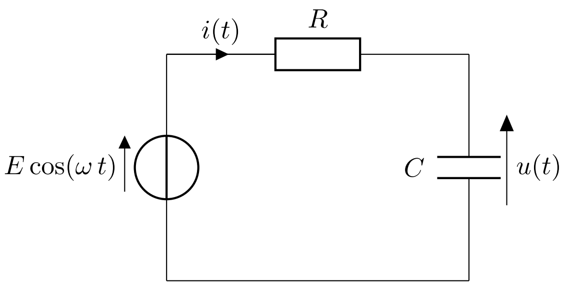
9

Équations différentielles linéaires et suites récurrentes linéaires

Exemple introductif : le circuit RC

Un circuit RC est un circuit formé d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C montés en série.
On ajoute un générateur de courant délivrant une tension sinusoïdale $E\cos(\omega t)$.
Sachant que le condensateur est déchargé à l'instant initial ($t = 0$), peut-on décrire l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur ?
La loi des mailles nous donne alors $u(t) + Ri(t) = E\cos(\omega t)$.
Mais aux bornes du condensateur, on a $i(t) = C\dfrac{du}{dt} = Cu'(t)$.
Et donc la tension u satisfait à l'équation $RCu'(t) + u(t) = E\cos(\omega t)$.
Cette équation suffit-elle à déterminer totalement l'évolution de u au cours du temps ?



Dans tout le chapitre, en l'absence de précisions, $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et I est un intervalle de $\mathbf{R}$.

9.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

9.1.1 Définition

Définition 9.1 – Soient a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, c'est trouver toutes les fonctions $y : I \to \mathbf{K}$, dérivables, et telles que

$$\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

On parle alors d'**équation différentielle linéaire du premier ordre.**

Remarques. ►L'équation différentielle est dite linéaire, car elle ne fait intervenir que $y'(t)$ et $y(t)$, et pas leurs puissances, ou leur exponentielle, ni quoi que ce soit d'autre.
Par exemple, $y'(t)^2 + e^{y(t)}t^2 = \ln(t)$ est une équation différentielle, mais qui n'est pas linéaire[1].
Et elle est dite du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée première de y (y') et pas ses dérivées secondes, troisièmes, etc.
► Une solution de $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ n'est pas seulement dérivable : elle est en plus $\mathscr{C}^1$ sur I. En effet, on a alors $y'(t) = b(t) - a(t)y(t)$, qui est continue car somme de fonctions continues.

[1] Vous reparlerez davantage de ce type d'équations en seconde année.

Exemple 9.2

$y'(t) - 2ty(t) = t^3$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
On note généralement les équations sous forme condensée : $y' - 2ty = t^3$, où il est alors sous-entendu que y est une fonction, et que t est la variable dont dépend la fonction.
Bien entendu, cette équation se note également $y' - 2xy = x^3$.

On rencontre souvent des équations sous la forme $c(t)y'(t) + d(t)y(t) = e(t) \quad (E)$.
Dans ce cas, on se ramène à une équation de la forme précédente en divisant par $c(t)$, ce qui nécessite de se placer sur un intervalle sur lequel c ne s'annule pas.
Sur un tel intervalle (E) est alors équivalente à $y'(t) + \dfrac{d(t)}{c(t)}y(t) = \dfrac{e(t)}{c(t)}$. On parle alors de la **forme normalisée** de l'équation (E).

Exemple 9.3

Considérons l'équation $ty'(t) - y(t) = \dfrac{1}{t}$.
Sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$, sur lesquels t ne s'annule pas, elle est équivalente à $y'(t) - \dfrac{1}{t}y(t) = \dfrac{1}{t^2}$.

Définition 9.4 – Lorsque la fonction b est la fonction nulle, on dit que l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ est une équation homogène.
Et de manière générale, si $(E) \quad : y'(t)+a(t)y(t) = b(t)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, on dit que l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ est l'équation homogène associée à (E). Dans la suite, nous la noterons (E_0).

9.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Soit $(E) \quad : \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, et soit (E_0) l'équation homogène associée.

Notons $\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{D}(I, \mathbf{K}) : \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)\}$ l'ensemble des solutions de (E) et de même, notons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).

Notation
La notation sera en fait introduite plus tard, mais $\mathcal{D}(I, \mathbf{K})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Proposition 9.5 : *L'ensemble $\mathcal{S}_0$ contient la fonction nulle, et il est stable par combinaisons linéaires. Cela signifie que pour tout $(y_1, y_2) \in \mathcal{S}_0^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}$, $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathcal{S}_0$.*

Démonstration. Il est clair que la fonction nulle est dérivable, et que si on la note f, alors pour tout $t \in I$, $f'(t) + a(t)f(t) = 0 + 0 = 0$, donc $f \in \mathcal{S}_0$.
Soient $u, v \in \mathcal{S}_0$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Alors $\lambda u + v$ est dérivable sur I car somme de fonctions dérivables, et pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}(\lambda u + \mu v)'(t) + a(t)(\lambda u(t) + \mu v(t)) &= \lambda u'(t) + \mu v'(t) + \lambda a t(t)u(t) + \mu a(t)v(t) \\ &= \lambda \underbrace{(u'(t) + a(t)u(t))}_{=0} + \mu \underbrace{(v'(t) + a(t)v(t))}_{=0} = 0.\end{aligned}$$

Et donc $\lambda u + \mu v$ est dans $\mathcal{S}_0$. □

Proposition 9.6 : *Soit $y_1 \in \mathcal{S}$. Alors une fonction $y \in \mathcal{D}(I, \mathbf{K})$ est solution de (E) si et seulement si $y - y_1 \in \mathcal{S}_0$.*
Ainsi, on a $\mathcal{S} = \{y_1 + u,\ u \in \mathcal{S}_0\}$.

Autrement dit
Si y_1 est une solution particulière de (E), alors **toutes** les solutions de (E) sont la somme de cette solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.

Démonstration. Soit $y \in \mathscr{D}(I, \mathbf{R})$. Alors pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}(y-y_1)'(t) + a(t)(y-y_1)(t) &= y'(t) - y_1'(t) + a(t)y(t) - a(t)y_1'(t) \\ &= y'(t) + a(t)y(t) - (y_1'(t) + a(t)y_1(t)) = y'(t) + a(t)y(t) - b(t).\end{aligned}$$

Et donc on a $y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \Leftrightarrow (y-y_1)'(t) + a(t)(y-y_1)(t) = 0$.
Et donc $y \in \mathscr{S} \Leftrightarrow y - y_1 \in \mathscr{S}_0$.
Soit encore si et seulement si il existe $u \in \mathscr{S}_0$ tel que $y - y_1 = u \Leftrightarrow y = y_1 + u$.
Et donc $\mathscr{S} = \{y_1 + u, u \in \mathscr{S}_0\}$. □

Ce résultat est très important, puisqu'il nous dit que pour connaître toutes les solutions de (E), il suffit d'en trouver une seule, et de connaître toutes les solutions de (E_0).

