.
Donc $G - F$ est constante : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $G - F = \lambda \Leftrightarrow G = F + \lambda$. □

Ce résultat a une conséquence immédiate : dès qu'il existe une primitive de f, il en existe une infinité.
On se gardera donc bien de parler de **la** primitive de f, mais bien **d'une** primitive de f.

Une question que l'on peut se poser est la suivante : quelles sont les fonctions qui admettent des primitives ? Autrement dit, parmi les fonctions continues, lesquelles sont des dérivées ? Une dérivée peut-elle être n'importe quelle fonction continue, ou possède-t-elle d'autres propriétés spécifiques aux dérivées ? Le théorème suivant répond très clairement à cette question :

Proposition 8.3 (Théorème fondamental de l'analyse, version 1) :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une primitive F sur I.

Démonstration. Admis pour l'instant. □

Le théorème fondamental de l'analyse garantit l'existence de primitives, mais il ne dit absolument pas comment les trouver.
De manière générale, le calcul de primitives est un problème difficile, contrairement au

calcul de dérivées, qui est totalement algorithmique : la connaissance des dérivées usuelles, et des formules pour la dérivée d'une somme, d'un produit et d'une composée permettent de calculer les dérivées d'un grand nombre de fonctions.

À titre d'exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ admet des primitives, puisqu'elle est continue, mais pourtant il n'est pas possible d'exprimer l'une de ces primitives à l'aide d'opérations sur les fonctions usuelles.

Pour la culture

C'est un théorème (très difficile) de Liouville qui garantit qu'aucune fonction obtenue à l'aide de polynômes, d'exponentielles, de logarithmes, des fonctions circulaires et de leurs réciproques à partir des opérations usuelles (somme, produit, quotient, composée) n'est une primitive de e^{-x^2}. Donc si vous trouvez une expression pour une primitive de e^{-x^2}, ne cherchez pas : elle est fausse !

8.1.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 8.4 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si elle est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

Un résultat qui a été mentionné au lycée, et qui sera bientôt prouvé affirme qu'une fonction dérivable est nécessairement continue. La réciproque est fausse, et vous connaissez la valeur absolue comme contre-exemple : elle est continue en 0, mais n'y est pas dérivable. Donc :

- vous ne direz pas «une fonction continue et dérivable», alors qu'il suffit de dire «une fonction dérivable»
- vous ne prouverez pas qu'une fonction est $\mathscr{C}^1$ en prouvant qu'elle est continue et dérivable. Il suffira de prouver qu'elle est dérivable, puis il faudra prouver que sa dérivée est continue.

Il est facile de constater que les fonctions suivantes sont $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de dérivabilité, car leurs dérivées sont continues :

1. les polynômes et les fractions rationnelles
2. toutes les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$
3. l'exponentielle, et plus généralement toutes les $x \mapsto a^x$
4. le logarithme
5. les fonctions sinus, cosinus, tangente et arc sinus, arc cosinus et arc tangente.
6. les fonction sinus, cosinus et tangente hyperbolique.

Il est également aisé de constater[2] que la somme/le produit/le quotient/la composée de deux fonctions $\mathscr{C}^1$ est encore $\mathscr{C}^1$.
Prouvons-le par exemple pour le quotient : soient f et g deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I où g ne s'annule pas.
Alors nous savons que $\dfrac{f}{g}$ est dérivable, et que sa dérivée est donnée par $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
Mais f, f', g et g' sont continues, donc $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$ est continue, de sorte que $\dfrac{f}{g}$ est $\mathscr{C}^1$.

[2] Et nous reviendrons bientôt dessus.

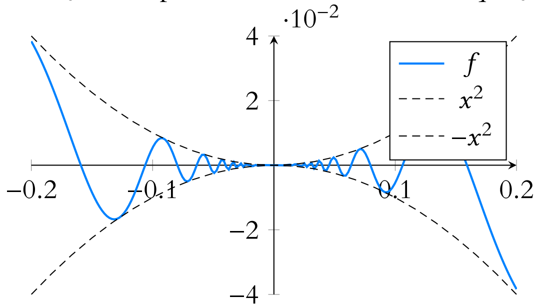
En revanche, il existe des fonctions qui sont dérivables sans être $\mathscr{C}^1$, c'est-à-dire à dérivée non continue.

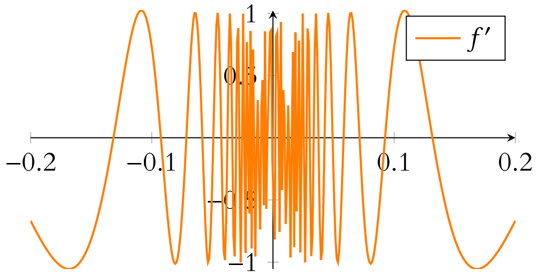
Exemple 8.5

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Nous allons prouver que f est dérivable sur $\mathbf{R}$, mais qu'elle n'y est pas $\mathscr{C}^1$.
Il est clair[3] que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, et que sa dérivée y est donnée par $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$.
D'autre part, pour $x \neq 0$ on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \dfrac{1}{x}$.
Or, $0 \leqslant \left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant |x|$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.
Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Étant déjà dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier.

[3] Par produit et composition de fonctions $\mathscr{C}^1$.

On a alors $2x \sin \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 (car cos n'a pas de limite en $\pm\infty$). Et donc $f'(x)$ n'a pas de limite en 0, et donc ne tend pas vers $f'(0)$.
Donc f' n'est pas continue en 0, de sorte que f est dérivable mais pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.





8.1.3 Intégrale sur un segment

La définition qui suit d'une intégrale n'est que provisoire, même s'il s'agit de celle manipulée au lycée.

Définition 8.6 – Soit f une fonction continue sur un segment I. Si F est une primitive de f, on pose, pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette quantité ne dépend pas de la primitive F choisie, et est appelée intégrale de f sur le segment $[a,b]$.

Remarque
Notons que cette définition est valable même si $a \geqslant b$.

Démonstration. Il faut tout de même prouver que cette quantité ne dépend pas de la primitive choisie : si F et G sont deux primitives de f, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $G = F + \lambda$.
Et donc $G(b) - G(a) = f(b) + \lambda - (F(a) + \lambda) = F(b) - F(a)$. □

Remarques. ► La variable d'intégration (notée t dans la définition ci-dessus) est une variable muette, et vous pouvez l'appeler comme bon vous chante. Par exemple, les quantités $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(\theta)\,d\theta$ et $\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$ sont toutes égales.
Il y a tout de même quelques restrictions[4] :

- les bornes de l'intégrale ne peuvent pas dépendre de la variable d'intégration : $\cancel{\int_1^x f(x)\,dx}$ n'a pas de sens.
- la variable d'intégration n'a plus de sens en dehors de l'intégrale, et on ne peut pas utiliser comme variable d'intégration une variable déjà définie ailleurs.
  Ainsi, $\cancel{x^2 \int_0^\alpha f(x)\,dx}$ n'a pas de sens, mais $x^2 \int_0^x f(t)\,dt$ en a.

► Vous utiliserez souvent les notations dt, dx ou $d\theta$ en physique pour désigner des quantités «infiniment petites», ce qui devrait vous permettre de démystifier un peu cette notation (même si pour nous, matheux, il ne s'agit que d'une notation et rien d'autre).
L'idée, que nous formaliserons plus tard[5], est qu'une intégrale est en quelques sorte une somme infinie d'aires de rectangles dont la longueur dt est infiniment petite. D'ailleurs, la notation $\int$ pour l'intégrale vient de là : Leibniz, qui a introduit cette notation, notait en fait s (comme somme), mais avec le «s long»[6] que l'on rencontre parfois dans les textes en vieux français et que l'on confond souvent avec un f.

La définition de l'intégrale que nous donnons n'utilisant que la notion de primitive, purement analytique, nous laisserons de côté pour l'instant toute interprétation de l'intégrale comme une aire. Toutefois, vous avez déjà acquis une certaine intuition sur le sujet, il ne faudra pas vous priver de l'utiliser lorsque c'est possible.

[4] Essentiellement les mêmes que pour les sommes.

[5] Lorsque nous rencontrerons ce que nous appellerons les sommes de Riemann.

[6] Que je ne sais pas reproduire ici...

Proposition 8.7 (Propriétés de l'intégrale) : *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$:*

1. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$ *(linéarité de l'intégrale)*
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$
3. *pour tout $c \in I$,* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ *(relation de Chasles).*
4. *si $a \leqslant b$ et si $\forall t \in [a,b], f(t) \geqslant 0$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$ *(positivité de l'intégrale).*
5. *si $a \leqslant b$ et si $\forall t \in [a,b], f(t) \leqslant g(t)$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$ *(croissance de l'intégrale).*

⚠ Attention ! Pour appliquer cette propriété, il faut bien s'assurer que les bornes «sont dans le bon sens», c'est-à-dire que $a \leqslant b$.

Démonstration. 1. Si F (respectivement G) est une primitive de f (resp. de g), alors $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$. Et donc

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,dt = [\lambda F(t) + G(t)]_a^b = \lambda F(b) + G(b) - (\lambda F(a) + G(a)$$
$$= \lambda(F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)\,dt.$
3. $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$
4. Si $f = F'$ est positive, alors F est croissante, et donc $F(b) \geqslant F(a) \Leftrightarrow F(b) - F(a) \geqslant 0$.
5. Si $f \leqslant g$, alors $g - f \geqslant 0$. Et par le point précédent,

$$\int_a^b (g(t) - f(t))\,dt \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(t)\,dt \geqslant \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

Exemple 8.8 **Un équivalent de la série harmonique**

Pour $n \geqslant 1$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, et soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.
Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, f est décroissante sur $[k, k+1]$, de sorte que pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$.
Et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dt.$$

Mais $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt = f(k+1)(k+1-k) = f(k+1)$ et de même $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k)$.
En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, on arrive donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ à

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Mais par la relation de Chasles, le terme médian est $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^n = \ln(n)$.

Et donc on a $H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \dfrac{1}{n}$.

Soit encore $\ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$. Ceci prouve déjà que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Mais de plus, on a $1 + \dfrac{1}{n\ln n} \leqslant \dfrac{H_n}{\ln n} \leqslant \dfrac{1}{\ln n} + 1$, et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1.$$

Interprétation

Les deux suites H_n et $\ln n$ tendent vers $+\infty$ à «la même vitesse».
Nous dirons bientôt qu'elles sont équivalentes.

Théorème 8.9 (Théorème fondamental de l'analyse, version 2) : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Remarque

Cette version du théorème fondamental de l'analyse est plus forte que la version 1, mais elle nécessite tout de même de savoir que la version 1 est vraie, puisqu'elle suppose l'existence de primitives de f.