9.1.3 Le principe de superposition

Lorsque le second membre se présente sous forme d'une somme de deux termes, on peut se contenter de résoudre deux équations plus simples :

Proposition 9.7 : *Soient b_1 et b_2 deux fonctions continues sur I. Soit y_1 une solution de $(E_1) : y'(t) + a(t)y(t) = b_1(t)$ et soit y_2 une solution de $(E_2) : y'(t) + a(t)y(t) = b_2(t)$.
Alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y'(t) + a(t)y(t) = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t)$.*

Démonstration. C'est un simple calcul : pour $t \in I$,

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) + a(t)(\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)) = \lambda(y_1'(t) + a(t)y_1(t)) + \mu(y_2'(t) + a(t)y_2(t)) = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t).$$

□

9.1.4 Solutions de l'équation homogène

Proposition 9.8 : *Soit (E_0) : $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ une équation différentielle linéaire homogène, et soit A une primitive de a sur I.
Alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbf{K}$.*

Nbe. de solutions
Une équation homogène possède donc toujours une infinité de solutions.

Démonstration. Commençons par prouver que les fonctions de la forme $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbf{K}$ sont solutions de (E_0).
On a alors pour tout $t \in I$, $y_\lambda'(t) = -a(t)e^{-A(t)}$, de sorte que

$$y_\lambda'(t) + a(t)y_\lambda(t) = -a(t)e^{-A(t)} + a(t)^{-A(t)} = 0.$$

Raisonnement
Attention : à ce stade, nous avons prouvé que toutes les fonctions de la forme annoncée sont solutions, mais rien n'exclut qu'il y ait d'autres solutions.

Inversement, soit y une solution de (E_0), de sorte que $y'(t) = -a(t)y(t)$ et soit $z : t \mapsto y(t)e^{A(t)}$.
Alors z est dérivable sur I, et $\forall t \in I$, $z'(t) = y'(t)e^{A(t)} + y(t)a(t)e^{A(t)} = 0$.
Et donc z est constante sur I : il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $t \in I$,

$$y(t)e^{A(t)} = \lambda \Leftrightarrow y(t) = \lambda e^{-A(t)}.$$

Et donc toutes les solutions de (E_0) sont bien de la forme annoncée. □

Remarque. Notons qu'un bon moyen de se souvenir du résultat, est de remarquer que l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ peut également se mettre sous la forme $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = -a(t)$.
Mais nous reconnaissons là la dérivée de $t \mapsto \ln(y(t))$. Donc $\ln(y)$ est une primitive de $-a$, de sorte qu'il existe $C \in \mathbf{K}$ tel que $\ln(y(t)) = -A(t) + C$.
Et donc $y(t) = e^{-A(t)+C} = \underbrace{e^C}_{=\lambda} e^{-A(t)}$.

Ce raisonnement manque tout de même cruellement de rigueur[2] ! En effet, pour diviser par $y(t)$, encore faudrait-il s'assurer que y ne s'annule pas.
Et il faudrait une valeur absolue dans le ln. Et que dire du cas où y est à valeurs complexes ?

[2] Et n'est donc en aucun cas une preuve, tout au plus un moyen de retrouver rapidement le résultat si vous l'avez oublié.

Exemples 9.9

▸ **(Équations à coefficients constants[3])** Soit $a \in \mathbf{R}^*$, et soit l'équation différentielle (E_a) : $y' + ay = 0$. Alors ses solutions sont les $x \mapsto \lambda e^{-ax}$, $\lambda \in \mathbf{K}$.

[3] Les plus fréquemment rencontrées en physique.

▸ $y' - \frac{1}{t}y = 0$, sur $I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I = \mathbf{R}_-^*$.
Ici, $a(t) = -\frac{1}{t}$, de sorte qu'on peut prendre $A(t) = -\ln(|t|)$, et donc les solutions sont les $t \mapsto \lambda e^{-A(t)} = \lambda|t|$, $\lambda \in \mathbf{K}$.

▸ $y' - \frac{1}{t(t+1)}y = 0$ sur $I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I =]-1, 0[$ ou $I =]-\infty, -1[$.
Nous savons[4] que $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.
Et donc une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t(t+1)}$ est $t \mapsto \ln|t| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|$.
Et par conséquent, les solutions de (E_0) sont les $t \mapsto \lambda e^{\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|} = \lambda\left|\frac{t}{t+1}\right|$, $\lambda \in \mathbf{K}$.
Notons que sur chacun des intervalles de résolution, $\frac{t}{t+1}$ est de signe constant, et donc une fois l'intervalle choisi, il est possible de donner une expression des solutions ne contenant pas de valeur absolue, ce qui est toujours plus agréable.

[4] Ou le retrouvons facilement via une décomposition en éléments simples.

9.1.5 Recherche d'une solution particulière : la méthode de variation de la constante

Revenons à présent au cas général d'une équation (E) : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ avec second membre, et notons toujours A une primitive de a.

Grâce à la proposition 9.6 et à la proposition 9.8, il nous suffit de trouver **une** solution de (E) pour toutes les connaître. La méthode de variation de la constante permet de trouver une telle solution.
L'idée est de chercher une solution y sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$, où λ n'est plus une constante, mais une fonction dérivable.

La fonction y est alors dérivable et pour tout $t \in I$, $y'(t) = \lambda'(t)e^{-A(t)} - \lambda a(t)e^{-A(t)}$. Et donc y est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) &\Leftrightarrow \lambda'(t)e^{-A(t)} - \cancel{\lambda(t)a(t)e^{-A(t)}} + \cancel{a(t)\lambda(t)e^{-A(t)}} = b(t)\\ &\Leftrightarrow \lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t)\\ &\Leftrightarrow \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}.\end{aligned}$$

Et donc y est solution de (E) si et seulement si λ est une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$.
Mais de telles primitives existent, ce qui garantit bien qu'il existe au moins une[5] solution de (E).

[5] Et donc une infinité.

Exemples 9.10

▸ Considérons l'équation $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$ sur $I = \mathbf{R}_+^*$.
Nous avons déjà prouvé que les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda t$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)t$, où λ est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
Alors y est solution de (E) si et seulement pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\lambda'(t)t + \cancel{\lambda(t)} - \cancel{\frac{1}{t}\lambda(t)t} = \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \lambda(t) = \frac{1}{t^3}.$$

On peut donc par exemple[6] prendre $\lambda(t) = -\frac{1}{2t^2}$.
Et donc $y(t) = \frac{-1}{2t}$ est solution de (E).
Par conséquent, les solutions de (E) sont les fonctions qui sont sommes de la solution

[6] Il y a toujours une infinité de fonctions λ qui conviennent, mais notre but est d'en trouver une seule, donc autant prendre la plus simple possible.

particulière et d'une solution de l'équation homogène, donc ce sont les $t \mapsto \lambda t - \frac{1}{2t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

▶ Soit $(E) : y' - \frac{1}{t(t+1)} y = te^t$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
Alors nous savons déjà que l'équation homogène associée possède pour solutions les $t \mapsto \lambda \frac{t}{t+1}$.
Cherchons une solution de (E) sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)\frac{t}{t+1}$. Alors y est solution de (E) si et seulement si pour tout $t > 0$,

$$\lambda'(t)\frac{t}{t+1} + \cancel{\lambda(t)\frac{1}{(t+1)^2}} - \cancel{\frac{1}{t(t+1)}\frac{\lambda(t)t}{t+1}} = te^t \Leftrightarrow \lambda'(t) = (t+1)e^t.$$

Procédons alors à une intégration par parties[7] :

$$\int (t+1)e^t\,dt = [(t+1)e^t] - \int e^t\,dt = te^t.$$

Et donc une solution particulière est $t \mapsto \frac{t^2}{t+1}e^t$.
Et donc les solutions de (E) sont les $t \mapsto \frac{\lambda t}{t+1} + \frac{t^2}{t+1}e^t$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

[7] Bien entendu, tous les outils dont nous disposons pour le calcul de primitive sont susceptibles de nous aider à résoudre des équations différentielles : intégration par parties, changement de variable, utilisation des complexes, etc

9.1.6 Problèmes de Cauchy, ou équations avec conditions initiales

Nous venons de voir qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 possède toujours une infinité de solutions.
Pourtant, pour un système physique dont l'évolution est régie par une équation différentielle[8], il ne peut y avoir qu'une seule évolution possible, et donc une seule solution.
Ceci tient au fait qu'on connaît en général une **condition initiale**, par exemple l'état du système au temps $t = 0$.

[8] Par exemple la décharge d'un condensateur à travers une résistance.

Proposition 9.11 (Problème de Cauchy) : *Soit $t_0 \in I$ et soit $y_0 \in \mathbf{K}$. Alors il existe une unique solution à l'équation $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ vérifiant $y(t_0) = y_0$.*

Remarque
Notons qu'on n'a pas besoin de connaître nécessairement $y(0)$, et que la connaissance de l'état du système à n'importe quel instant suffit.

Démonstration. Nous venons de voir que les solutions de (E) sont de la forme $y : t \mapsto \lambda e^{-A(t)} + y_1(t)$, avec $\lambda \in \mathbf{K}$ et où y_1 désigne une solution particulière de l'équation.
En particulier, on a $y(t_0) = \lambda e^{-A(t_0)} + y_1(t_0)$ et donc

$$y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow \lambda = e^{A(t_0)}(y_0 - y_1(t_0)).$$

Et donc il existe bien une et une seule solution vérifiant $y(t_0) = y_0$. □

Les courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle (E) sont appelée **courbes intégrales de (E).**
Par exemple, les courbes intégrales de l'équation $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ sont les courbes représentatives des $t \mapsto \lambda t - \frac{1}{2t}$.
Ce que nous dit le résultat ci-dessus, c'est que pour tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$, il existe une et une seule courbe intégrale qui passe par ce point.
Et en particulier, deux courbes intégrales ne peuvent jamais se croiser.

9.1.7 Raccordement de solutions

En mettant sous forme normalisée une équation, on est parfois obligés de restreindre l'intervalle d'étude afin de ne pas effectuer de division par 0.
Par exemple, considérons l'équation $(E) : t^2y' - (2t-1)y = t^2$, d'inconnue $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable.
Pour utiliser ce qui a été dit précédemment, nous sommes obligés de passer par la forme

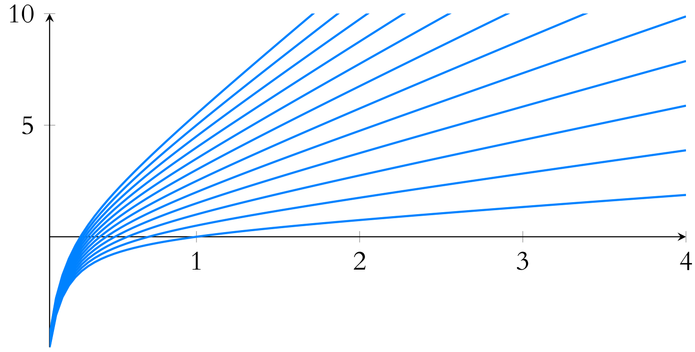


FIGURE 9.1 – Les courbes intégrales de l'équation $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$.

normalisée : $y' - \frac{2t-1}{t^2}y = 1$, sur $I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I = \mathbf{R}_+^*$.
Sur chacun de ces intervalles, une primitive de $t \mapsto \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}$ est $t \mapsto 2\ln(t) + \frac{1}{t} = \ln(t^2) + \frac{1}{t}$.
Et donc les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{\ln(t^2)+\frac{1}{t}}, = \lambda t^2 e^{1/t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Une fonction $y : t \mapsto \lambda(t)t^2e^{1/t}$ est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(t)t^2e^{1/t} + \cancel{(2t-1)e^{1/t}\lambda(t)} - \cancel{\frac{2t-1}{t^2}t^2e^{1/t}\lambda(t)} = 1 \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{e^{-1/t}}{t^2}$$

Et donc $\lambda(t) = -e^{-1/t}$ convient, de sorte que les solutions de (E) sur $I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I = \mathbf{R}_-^*$ sont les $t \mapsto t^2 + \lambda t^2 e^{1/t}$. Une fonction $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dérivable, et solution de (E) est donc telle qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $t \in \mathbf{R}^*$,

λ vs. μ
Il est important de noter que rien n'oblige λ et μ à être égaux : l'un vient de la résolution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$, l'autre de la résolution sur $\mathbf{R}_-^*$, et ces deux résolutions sont complètement disjointes et ne supposent rien de la résolution sur l'autre intervalle.

$$y(t) = \begin{cases} t^2 + \lambda t^2 e^{1/t} & \text{si } t > 0 \\ t^2 + \mu t^2 e^{1/t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

De plus, y doit être continue en 0. Il nous faut donc calculer $\lim\limits_{t \to 0^+} t^2 e^{1/t}$.
Pour cela procédons au changement de variable $x = 1/t$, de sorte que

$$\lim_{t \to 0^+} t^2 e^{1/t} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Et donc $\lim\limits_{t \to 0^+} \lambda t^2 e^{1/t} + t^2 = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$
Donc déjà, le seul moyen que y soit continue en 0 est que $\lambda = 0$ et donc que $y(0) = \lim\limits_{t \to 0^+} y(t) = 0$.
D'autre part, on a $\lim\limits_{t \to 0^-} t^2 e^{1/t} = 0$, et donc quelle que soit la valeur de μ, $\lim\limits_{t \to 0^-} \mu t^2 e^{1/t} = 0$.