Démonstration. Soit G une primitive de f. Alors pour tout $x \in I$, $F(x) = [G(t)]_a^x = G(x) - G(a)$, et donc la dérivée de F est $x \mapsto G'(x) = f(x)$.
Donc F est une primitive de f, et on a clairement $F(a) = 0$.
Enfin, si F_1 est une autre primitive de f sur I, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $F_1 = F + \lambda$.
Et si $F_1(a) = F(a) = 0$, alors $\lambda = 0$, de sorte que $F_1 = F$. Donc F est bien l'**unique** primitive de f qui s'annule en a. □

Ce théorème, intéressant pour des considérations théoriques ne permet pas en pratique de calculer des primitives qu'on ne saurait pas déjà calculer.
Par exemple, il permet d'affirmer qu'une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ est $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, mais ne nous aide pas réellement à calculer cette intégrale.

8.1.4 Primitives usuelles

Vous connaissez déjà un certain nombre de dérivées. Et par conséquent, vous connaissez déjà un certain nombre de primitives !
Le tableau suivant résume les primitives qu'il faut connaître par cœur, ainsi que les intervalles sur lesquels elles sont valables.

Fonction $x \mapsto \cdots$	Primitive $x \mapsto \cdots$	Intervalle
$x^n, n \in \mathbf{N}$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$
$x^n, n \in \mathbf{Z}, n \leqslant -2$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbf{R}_+^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbf{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbf{R}$

$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbf{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbf{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1-\mathrm{th}^2(x)$	$\mathrm{th}(x)$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(x)$	$]-1,1[$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arccos}(x)$	$]-1,1[$

Il est plus que conseillé de les connaître sans la moindre hésitation, mais rappelons, à toutes fins utiles, qu'il est aisé de vérifier qu'une primitive est correcte : il suffit de la dériver[7].

[7] Ce qui suppose bien entendu que vous connaissiez vos formules de dérivation !

Nous savons également dériver certaines composées, ce qui nous donne encore d'autres formules de primitives :

Proposition 8.10 : *Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Alors*

- *une primitive de $u'u^n, n \in \mathbf{N}$ est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$*
- *une primitive de $u'e^u$ est e^u*
- *si u ne s'annule pas sur I, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln(|u|)$*
- *si $u > 0$ sur I, et si $\alpha \neq -1$ alors une primitive de $u'u^\alpha$ est $\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$*

Exemples 8.11

- Une primitive de $x \mapsto xe^{-x^2}$ est $\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$.
- Une primitive de $x \mapsto e^{-x-e^{-x}} = e^{-x}e^{-e^{-x}}$ est $x \mapsto -e^{-e^{-x}}$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$.

Proposition 8.12 : *Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et soit F une primitive de f. Alors $x \mapsto \dfrac{1}{a}F(ax+b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax+b)$.*

Démonstration. Il suffit de dériver. □

Exemple 8.13

Pour $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(ax+b)^2+1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}(ax+b)$.
Par exemple, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{4x^2+2x+2} = \dfrac{1}{(2x+1)^2+1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(2x+1)$.

Toutes les formules ci-dessus proviennent en fait de la formule de dérivation d'une composée. Plus généralement, nous disposons du résultat suivant :

Proposition 8.14 : *Soient u et φ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\varphi \circ u$ soit bien définie. Alors une primitive de $u' \times (\varphi' \circ u)$ est la fonction $\varphi \circ u$.*

Démonstration. Encore une fois, il suffit de dériver. □

Exemple 8.15

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+x(\ln x)^2} \end{array} \right.$.
Alors on a $f(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$.
Autrement dit, si $u : x \mapsto \ln(x)$ et $\varphi : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$, on a $f = u' \times (\varphi' \circ u)$, de sorte qu'une primitive de F est $\varphi \circ u : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\ln(x))$.

Enfin, ajoutons trois nouvelles primitives qu'il faudra connaître :

Proposition 8.16 :

1. *Une primitive de* $\tan$ *sur tout intervalle de la forme* $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbf{Z}$ *est* $x \mapsto -\ln(|\cos x|)$.
2. *Une primitive de* th *est* $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$.
3. *Une primitive de* $\ln$ *sur* $\mathbf{R}_+^*$ *est la fonction* $x \mapsto x\ln(x) - x$.

Démonstration. Les deux premières découlent du fait que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos} = -\dfrac{\cos'}{\cos}$, que $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} = \dfrac{\operatorname{ch}'}{\operatorname{ch}}$ et qu'on sait intégrer $\dfrac{u'}{u}$.
Pour la troisième, il suffit de constater que la dérivée de $x \mapsto x\ln(x) - x$ est

$$x \mapsto x\frac{1}{x} + \ln(x) - 1 = \ln(x).$$

□

8.1.5 La notation $\displaystyle\int f(t)\,dt$

Nous noterons dans la suite $\displaystyle\int f(t)\,dt$ pour désigner l'ensemble des primitives de la fonction f, qui, rappelons-le, diffèrent toutes d'une constante.
Par exemple, nous noterons $\displaystyle\int \ln(t)\,dt$ pour désigner toutes les fonctions de la forme $t \mapsto t\ln(t) - t + C$, $C \in \mathbf{R}$, ou encore $\displaystyle\int x^2\,dx$ pour désigner les $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + C$, $C \in \mathbf{R}$.
De manière un peu abusive, nous écrirons $\displaystyle\int \ln(t)\,dt = t\ln(t) - t + C$, $C \in \mathbf{R}$ au lieu de $\displaystyle\int \ln(t)\,dt = \{t \mapsto t\ln(t) - t + C, C \in \mathbf{R}\}$.