Donc les solutions possibles de (E) sont parmi les $y_\mu : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^2 & \text{si } t > 0 \\ \mu t^2 e^{1/t} + t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ avec $\mu \in \mathbf{R}$.
Reste à vérifier si une telle fonction est bien dérivable en 0.
Il est clair que pour $h > 0$, $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{y_\mu(h) - y_\mu(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$, et si $h < 0$,

$$\frac{y_\mu(h) - y_\mu(0)}{h} = \frac{h^2e^{1/h} + \mu h^2 e^{1/h}}{h} = he^{1/h} + \mu h e^{1/h} \underset{h \to 0^-}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc y_μ est toujours dérivable en 0, avec $y_\mu'(0) = 0$.

Ainsi, les solutions de (E) sont exactement les y_μ, $\mu \in \mathbf{R}$.

Notons qu'on perd alors l'unicité dans le problème de Cauchy : il existe une infinité de solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ telles que $y(1) = 1$, puisque toutes les solutions de (E) le vérifient.
En revanche, il n'existe aucune solution de (E) vérifiant $y(1) = 2$.

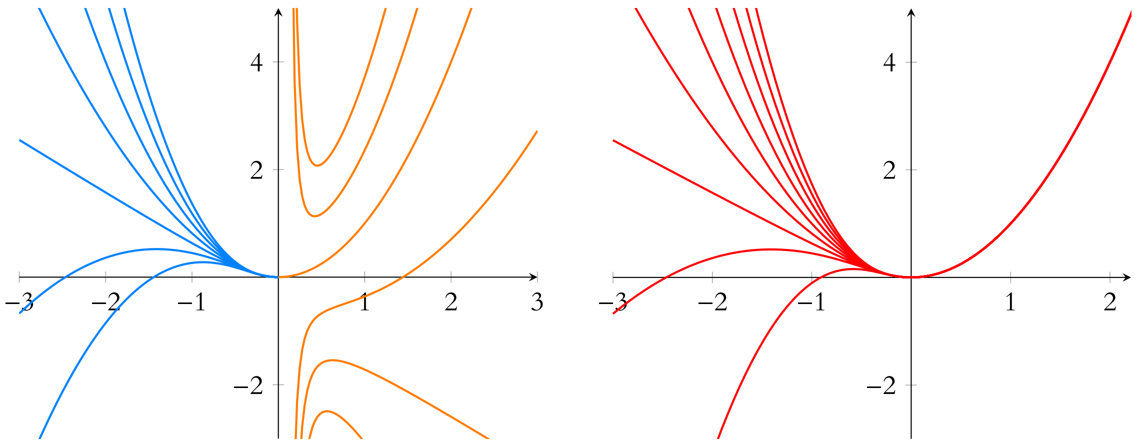


FIGURE 9.2 – En bleu (resp. orange) : les courbes intégrales des solutions sur $\mathbf{R}_-^*$ (resp. $\mathbf{R}_+^*$). Pour raccorder ces courbes en la courbe d'une fonction dérivable, il n'y a qu'un choix possible sur $\mathbf{R}_+^*$, et tous les choix possibles sur $\mathbf{R}_-^*$.
x

9.2 Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Dans cette partie, nous nous intéressons maintenant à des équations différentielles du type

$$(E) : \forall t \in I,\ y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

où a et b sont des **constantes**, c est une fonction continue sur I et où on cherche une solution y sous la forme d'une fonction deux fois dérivables. sur I
Une telle équation est appelée équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Notons comme précédemment que si y est solution, alors $y''(t) = c(t) - ay'(t) - by$ sera automatiquement continue[9].

[9] On dit alors que y est de classe $\mathscr{C}^2$.

Définition 9.12 – Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est dite homogène si son second membre est nul.
Si $(E) : y''(t) + ay'(t) + b = c(t)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, l'équation $(E_0) : y''(t) + ay'(t) + b = 0$ est appelée équation homogène associée à (E).

Définition 9.13 – On dit que le polynôme $r^2 + ar + b$ est le polynôme caractéristique associé à l'équation $y''(t) + ay'(t) + b = 0$.

9.2.1 Structure de l'ensemble des solutions

Soit (E) : $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$ une équation différentielle linéaire du second ordre, et soit (E_0) l'équation homogène associée.

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et de même, notons $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).
Nous retrouvons alors les mêmes résultats que pour les équations d'ordre 1, et les preuves des deux propositions qui suivent sont exactement les mêmes que dans le cas des équations d'ordre 1.

Proposition 9.14 : *L'ensemble (E_0) contient la fonction nulle, et il est stable par combinaisons linéaires. Cela signifie que pour tout $(y_1, y_2) \in \mathscr{S}^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathscr{S}_0$.*

Proposition 9.15 : *Soit $y_1 \in \mathcal{S}$. Alors une fonction y deux fois dérivable sur I est solution de (E) si et seulement si $y - y_1 \in \mathcal{S}_0$.*
Ainsi, on a $\mathcal{S} = \{y_1 + u,\ u \in \mathcal{S}_0\}$.

9.2.2 Résolution de l'équation homogène dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$

Notons r_1 et r_2 les deux racines[10] complexes du polynôme caractéristique de (E_0).

[10] Éventuellement confondues.

Proposition 9.16 :

- *Si $r_1 \neq r_2$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme*

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

- *Si $r_1 = r_2$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme*

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_1 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

Démonstration. Soit y une solution de (E_0).
Notons alors $z : t \mapsto e^{-r_1 t} y(t)$. La fonction z est alors deux fois dérivable car produit de fonctions deux fois dérivables, et on a $y(t) = e^{r_1 t} z(t)$.
Par conséquent pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{r_1 t}\left(r_1 z(t) + z'(t)\right) \\ y''(t) &= e^{r_1 t}\left(z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)\right). \end{aligned}$$

Et donc puisque y est solution de (E_0) :

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + b = 0 &\Leftrightarrow e^{r_1 t}\left(z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t) + ar_1 z(t) + z'(t) + bz(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{r_1 t}\left(z''(t) + (2r_1 + a)z'(t) + \underbrace{\left(r_1^2 + ar_1 + b\right)}_{=0} z(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{r_1 t}\left(z''(t) + (2r_1 + a)z'(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z''(t) + (2r_1 + a)z'(t) = 0 \end{aligned}$$

r_1 est racine du polynôme caractéristique.

Une exponentielle n'est jamais nulle.

Ainsi, z' est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$f' + (2r_1 + a)f = 0 \quad (E_0').$$

Souvenons nous que la somme des racines de l'équation caractéristique vaut $-a$. Et donc $2r_1 + a = 0$ si et seulement si $r_1 = r_2$.

Détails
Pour le dire autrement : l'équation possède une racine double si et seulement si cette racine est $\frac{-a}{2}$.

- Si $r_1 \neq r_2$, alors les solutions de (E_0') sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-(2r_1+a)t}$, $\lambda \in \mathbf{C}$.
  Et donc y est solution de E si et seulement si z' est la forme $t \mapsto \lambda e^{-(2r_1+a)t}$, $\lambda \in \mathbf{C}$.
  Soit si et seulement si z est de la forme $\lambda e^{-(2r_1+a)t} + \mu$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$.
  Et par conséquent, en multipliant par $e^{r_1 t}$, y est solution de (E) si et seulement si elle est de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{(-a-r_1)t} + \mu e^{r_1 t} = \lambda e^{r_2 t} + \mu e^{r_1 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

- Si $r_1 = r_2$. Alors $2r_1 + a = 0$, et donc y est solution de (E) si et seulement si $z''(t) = 0$.
  Soit si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ telle que $\forall t \in I$, $z'(t) = \lambda$ et donc si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $z(t) = \lambda t + \mu$.
  Et donc après multiplication par $e^{r_1 t}$, si et seulement si $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_1 t}$.

□

Exemple 9.17

Les solutions de $y'' - y' - 12y = 0$ sont les

$$t \mapsto \lambda e^{4t} + \mu e^{-3t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

Les solutions de $y'' + 4y' + 4y = 0$ sont les

$$t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-2t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

9.2.3 Résolution de l'équation homogène dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$

Théorème 9.18 :

- *Si le polynôme caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E_0) sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.*
- *Si le polynôme caractéristique possède une racine double[11] r, alors les solutions de (E_0) sont de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.*
- *Si le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$, alors les solutions de (E_0) sont de la forme $t \mapsto e^{rt}(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.*

[11] Nécessairement réelle.

Démonstration. Les deux premiers cas se traitent exactement comme dans le cas complexe. Concentrons nous donc sur le dernier cas : celui où le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$, avec $\omega \neq 0$.
Soit y une solution de (E_0). Alors y peut être vue comme une fonction complexe, et donc d'après les résultats précédents, il existe deux complexes λ_1 et μ_1 tels que

$$\forall t \in I,\ y(t) = \lambda_1 e^{(r+i\omega)t} + \mu_1 e^{(r-i\omega)t}.$$

Mais y étant à valeurs réelles, elle est égale à sa partie réelle :

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re}(y(t)) = \operatorname{Re}(\lambda_1)e^{rt}\cos(\omega t) - \operatorname{Im}(\lambda_1)e^{rt}\sin(\omega t) + \operatorname{Re}(\mu_1)e^{rt}\cos(-\omega t) - \operatorname{Im}(\mu_1)e^{rt}\sin(-\omega t) \\ &= (\operatorname{Re}(\lambda_1) + \operatorname{Re}(\mu_1))\, e^{rt}\cos(\omega t) + (\operatorname{Im}(\mu_1) - \operatorname{Im}(\lambda_1))\, e^{rt}\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Et donc en posant $\lambda = \operatorname{Re}(\lambda_1) + \operatorname{Re}(\mu_1) \in \mathbf{R}$ et $\mu = \operatorname{Im}(\mu_1) - \operatorname{Im}(\lambda_1)$, y est bien de la forme annoncée.

Inversement, on a $e^{rt}\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{rt}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{(r+i\omega)t} + e^{(r-i\omega)t}\right)$ qui est solution de (E_0) d'après ce qui a été dit dans le cas complexe.
Et de même, $t \mapsto e^{rt}\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{(r+i\omega)t} - e^{(r-i\omega)t}\right)$ est solution de (E_0).
Et donc toutes les fonctions[12] de la forme $t \mapsto \lambda e^{rt}\cos(\omega t) + \mu e^{rt}\sin(\omega t)$ sont solutions de (E_0). □

[12] C'est une conséquence de la proposition 9.14.

Exemple 9.19

$y'' + y = 0$. Le polynôme caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, qui possède i et $-i$ comme racines, de sorte que les solutions de l'équation homogène sont les

$$t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

9.2.4 Recherche d'une solution particulière

Le principe de superposition reste valable pour les équations d'ordre 2, avec la même preuve que pour les équations d'ordre 1 :

Proposition 9.20 : *Soient c_1 et c_2 deux fonctions continues sur I. Soit y_1 une solution de $(E_1) : y''(t)+ay'(t)+by(t) = c_1(t)$ et soit y_2 une solution de $(E_2) : y''(t)+ay'(t)+by(t) = c_2(t)$.*
Alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y''(t) + ay'(t) + by(t) = \lambda c_1(t) + \mu c_2(t)$.

Bien qu'il existe une méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2, celle-ci ne figure pas à notre programme, et nous ne saurons donc pas toujours résoudre une équation avec second membre.
Seuls certains cas particuliers sont à connaître.

Proposition 9.21 : *Soit $(E) : y''(t) + ay' + by = c(t)$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, où c est de la forme $t \mapsto \lambda e^{rt}$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe une solution de (E) sous la forme :*

- *$t \mapsto \mu e^{rt}, \mu \in \mathbf{K}$ si r n'est pas racine du polynôme caractéristique de (E)*
- *$t \mapsto \mu t e^{rt}, \mu \in \mathbf{K}$ si r est racine simple du polynôme caractéristique de (E)*
- *$t \mapsto \mu t^2 e^{rt}, \mu \in \mathbf{K}$ si r est racine double du polynôme caractéristique de (E).*

Démonstration. Soit $k \in \mathbf{N}$, soit $\mu \in \mathbf{K}$ et soit $y_{k,\mu} : t \mapsto \mu t^k e^{rt}$. Alors

$$y'_{k,\mu}(t) = \mu e^{rt}\left(rt^k + kt^{k-1}\right) \text{ et } y''_{k,\mu}(t) = \mu e^{rt}\left(r^2 t^k + 2rkt^{k-1} + k(k-1)t^{k-2}\right).$$

Et donc

$$\begin{aligned} y''_{k,\mu}(t) + ay'_{k,\mu}(t) + by_{k,\mu}(t) &= e^{rt}\left(r^2t^k + 2rkt^{k-1} + k(k-1)t^{k-2} + art^k + akt^{k-1} + bt^k\right) \\ &= e^{rt}\left(t^k(r^2 + ar + b) + t^{k-1}k(2r + a) + k(k-1)t^{k-2}\right). \end{aligned}$$

Et donc $y_{k,\mu}$ est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$t^k(r^2 + ar + b) + t^{k-1}k(2r + a) + k(k-1)t^{k-2} = \lambda.$$

- Si r n'est pas racine du polynôme caractéristique, alors $r^2 + ar + b \neq 0$, de sorte que pour $k = 0$ et $\mu = \dfrac{\lambda}{r^2 + ar + b}$, $y_{0,\mu}$ est solution.
- Si r est racine simple, alors $r^2 + ar + b = 0$, mais $2r + a \neq 0$. Et donc pour $k = 1$ et $\mu = \dfrac{\lambda}{2r + a}$, $y_{1,\mu}$ est solution de (E).
- Enfin, si r est racine double, alors $r^2 + ar + b = 0$ et $2r + a = 0$. Et pour $k = 2$ et $\mu = \dfrac{\lambda}{2}$, $y_{\mu,k}$ est solution de (E).