8.2 Intégrales classiques

8.2.1 Intégration des fractions rationnelles

Pour intégrer des fractions rationnelles, on utilise la décomposition en éléments simples. Les éléments simples de première espèce ne posent pas de vraies difficultés : une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^n} = (x-a)^{-n}$ est

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{-n+1}(x-a)^{-n+1} = \dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{si } n \geqslant 2 \\ \ln|x-a| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Ceci permet déjà de calculer des primitives d'un certain nombre de fractions rationnelles.

Exemple 8.17

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2(x^2+x-2)}$.
Alors la décomposition en éléments simples de f est

$$f(x) = -\frac{3}{4}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{12}\frac{1}{x+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-1}.$$

Et donc une primitive[8] de f est $x \mapsto -\dfrac{3}{4}\ln(|x|) + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{12}\ln(|x+2|) + \dfrac{2}{3}\ln(|x-1|)$.

Détails
Les racines de x^2+x-2 sont -2 et 1.

[8] Valable sur chacun des intervalles du domaine de définition de f.

En revanche, l'intégration des éléments simples de deuxième espèce est un peu plus délicate. Il faudra faire appel à la mise sous forme canonique des polynômes de degré 2 et se souvenir que nous savons intégrer :

- $\dfrac{u'}{u}$ en $\ln(|u|)$
- $\dfrac{1}{(ax+b)^2+1}$ en $\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}(ax+b)$.

Exemples 8.18

- Cherchons une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+3}$.
On a alors
$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{(x+1)^2}{2}+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}.$$
Donc une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$.
- Cherchons une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-x+1}$.
On a alors
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}. \end{aligned}$$
À présent, nous sommes capables de calculer une primitive de chacun de ces termes, et donc une primitive de f est
$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Méthode
Pour trouver des primitives des expressions de la forme $\dfrac{dx+e}{ax^2+b+c}$, on s'arrange pour écrire cette expression comme combinaison de $\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$ (qui s'intègre en $\ln(|ax^2+bx+c|)$) et de $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ (voir ci-dessus).

Bien qu'il soit possible[9] de donner des formules générales pour une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{a^2+bx+c}$, il est totalement inutile de les apprendre, et mieux vaut savoir refaire des raisonnements semblables à ceux ci-dessus.

[9] Certains ouvrages disponibles dans le commerce donnent d'ailleurs ces formules.

Nous ne dirons rien de l'intégration des éléments simples du type $\dfrac{ex+f}{(ax^2+bx+c)^n}$ pour $n \geqslant 2$.

8.2.2 Intégration des polynômes trigonométriques

Pour intégrer des fonctions qui sont composées de produits de sinus et de cosinus, on commence par linéariser ces expressions (généralement en utilisant l'exponentielle complexe).

Exemple 8.19

Soit $f : x \mapsto \cos^3(x) + 2\sin^2(2x)\cos(3x)$. Alors

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{3ix}\right) = \frac{\cos(3x)}{4} + \frac{3}{4}\cos(x).$$

De même

$$\begin{aligned}2\sin^2(2x)\cos(3x) &= 2\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left(e^{4ix}-2+e^{-4ix}\right)\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\\&= -\frac{1}{4}\left(e^{7ix}+e^{-7ix}-2e^{3ix}-2e^{-3ix}+e^{ix}+e^{-ix}\right)\\&= -\frac{1}{2}\left(\cos(7x)-2\cos(3x)+\cos(x)\right).\end{aligned}$$

Et donc une primitive de f est

$$x \mapsto \frac{5\sin(3x)}{12} + \frac{\sin(x)}{4} - \frac{\sin(7x)}{14}.$$

8.3 Intégration par parties et changement de variable

8.3.1 Intégration par parties

⚠ Si la somme d'une primitive de f et d'une primitive de g est une primitive de $f+g$, il n'est absolument pas vrai que le produit de deux primitives soit une primitive de $f \times g$, tout simplement car la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

La formule $(uv)' = u'v + uv'$ nous permet tout de même de trouver des primitives de fonctions de la forme $u'v+uv'$, mais en pratique il est assez rare[10] de reconnaître directement des fonctions de cette forme, et nous utiliserons plutôt le résultat suivant :

[10] Et difficile.

Théorème 8.20 (Intégration par parties) : *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

Démonstration. Une primitive de $u'v+uv'$ est la fonction uv. Et donc

$$\int_a^b (u'(t)v(t)+u(t)v'(t))\,dt = [u(t)v(t)]_a^b \Leftrightarrow \int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

□

Exemples 8.21

► Calculons $I = \int_1^e t\ln(t)\,dt$.

Posons alors $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = t$, de sorte que $v(t) = \frac{t^2}{2}$ et $u'(t) = \frac{1}{t}$.
Alors u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1, e]$ et donc

$$\int_1^e t\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}\,dt = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

► Soit $I = \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,dt$.

Alors en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \operatorname{Arctan} t$, ce qui nous donne $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, il vient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,dt = [t\operatorname{Arctan}(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \\ &= \operatorname{Arctan}(1) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Astuce

Lorsqu'on n'a pas directement affaire à un produit, on peut toujours en faire apparaître un en notant que $v = 1 \times v$.

► Calculons $I = \int_0^\pi e^{-2t}\cos(t)\,dt$.