□

Remarque
C'est en fait la seule solution, mais cela nous importe peu, puisque nous souhaitons en trouver au moins une.

Exemples 9.22

- $y'' - 2y' + y = e^t$.
Le polynôme caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$.
Donc 1 est racine double, et donc il existe une solution sous la forme $t \mapsto \lambda t^2 e^t$.
Posons alors $y(t) = \lambda t^2 e^t$, de sorte que

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda(t^2 + 2t)e^t \\ y''(t) &= \lambda(t^2 + 4t + 2)e^t. \end{aligned}$$

On a alors $y'' - 2y' + y = e^t\lambda(t^2 + 4t + 2 - 2t^2 - 8t + t^2) = e^t\lambda 2e^t$, qui vaut e^t si et seulement si $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
Donc $t \mapsto \dfrac{t^2}{2}e^t$ est une solution particulière.

▸ $y'' + y' - 2y = 5e^{-2t}$.
Le polynôme caractéristique est $r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2)$, dont -2 est racine simple.
On cherche donc une solution sous la forme $y(t) = \lambda t e^{-2t}$.
On a alors

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda(-2t+1)e^{-2t} \\ y''(t) &= \lambda e^{-2t}(-2+4t-2) = \lambda e^{-2t}(4t-4). \end{aligned}$$

Et donc $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \lambda e^{-2t}(4t - 4 + 1 - 2t - 2t) = -3\lambda e^{-2t}$, qui vaut $5e^{-2t}$ si et seulement $\lambda = -\dfrac{5}{3}$.
Donc une solution particulière est $t \mapsto -\dfrac{5t}{3}e^{-2t}$.

Ceci peut également servir à déterminer des solutions particulières lorsque le second membre est de la forme $\lambda e^{rt}\cos(\omega t)$ ou $\lambda e^{rt}\sin(\omega t)$.
En effet, on a $e^{rt}\cos(\omega t) = \dfrac{e^{(r+i\omega)t}}{2} + \dfrac{e^{(r-i\omega)t}}{2}$. Le résultat précédent couplé au principe de superposition nous permet de conclure.

Exemple 9.23

Cherchons les solutions réelles à l'équation

$$(E) : y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 3e^{-t}(\cos(t) + 2).$$

Alors le polynôme caractéristique est $r^2 + 2r + 2$, dont les racines complexes sont $-1 \pm i$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont les

$$t \mapsto \lambda e^{-t}\cos(t) + \mu e^{-t}\sin(t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

Cherchons à présent une solution particulière de (E). Par le principe de superposition, il suffit de trouver une solution de $(E_1) : y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 3e^{-t}\cos(t)$ et une solution de $(E_2) : y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 6e^{-t}$.
▸ **Recherche d'une solution de** (E_1) : puisque $3e^{-t}\cos(t) = \dfrac{3}{2}e^{(-1+i)t} + \dfrac{3}{2}e^{(-1-i)t}$, notons $(E_1') : y''(t)+2y'(t)+2y(t)\dfrac{3}{2}e^{(-1+i)t}$ et $(E_1'') : y''(t)+2y'(t)+2y(t) = \dfrac{3}{2}e^{(-1-i)t}$.
Puisque $(1-i)$ est racine du polynôme caractéristique, il existe une solution de (E_1') sous la forme $y_1 : t \mapsto \lambda t e^{(-1+i)t}$.
Or on a $y_1'(t) = \lambda e^{(-1+i)t}(t(-1+i) + 1)$ et

$$y_1''(t) = \lambda e^{(-1+i)t}\left(-1 + i - 1 + i + (-1+i)^2 t\right) = \lambda e^{(-1+i)t}(-2 + 2i - 2it).$$

Et donc y_1 est solution de (E_1') si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lambda e^{(-1+i)t}(-2+2i-2it) + \lambda e^{(-1+i)t}(t(-2+2i)+2) + 2t\lambda e^{(-1+i)t} = \frac{3}{2}e^{(-1+i)t} \Leftrightarrow \lambda 2i = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4i}.$$

De même[13], $y_2 : t \mapsto \dfrac{-3t}{4i}e^{(-1-i)t}$ est solution de (E_1'').
Et donc par le principe de superposition,

$$y_1 + y_2 : t \mapsto \frac{3t}{4i}\left(e^{(-1+i)t} - e^{(-1-i)t}\right) = \frac{3t}{2}e^{-t}\sin(t)$$

est solution de (E_1).
▸ **Recherche d'une solution de** (E_2) : -1 n'est pas racine du polynôme caractéristique, donc il existe une solution de (E_2) sous la forme $y_3 : t \mapsto \lambda e^{-t}$.
On a alors $y_3'(t) = -\lambda e^{-t}$ et $y_3''(t) = \lambda e^{-t}$.
Et donc y_3 est solution de (E_2) si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$y_3''(t) + 2y_3'(t) + 2y_3(t) = 6e^{-t} \Leftrightarrow \lambda = 6.$$

[13] $-1-i$ est aussi racine du polynôme caractéristique.

Par le principe de superposition, une solution de (E) est

$$y_4 = y_1 + y_2 + y_3 : t \mapsto e^{-t}\left(6 + \frac{3}{2} t\sin(t)\right).$$

Et donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-t}\left(\lambda\cos(t) + \left(\mu + \frac{3t}{2}\right)\sin(t) + 6\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

9.2.5 Problème de Cauchy

Comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, la connaissance d'une condition initiale permet de déterminer totalement une solution.
Il y a toutefois une différence : pour choisir une solution d'une équation d'ordre 2, il faut choisir les valeurs de deux paramètres : ceux que nous avons nommé λ et μ.
Or, la seule connaissance de la valeur de $y(t_0)$ ne nous donne qu'une équation, qui ne suffit pas à elle seule à déterminer les valeurs de λ et de μ.
Pour garantir l'unicité de la solution, il faut connaître les valeurs de y et de sa dérivée en t_0.

Proposition 9.24 : *Soit $t_0 \in I$. Alors pour tous $(y_0, y_1) \in \mathbf{K}^2$, il existe une unique solution de $(E) : y'' + ay' + by = c$ vérifiant* $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$

Démonstration. La preuve ne figure pas explicitement au programme, mais donnons-en les grandes lignes.
Si f est une solution particulière de E, nous savons qu'il existe deux fonctions u et v telles que l'ensemble des solutions de (E_0) soit $\{\lambda u + \mu v,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2\}$, de sorte que toute solution de (E) est de la forme $\lambda u + \mu v + f$.
Et donc

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda u(t_0) + \mu v(t_0) + f(t_0) = y_0 \\ \lambda u'(t_0) + \mu v'(t_0) + f_1'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Il faut alors travailler un peu pour prouver que dans tous les cas, ce système de deux équations à deux inconnues[14] possède bien une unique solution. Sans grande surprise, le cas le plus désagréable est celui où le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées. □

Détails ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$)
Si le polynôme caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors $u : t \mapsto e^{r_1 t}$ et $v : t \mapsto e^{r_2 t}$.
S'il possède une racine double, alors $u(t) = e^{rt}$ et $v(t) = te^{rt}$.
Etc...

[14] Qui sont λ et μ.

Exemple 9.25

Reprenons l'équation $y'' - 2y' + y = e^t$.
Les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t +, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, et nous avons déterminé une solution particulière, qui est $t \mapsto \frac{t^2}{2}e^t$.
Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{t \mapsto \left(\lambda + \mu t + \frac{t^2}{2}\right)e^t,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

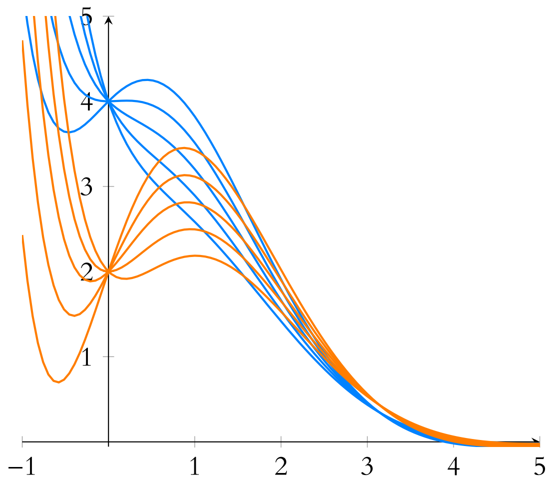
Cherchons en particulier l'unique solution y telle que $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.
On a $y(0) = \lambda$, et de même, $y'(0) = \lambda + \mu$.
Et donc

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -2 \end{cases}$$

Contrairement au cas des équations d'ordre 1, les courbes intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 peuvent donc se croiser[15].

[15] Elles peuvent même se croiser en plusieurs points.

Plus précisément : pour chaque $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$, il existe une infinité de courbes intégrales passant par (t_0, y_0) : une pour chaque valeur possible de $y'(t_0)$.
En revanche, deux courbes intégrales qui passent par le même point et qui ont la même tangente en ce point sont confondues.
Par exemple, nous avons représenté ci-dessous plusieurs courbes intégrales de l'équation $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 3e^{-t}(\cos(t) + 2)$ résolue précédemment.



9.3 Suites récurrentes linéaires

On considère dans cette partie des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}$ pouvant toujours être égal à $\mathbf{R}$ (pour des suites réelles) ou à $\mathbf{C}$ (pour des suites de complexes).

9.3.1 Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

Définition 9.26 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{K}$.

1. Soit $q \in \mathbf{K}$. On dit que (u_n) est une suite géométrique de raison q si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
2. Soit $r \in \mathbf{K}$. On dit que (u_n) est une suite arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 9.27 : ► *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$.*
Plus généralement, pour tout $n_0 \in \mathbf{N}$ et pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.
► *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 q^n$.*
Plus généralement, pour tout $n_0 \in \mathbf{N}$ et pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = u_0 q^{n-n_0}$.

Remarque
Cette seconde formule sert notamment pour des suites qui ne démarreraient pas à u_0.

Démonstration. Par récurrence sur n. □

9.3.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 9.28 – On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ pour laquelle il existe deux nombres a et b dans $\mathbf{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque. Notons que si $a = 1$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison b, et si $b = 0$, alors (u_n) est géométrique de raison a.

Proposition 9.29 : *Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique, à valeurs dans $\mathbf{K}$, vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$.
Soit alors ℓ l'unique solution de l'équation $\ell = a\ell + b$. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \ell + \lambda a^n$.*

$a \neq 1$ — Notons que le cas $a = 1$ n'a que peu d'intérêt, il s'agirait de celui d'une suite arithmétique, que l'on sait déjà traiter.

Démonstration. Posons $v_n = u_n - \ell$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(v_n + \ell) + b - \ell = av_n + \underbrace{a\ell - \ell + b}_{=0}.$$

Et donc (v_n) est géométrique de raison a : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = v_0 a^n$, de sorte que

$$u_n = v_n + \ell = \ell + v_0 a^n.$$

Remarque *: notons qu'on pourrait donner une formule pour le terme général de (u_n) : $u_n = a^n\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$, mais il n'y a aucun intérêt à l'apprendre.* □

Remarque — Il est facile de vérifier que la seule valeur de c pour laquelle la suite $(u_n + c)$ est géométrique de raison a est $c = \ell$.

Exemple 9.30

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 2$.
Alors $\ell = 5\ell - 2 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{1}{2}$.
Et donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2} + \lambda 5^n$.
En particulier, $2 = u_0 = \dfrac{1}{2} + \lambda \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{3}{2}$.
Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3 \times 5^n}{2}$.

Méthode — La proposition précédente garantit l'existence de λ, mais pour déterminer sa valeur, on utilisera le premier terme de la suite (il faut y voir là une sorte de condition initiale).

9.3.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 9.31 – On appelle **suite récurrente linéaire d'ordre 2** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ telle qu'il existe $(a,b) \in \mathbf{K}^2$, avec $b \neq 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

Dans ce cas, le polynôme $r^2 + ar + b$ est appelé **polynôme caractéristique** de la suite (u_n).

$b \neq 0$ — Notons que le cas $b = 0$ n'a pas d'intérêt, il s'agirait de celui où $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique, cas que l'on sait déjà traiter.

Remarque. Le cas $b = 0$ correspond à celui des suites arithmético-géométriques, que nous savons déjà traiter.

Proposition 9.32 (Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à valeurs complexes, et soit $P(r) = r^2 + ar + b$ son polynôme caractéristique[16], où $b \neq 0$.*

- *Si P possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors il existe deux complexes λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.*
- *Si P possède une racine double r, alors il existe deux complexes λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu)r^n$.*

[16] Ce qui implique qu'on suppose que pour tout n,
$$u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

Démonstration. L'idée générale est qu'une suite (v_n) qui satisfait à la même relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n = 0$, et qui en plus vérifie $v_0 = v_1 = 0$ est entièrement nulle : $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = 0$.
La preuve en est aisée : $v_2 = -av_1 - bv_0 = 0$. Puis $v_3 = -av_2 - bv_1 = 0$, etc. Une récurrence facile amène au résultat.