Une première intégration par parties, avec $u(t) = e^{-2t}$ et $v'(t) = \cos(t)$ nous donne alors

$$I = [e^{-2t}\sin(t)]_0^\pi + 2\int_0^\pi e^{-2t}\sin(t)\,dt = 2\int_0^\pi e^{-2t}\sin(t)\,dt.$$

Procédons de nouveau à une intégration par parties, en posant cette fois $u(t) = e^{-2t}$ et $v'(t) = \sin(t)$:

$$\int_0^\pi e^{-2t}\sin(t)\,dt = [-e^{-2t}\cos(t)]_0^\pi - 2\int_0^\pi e^{-2t}\cos(t)\,dt = e^{-2\pi}+1-2\int_0^\pi e^{-2t}\cos(t)\,dt.$$

Et donc nous avons la relation

$$I = 2(e^{2\pi}+1) - 2I \Leftrightarrow 5I = 2e^{2\pi}+2 \Leftrightarrow I = \frac{2e^{2\pi}+2}{5}.$$

☠ Danger !

S'il est tout à fait possible d'utiliser plusieurs fois de suite l'intégration par parties, on prendra garde, lors de la seconde intégration par parties, de ne pas dériver la fonction qu'on avait précédemment intégrée et vice-versa, faute de quoi on revient exactement à l'intégrale de départ. Ici, on a bien dérivé deux fois le terme en e^{2t}.
Si on l'avait intégré lors de la seconde intégration par parties, on en serait arrivé à la relation $I = I\dots$

► Enfin, il faut parfois ruser pour faire apparaître une intégration par parties. Par exemple,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 x\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= [\operatorname{Arctan}(x)]_0^1 + \left[\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(1) + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Il faut un peu d'intuition et d'habitude pour utiliser correctement l'intégration par parties, mais donnons quelques pistes :

1. il y a souvent plusieurs manières d'écrire une fonction comme un produit, pour faire une intégration par parties, il faut savoir dériver un des facteurs (ce qui n'est à peu près jamais un problème), mais il faut aussi savoir intégrer l'autre !
2. si jamais on sait intégrer les deux facteurs qui composent le produit, il faut aussi se demander si on saura calculer l'intégrale qui apparaîtra après l'intégration par parties

(le $\int u(t)v'(t)\,dt$ du théorème).

Exemple 8.22

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$. Alors on sait intégrer x^4 et on sait dériver e^{-x^2}.
Une intégration par parties sur ce principe nous donne alors

$$I = \left[\frac{x^4}{4}e^{-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 e^{-x^2}\,dx.$$

Malheureusement, cette seconde intégrale ne semble pas plus facile à calculer, bien au contraire. Sauf à refaire une intégration par parties sur le même principe qui va faire apparaître du $x^7e^{-x^2}$, etc, on ne va jamais s'en sortir...
D'un autre côté, il n'est pas question de dériver x^3, puisqu'on ne connaît pas de primitive de e^{-x^2}...
Mais on a également $x^3e^{-x^2} = x^2 \times xe^{-x^2}$. Et cette fois, nous savons intégrer xe^{-x^2} (en $-\dfrac{e^{-x^2}}{2}$), et bien entendu dériver x. Alors

$$I = \left[-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{e^{-1}}{2} + \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^1 = -e^{-1} + \frac{1}{2}.$$

Notons que le théorème d'intégration par parties n'est pas cantonné au calcul d'intégrales, et sert aussi au calcul de primitives sous la forme suivante :

Proposition 8.23 : *Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, alors*

$$\int u'(t)v(t)\,dt = uv - \int u(t)v'(t)\,dt.$$

Exemple 8.24

$$\int x\cos(x)\,dx = [x\sin(x)] - \int \sin(x)\,dx = [x\sin x] + [\cos x] = x\sin(x) + \cos(x) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

L'idée est que, d'après le théorème fondamental de l'analyse, il nous suffit de savoir calculer $\int_0^x t\cos(t)\,dt$, qui sera **une** primitive de $t \mapsto t\cos(t)$.
Or, lorsqu'on réalise notre intégration par parties sur le segment $[0, x]$, x étant fixé, il vient

$$\int_0^x t\cos(t)\,dt = [t\sin(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t)\,dt = x\sin(x) - \underbrace{0\sin(0)}_{=\text{constante}} - \int_0^x \sin(t)\,dt.$$

Autrement dit, une primitive de $t \mapsto t\cos t$ (qui est ici notre $u'v$ du théorème) est égale à la primitive uv moins une primitive (ici celle qui s'annule en 0) de $t \mapsto \sin(t)$ (ici notre uv').
Remplacer 0 par n'importe quoi d'autre ne ferait que changer les constantes d'intégration, ce qui n'a aucune importance lorsqu'on cherche toutes les primitives et pas une[11] en particulier.

[11] Par exemple celle qui s'annulerait en π.

8.3.2 Changement de variable

Théorème 8.25 (Formule de changement de variable) : *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et soit f une fonction continue sur $\varphi(I)$. Alors pour $(a,b) \in I^2$,*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

Notation

$\varphi(I)$ désigne l'ensemble des images par φ des éléments de I, c'est-à-dire

$$\varphi(I) = \{\varphi(x),\ x \in I\}.$$

Démonstration. Notons F une primitive de f. Alors $F \circ \varphi$ est une primitive[12] de $\varphi' \times (f \circ \varphi)$, de sorte que

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = [F(\varphi(x))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

□

[12] Il suffit de dériver pour s'en convaincre.

La formule de changement de variable peut s'utiliser dans les deux sens : pour transformer une intégrale de la forme $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$ en $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, ou le contraire.
Commençons par le premier cas.

Exemple 8.26

Considérons $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\,dx = 2\int_0^2 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = 2\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\,dx.$
Si on pose alors $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\varphi : x \mapsto e^{-x}$, alors f est continue sur $[1, e^{-2}]$ et φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,2]$, donc le théorème de changement de variable s'applique et

$$I = 2\int_0^2 \varphi'(x)f(\varphi(x))\,dx = 2\int_1^{e^{-2}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = [2\operatorname{Arctan}(t)]_1^{e^{-2}} = 2\operatorname{Arctan}\left(e^{-2}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Notons que sur cet exemple, il était tout à fait possible de trouver directement une primitive de la fonction de départ, par exemple $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(e^{-x})$.
Le théorème de changement de variable nous amène à cette même primitive, sans avoir besoin de la reconnaître dès le départ.

Remarque

Si le changement de variable fonctionnait bien ici, c'est aussi car nous avions choisi un changement de variable judicieux !
Prendre $\varphi(x) = \sin^2(2x)$ ne nous aurait pas aidé.
Donc le théorème de changement de variable dispense d'intuition... si on à l'intuition du bon changement de variable !

Plus généralement, ce premier cas du changement de variable est celui où l'on se donne la «nouvelle variable» (c'est-à-dire celle de l'intégrale à laquelle on souhaite aboutir) en fonction de l'«ancienne variable» (celle de l'intégrale de départ).
Pour le dire autrement, on suppose que l'intégrale que l'on cherche à calculer au départ est $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.
On procède alors comme suit, si x est l'«ancienne variable», et que $t = \varphi(x)$ est la nouvelle :

1. on dérive t en fonction de x : $\dfrac{dt}{dx} = \varphi'(x)$, ce qu'on note[13] $dt = \varphi'(x)\,dx$.
2. on remplace tous les t de l'intégrale de départ par des $\varphi(x)$ et en même temps le dt par $\varphi'(x)\,dx$. **Il n'est pas question d'écrire une intégrale qui mélangerait les deux variables x et t.**
3. dans le même temps, on change les bornes a et b en $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, ce qui revient à chercher quelles valeurs prend la nouvelle variable lorsque l'ancienne prenait ses valeurs extrêmes a et b.

[13] Et il s'agit là uniquement d'une notation pratique, mais sans signification mathématique précise, bien que vous ayez probablement reconnu le lien avec les notations des physiciens.

Le plus pratique avec cette méthode est qu'elle ne nécessite pas d'expliciter la fonction f à laquelle on applique le changement de variable.

Exemple 8.27

Reprenons l'exemple précédent : $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}$, en posant $t = e^{-x}$.

Alors $dt = -e^{-x}\,dx$ et lorsque x vaut 0, $t = 1$, et lorsque x vaut 2, $t = e^{-2}$. Ainsi, par changement de variable, on a

$$\int_0^2 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} e^{-x}\,dx = -\int_1^{e^{-2}} \frac{1}{t}\,\frac{1}{\frac{1}{t} + t}\,dt = -\int_1^{e^{-2}} \frac{dt}{1+t^2} = \dots$$

La fonction f à laquelle nous avons appliqué le changement de variable n'était pas visible directement dans l'intégrale de départ, mais elle est automatiquement apparue en cours de calcul.

Mais ce n'est pas là[14] que réside la puissance de la formule du changement de variable, mais plutôt lorsqu'on l'utilise dans «l'autre sens», c'est-à-dire lorsque l'intégrale dont on dispose au départ est $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$.

[14] Bien que ce soit souvent un outil précieux lorsqu'on ne «devine» pas directement la bonne primitive.

Exemple 8.28

Cherchons à calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt$, en à l'aide du changement de variable $t = \cos x$.

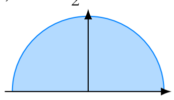
Remarque On se donne ici l'ancienne variable (t) en fonction de la nouvelle (x).

Autrement dit, en posant $\varphi(x) = \cos(x)$, pour $x \in [0, \pi]$. On a alors $-1 = \varphi(\pi)$ et $1 = \varphi(0)$.
Et donc par le théorème de changement de variable, où ici $f : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt &= \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 x}\,\underbrace{(-\sin x)}_{=\varphi'(x)}\,dx = \int_0^{\pi} |\sin x| \sin x\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Remarquons qu'il y avait plusieurs choix pour les bornes, nous avons ici choisi 0 et π, mais nous aurions pu prendre 2π et 3π, ou pourquoi pas -2π et 9π. Bien entendu, cela conduit au même résultat final.

Géométriquement Ce résultat n'a rien de surprenant, si on se rappelle que pour $y \geqslant 0$, on a $y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Ainsi, le graphe de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est la moitié du cercle trigonométrique située au dessus de l'axe des abscisses.
Donc l'intégrale est la moitié de l'aire du cercle trigonométrique, donc $\frac{\pi}{2}$.



-1 $\quad$ 1

En pratique, on a rarement besoin d'expliciter φ, et connaître par cœur la formule du changement de variable n'est que de peu d'utilité.