► Supposons dans un premier temps que P possède deux racines distinctes r_1 et r_2.
Pour $(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2$, on pose alors $v_n = u_n - \lambda r_1^n - \mu r_2^n$. Alors

$$\begin{aligned}v_{n+2}+av_{n+1}+bv_n &= u_{n+2}-\lambda r_1^{n+2}-\mu r_1^{n+2}+au_{n+1}+a\lambda_1 r_1^{n+1}+a\mu r_2^{n+1}+bu_n+b\lambda r_1^n+b\mu r_2^n\\ &= u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n+\lambda r_1^n(r_1^2+ar_1+b)+\mu r_2^n(r_2^2+ar_2+b)\\ &= 0+0+0=0.\end{aligned}$$

Notons que ceci reste valable quel que soit le choix de λ et μ.
Peut-on alors choisir λ et μ tels que $v_0 = v_1 = 0$, et donc[17] que (v_n) soit la suite nulle ?
C'est le cas si et seulement si

$$\begin{cases} u_0-\lambda-\mu=0\\ v_1-\lambda r_1+\mu r_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu=u_0\\ \lambda r_1+\mu r_2=u_1\end{cases}$$

Il s'agit alors d'un système de deux équations à deux inconnues, de déterminant $r_1-r_2\neq 0$, donc de Cramer, et qui possède une unique solution.
Donc il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2$ tels que

$$\forall n\in\mathbf{N},\ u_n-\lambda r_1^n-\mu r_2^n \Leftrightarrow u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n.$$

► Dans le cas d'une racine double[18] r, on pose $v_n = u_n-(\lambda n+\mu)r^n$. Comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}v_{n+2}+av_{n+1}+bv_n &= u_{n+2}-(\lambda(n+2)+\mu)r^{n+2}+au_{n+1}+a\left(\lambda(n+1)+\mu\right)r^{n+1}+bu_n+b\left(\lambda n+\mu\right)r^n\\ &= \underbrace{u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n}_{=0}+\lambda r^n\left((n+2)r^2+a(n+1)r+bn\right)+\mu r^n\underbrace{\left(r^2+ar+b\right)}_{=0}\\ &= \lambda r^n\left((r^2+ar+b)n+r(2r+a)\right).\end{aligned}$$

Mais r étant racine de P, on a $r^2+ar+b=0$, et puisqu'il s'agit d'une racine double, on a[19] $r=-\dfrac{a}{2}\Leftrightarrow 2r+a=0$, de sorte que $v_{n+2}+av_{n+1}+bv_n=0$.
Comme précédemment, on cherche alors s'il existe des valeurs de λ et μ telles que $v_0 = v_1 = 0$ (et donc $v_n=0$ pour tout n).
Mais ceci est équivalent à $\begin{cases}\lambda=u_0\\ (\lambda+\mu)r=u_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=u_0\\ \mu=\frac{u_1}{r}-u_0\end{cases}$.
On conclut alors comme dans le premier cas.
Notons que dans le deux cas, nous avons prouvé un peu mieux que le résultat annoncé : il existe un **unique** couple (λ,μ) tel que... □

[17] D'après ce qui a été dit au début de la preuve.

Remarque

Pour l'instant, nous n'avons vraiment parlé du déterminant que pour les systèmes de deux équations à deux inconnues complexes, mais admettons temporairement que les choses se passent de la même manière en complexe. Et si vous n'êtes pas convaincus, prouvez à la main que ce système possède une unique solution.

[18] Notons que cette racine ne peut être nulle car $b\neq 0$ par hypothèse.

[19] Appliquer la formule bien connue donnant la racine double dans le cas où $\Delta=0$.

$r\neq 0$

Puisque nous avons supposé que $c\neq 0$, les racines de P ne peuvent être nulles, puisque leur produit vaut c.

Proposition 9.33 (Cas où K = R) : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à valeurs réelles, et soit P son polynôme caractéristique.*

- *Si P possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe deux complexes λ et μ tels que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$.*
- *Si P possède une racine double r, alors il existe deux complexes λ et μ tels que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n=(\lambda n+\mu)r^n$.*
- *Si P possède deux racines complexes conjuguées, $\rho e^{\pm i\theta}$. Alors il existe deux réels λ,μ tels que*

$$\forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\rho^n\left(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)\right).$$

Démonstration. Les deux premiers cas se prouvent exactement comme dans le cas complexe.
Si P possède $\rho e^{\pm i\theta}$ comme racines complexes, avec $\rho\neq 0$ et $\theta\not\equiv 0\ [\pi]$, alors[20] il existe deux complexes α et β tels que

$$\forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\alpha\rho^n e^{in\theta}+\beta\rho^n e^{-in\theta}.$$

Mais alors $\mathrm{Im}(u_0)=\mathrm{Im}(u_1)=0$, soit encore

$$\begin{cases}\mathrm{Im}(\alpha)+\mathrm{Im}(\beta)=0\\ \mathrm{Im}\left(\alpha e^{i\theta}+\beta e^{-i\theta}\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{Im}(\alpha)=-\mathrm{Im}(\beta)\\ \mathrm{Re}(\alpha)\sin\theta+\mathrm{Im}(\alpha)\cos\theta-\mathrm{Re}(\beta)\sin\theta+\mathrm{Im}(\beta)\cos\theta=0\end{cases}$$

[20] Une suite à valeurs réelles est une suite à valeurs complexes. On peut donc lui appliquer les résultats précédents.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(\alpha) = -\mathrm{Im}(\beta) \\ (\mathrm{Re}(\alpha) - \mathrm{Re}(\beta))\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Et puisque $e^{i\theta} \notin \mathbf{R}$, $\sin\theta \neq 0$, de sorte que $\mathrm{Re}(\alpha) = \mathrm{Re}(\beta)$.
On en déduit donc que $\beta = \overline{\alpha}$, et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \alpha\rho^n e^{in\theta} + \overline{\alpha}\rho^n e^{-in\theta} = 2\rho^n \,\mathrm{Re}\left(\alpha e^{in\theta}\right) = 2\rho^n \left(\mathrm{Re}(\alpha)\cos(n\theta) - \mathrm{Im}(\alpha)\sin(n\theta)\right).$$

□

Exemples 9.34

▸ Soit (u_n) la suite[21] définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Alors son polynôme caractéristique est $r^2 - r - 1$, qui possède pour racines $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Donc il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

En particulier, on a $u_0 = \lambda \times 1 + \mu \times 1$, de sorte que $\lambda = -\mu$.
Et on a $u_1 = 1 = \lambda\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \lambda\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \lambda\sqrt{5}$, et donc $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.
▸ Soit u_n vérifiant $u_0 = 2$ et $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
Alors son polynôme caractéristique est $r^2 - 2r + 2$, qui possède $1 \pm i$ comme racines.
C'est-à-dire $\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$.
Donc il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\lambda\cos\frac{n\pi}{4} + \mu\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

En utilisant les valeurs de u_0 et u_1, on trouve

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda + \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -3 \end{cases}$$

Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(2\cos\dfrac{n\pi}{4} - 3\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

[21] Dite de Fibonacci