Exemple 8.29

Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{e^u+1}$ à l'aide du changement de variable $y = e^u$. Autrement dit, en posant $\varphi(u) = e^u$.
Alors $\dfrac{dy}{du} = e^u \Leftrightarrow dy = e^u\,du$. Donc il vient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{du}{e^u+1} &= \int_0^1 \frac{e^u\,du}{e^u(e^u+1)} \\ &= \int_1^e \frac{dy}{y(y+1)} \\ &= \int_1^e \frac{dy}{y} - \int_1^e \frac{dy}{y+1} \\ &= [\ln(y)]_1^e - [\ln(1+y)]_1^e = 1 + \ln(2) - \ln(e+1).\end{aligned}$$

On s'arrange pour faire apparaître $e^u\,du$.

Explication C'est le théorème de changement de variable appliqué avec $f : y \mapsto \dfrac{1}{y(y+1)}$.

Dans des cas comme celui-ci où le changement de variable est bijectif, il est possible de «l'inverser» avant de travailler avec les «infinitésimaux» du et dy.

Ainsi, on a $y = e^u \Leftrightarrow u = \ln(y)$. Et donc $du = \dfrac{dy}{y}$, de sorte qu'en «remplaçant» directement tous les u par des $\ln(y)$ **et** le du par un $\dfrac{dy}{y}$ **et** en changeant correctement les bornes, on obtient bien $\displaystyle\int_1^e \frac{dy}{y(e^{\ln(y)}+1)} = \int_1^e \frac{dy}{y(y+1)}$.
Pour le dire autrement : nous avons appliqué le théorème de changement de variable aux fonctions $f : t \mapsto \dfrac{1}{e^t+1}$ et $\varphi : x \mapsto \ln(x)$.

8.3.3 Application au calcul de primitives

Il est également possible d'utiliser le théorème de changement de variable pour trouver des primitives.

Exemple 8.30

Cherchons des primitives de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}$ à l'aide du changement de variable $x = \cos t$.
On a, en notant que $dx = -\sin t\, dt$,

$$\int \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{Arctan}(x) + C = -\operatorname{Arctan}(\cos t) + C.$$

Dans le cas où l'on donne l'ancienne variable en fonction de la nouvelle, il faudra alors prendre garde d'utiliser un changement de variable bijectif, et de penser à revenir à la variable de départ.

Exemple 8.31

Calculons une primitive sur $[-1, 1]$ de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ à l'aide du changement de variable $t = \cos x$.
On a alors $dt = -\sin x\, dx$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-t^2}\,dt &= \int \sin^2 x\,dx = \int \frac{\cos(2x)-1}{2}\,dx = -\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C\\ &= -\frac{\operatorname{Arccos}(t)}{2} + \frac{\sin(2\operatorname{Arccos}(t))}{4} + C = -\frac{\operatorname{Arccos}(t)}{2} + \frac{\cos(\operatorname{Arccos} t)\sin(\operatorname{Arccos} t)}{2} + C\\ &= -\frac{\operatorname{Arccos}(t)}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} + C.\end{aligned}$$

Notons que puisque $\operatorname{Arccos}(t) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(t)$, on a également

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(t) + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} + C,$$

le $\dfrac{\pi}{2}$ étant «caché» dans la constante d'intégration.

L'idée sous-jacente au calcul qui précède est que[15] trouver une primitive de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ revient à être capable de calculer $\displaystyle\int_0^u \sqrt{1-t^2}\,dt$, pour tout $u \in [-1, 1]$.
Mais alors nous pourrions utiliser «proprement» le théorème de changement de variable pour obtenir

$$\int_0^u \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{\operatorname{Arccos}(u)}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \left[\frac{\sin(2x)}{4} - \frac{x}{2}\right]_{\operatorname{Arccos}(u)}^{\pi/2} = \cdots$$

La borne fixée, que nous avons choisie ici égale à 0 n'a alors aucune importance puisque changer cette borne ne fera que changer la constante d'intégration.

[15] C'est le théorème fondamental de l'analyse !

8.4 Dérivation/intégration des fonctions à valeurs complexes

Il est également possible de considérer des fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$.
Par exemple la fonction $t \mapsto te^{(i+1)t} + (1+2i)t^2$.

Définition 8.32 – Si $f : I \to \mathbf{C}$ est une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$, on note $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sa partie réelle et sa partie imaginaire, c'est-à-dire les deux fonctions de I dans $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \mathrm{Re}(f)(x) + i\,\mathrm{Im}(f)(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \\ \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x)) \end{cases}$$

Exemple 8.33

Si $f(t) = te^{(i+1)t} + (1+2i)t^2 = te^te^{it} + (1+2i)t^2 = te^t(\cos t + i\sin t) + t^2 + 2it^2$ et donc

$$\mathrm{Re}(f)(t) = te^t\cos t + t^2 \text{ et } \mathrm{Im}(f)(t) = te^t\sin t + 2t^2.$$

⚠ Attention ! Pas de i dans $\mathrm{Im}(f)$: il s'agit d'une fonction à valeurs **réelles**.

8.4.1 Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Définition 8.34 – Soit $f : I \to \mathbf{C}$. On dit que f est dérivable si les deux fonctions[16] $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables.
On note alors $f' = \mathrm{Re}(f)' + i\,\mathrm{Im}(f)'$.

[16] À valeurs réelles.

Puisque la partie réelle (resp. imaginaire) d'une somme est la somme des parties réelles (resp. imaginaires), il est facile de se convaincre que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.
En revanche, il faut travailler davantage pour prouver que d'autres formules connues dans le cas réel restent valables en complexe.

Proposition 8.35 : *Soient u, v deux fonctions dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbf{C}$. Alors :*
1. *la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$*
2. *si v ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable, et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$*

Démonstration.
1. Notons u_1, u_2 (resp. v_1, v_2) les parties réelles et imaginaires de u (resp. de v).
Alors $uv = (u_1 + iu_2) + (v_1 + iv_2) = (u_1v_1 - u_2v_2) + i(u_1v_2 + u_2v_1)$, qui se dérive en

$$\begin{aligned}(uv)' &= u_1'v_1 + u_1v_1' - u_2'v_2 - u_2v_2' + i(u_1v_2' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_2'v_1) \\ &= u_1'(v_1 + iv_2) + v_1'(u_1 + iu_2) + iu_2'(v_1 + iv_2) + iv_2'(u_1 + iu_2) \\ &= (u_1' + iu_2')(v_1 + iv_2) + (u_1 + iu_2)(v_1' + iv_2') \\ &= u_v + uv'.\end{aligned}$$

2. Nous pourrions de même séparer partie réelle et partie imaginaire, mais en a-t-on vraiment envie ?
Notons plutôt que $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u\overline{v}}{|v|^2} = u \times \overline{v} \times \dfrac{1}{|v|^2}$.
La fonction $\dfrac{1}{|v|^2}$ est alors à valeurs réelles, et elle est dérivable car v l'est[17].
Mais alors $u = \left(\dfrac{u}{v}\right) \times v$ de sorte que

$$u' = \left(\frac{u}{v}\right)' v + \left(\frac{u}{v}\right) v' \Leftrightarrow \left(\frac{u}{v}\right)' v = \frac{u'v - uv'}{v}$$

[17] Et qu'on peut exprimer facilement $\dfrac{1}{|v|^2}$ en fonction des parties réelles et imaginaires de v.

et donc $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

□

De même, si I et J sont deux intervalles de $\mathbf{R}$, si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{C}$ sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.
Il suffit pour le voir de remarquer que $\operatorname{Re}(g \circ f) = \operatorname{Re}(g) \circ f$, et que la même remarque vaut pour les parties imaginaires.
Il suffit alors de dériver des composées de fonctions réelles.

⚠ Attention !
Ici, f est une bien une fonction qui va de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, nous ne parlons pas de dériver des composées de fonction de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

Définition 8.36 – Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction telle que $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ soient continues. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbf{C}$, dérivable sur I et de dérivée f.

En particulier, pour trouver une primitive d'une fonction complexe, il suffit de déterminer une primitive de la partie réelle et une primitive de la partie imaginaire.
Le fait que la formule pour la dérivée d'un produit soit la même que pour les fonctions réelles implique que l'intégration par parties reste valable.

8.4.2 Dérivée de e^{φ}

Proposition 8.37 : *Soit $\varphi : I \to \mathbf{C}$ une fonction dérivable à valeurs complexes. Alors e^{φ} est dérivable, et $(e^{\varphi})' = \varphi' \times e^{\varphi}$.*

Démonstration. Notons $f = \operatorname{Re}(\varphi)$ et $g = \operatorname{Im}(\varphi)$, de sorte que $\varphi = f + ig$.
On a alors, pour tout $x \in I$,

$$e^{\varphi(x)} = e^{f(x)+ig(x)} = e^{f(x)}\left(\cos(g(x)) + i\sin(g(x))\right).$$

Et donc $\operatorname{Re}(e^{\varphi})(x) = e^{f(x)}\cos(g(x))$, qui est dérivable car produit de fonctions dérivables, et $\operatorname{Re}(e^{\varphi})'(x) = f'(x)e^{f(x)}\cos(g(x)) - e^{f(x)}g'(x)\sin(g(x))$.
De même, on a $\operatorname{Im}(e^{\varphi})'(x) = f'(x)e^{f(x)}\sin(g(x)) + e^{f(x)}\cos(g(x))$.
Et donc e^{φ} est dérivable, avec

$$\begin{aligned}(e^{\varphi})'(x) &= f'(x)e^{f(x)}\cos(g(x)) - e^{f(x)}g'(x)\sin(g(x)) + i\left(f'(x)e^{f(x)}\sin(g(x)) + e^{f(x)}\cos(g(x))\right)\\ &= e^{f(x)}\left((f'(x) + ig'(x))\left((\cos(g(x)) + i\sin(g(x))\right)\right) = e^{f(x)}\varphi'(x)e^{ig(x)} = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}.\end{aligned}$$

□

Exemple 8.38 Application au calcul de primitives

Cherchons une primitive de $t \mapsto e^{2t}\sin(t)$.
Nous savons que $e^{2t}\sin(t) = \operatorname{Re}(e^{2t}e^{it}) = \operatorname{Re}\left(e^{(2+i)t}\right)$.
Or, une primitive de $t \mapsto e^{(2+i)t}$ est $t \mapsto \frac{1}{2+i}e^{(2+i)t}$.
Sa partie imaginaire est donc une primitive de $t \mapsto e^{-2t}\sin(t)$.
Mais

$$\frac{1}{2+i}e^{(2+i)t} = \frac{2-i}{5}e^{(2+i)t} = \frac{e^{2t}}{5}(2-i)(\cos t + i\sin t).$$

Sa partie imaginaire est donc

$$t \mapsto \frac{e^{2t}}{5}(2\sin t - \cos(t)).$$

Ainsi, $\int e^{2t}\sin(t)\,dt = \frac{e^{2t}}{5}(2\sin t - \cos t) + C$, $C \in \mathbf{R}$.